

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ing. dell'Energia - Ing. Meccanica (Canali 2,3)

Docenti: C. Bertolin, L. Fiorot, L. Martini

I appello 2023/24

Data: 23/01/2024

Tema: A

Regole d'esame. Durata: **1 ora e 30 minuti**. È *vietato* l'utilizzo di appunti e supporti elettronici. Mantenere il telefono **spento** per tutta la durata dell'esame. Mostrare i passaggi e **cerchiare** le risposte.

- **ESERCIZIO 1.** Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0 \right\}; \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare una base di U , e una base di $U \cap W$. Calcolare le dimensioni di: U , W , $U \cap W$, $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
2. Trovare una base ortonormale di U .
3. Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^4$ tale che $Z \oplus (U + W) = \mathbb{R}^4$.

- **SOLUZIONE 1.**

1. $B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
 $\dim(U) = 2, \dim W = 2, \dim(U \cap W) = 1, \dim(U + W) = 3$.
 U e W non sono in somma diretta perché $\dim(U \cap W) \neq 0$.
2. Una base ortonormale di U è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. Un tale Z non è unico per esempio $Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

- **ESERCIZIO 2.** Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

- i) Determinare $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ e le relative dimensioni. L'endomorfismo f è iniettivo? È suriettivo? È invertibile?
- ii) Calcolare $f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
- iii) Dimostrare che A è diagonalizzabile e determinare una matrice H invertibile e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}AH = D$.
- iv) Si consideri $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$. La matrice A è simile alla matrice B ?

• **SOLUZIONE 2.**

- i) $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, $\dim \text{Im}(f) = 3$. L'endomorfismo f è iniettivo, suriettivo e invertibile.
- ii) $f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
- iii) La matrice A è simmetrica quindi per il Teorema spettrale essa è ortogonalmente diagonalizzabile quindi è diagonalizzabile. $D = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **ESERCIZIO 3.** Nello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta r e il piano π :

$$r : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \pi : 2x + 2y + z = 1$$

- a) Determinare equazioni cartesiane per r e scrivere π come sottovarietà lineare $P + V_\pi$.
- b) Determinare la posizione reciproca e la distanza tra π e r .

• **SOLUZIONE 3.**

- a) $r : \begin{cases} x = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad \pi : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- b) La retta r è parallela al piano π e disgiunta, $d(r, \pi) = 1$.

• **TEORIA**

- (a) Enunciare e dimostrare il teorema delle dimensioni. (3 pti)
- (b) Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e dimostrare che non vale viceversa fornendo un controesempio. (3 pti)