

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

I appello – 28/01/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il teorema delle dimensioni. (2 pts)
2. Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$(1 + i)x^5 - 16(\sqrt{2})x = 0.$$

(3 pts)

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U e la dimensione $\dim U$. Estrarre dai generatori di W una base $\mathcal{B}_W$ di W e calcolare la dimensione $\dim W$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. (4 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus W = \mathbb{R}^4$. Determinare $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus U = U + W$. (2 pts)
- (c) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme

$$Z_k : \begin{cases} x_1 + x_2 = k^2 + k \\ x_1 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ in somma diretta con U ? (1 pts)

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ con parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice associata a f_a rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 5+a & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1+a & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- i) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_a è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Per i valori per cui non è iniettiva determinare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f_a)}$ di $\text{Ker}(f_a)$ e una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f_a)}$ di $\text{Im}(f_a)$. (2 pts)
- ii) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a è ortogonalmente diagonalizzabile? Per tali valori determinare una matrice invertibile H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}AH = D$. (2 pts)
- iii) Determinare, se esistono, tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A_a . (1 pts)
- iv) Determinare la matrice P della proiezione ortogonale sul sottospazio $\text{Im}(f_0)$. Calcolare P^{32} . (2 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si consideri la retta r :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare equazioni cartesiane della retta r . Determinare equazioni parametriche della retta s passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ed ortogonale al piano $\pi : 2x + y + z = 8$. (2 pti)
 2. Determinare le bisettrici delle rette r ed s (nella forma $P + V$). (2 pti)
 3. Calcolare la distanza tra la retta r e il piano $\sigma : 2x - z = 1$. (1 pto)
 4. Dati $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ calcolare $v \times w$. (1 pto)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Consegnare **i fogli di bella con Nome e Cognome su ogni foglio**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare i fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo e consegnare tutti i fogli ricevuti.
- **BUON LAVORO!!**