

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2
DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pti)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pti)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pti)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pti)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pts)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pts)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pts)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pts)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pti)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pti)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pti)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pti)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pts)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pts)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pts)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pts)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pts)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pts)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pts)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pts)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2
DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pti)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pti)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pti)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pti)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2
DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pts)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pts)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pts)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pts)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2
DOCENTE: LUISA FIOROT.

II appello – 12/02/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il criterio di iniettività di un'applicazione lineare. (2 pts)
2. Dimostrare che se A è una matrice quadrata simmetrica, allora tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per U e la dimensione $\dim U$. Determinare una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$, una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3,5 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (U + W) = \mathbb{R}^5$ e S sia ortogonale a U e a W . (1 pts)
- (c) Denotiamo con p_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di proiezione ortogonale su U . Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $p_U(v) = e_1$ con $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)
- (d) Determinare un sottospazio $Z \leq \mathbb{R}^5$ di dimensione 2 tale che $\dim(U \cap Z) = \dim(W \cap Z) = 1$. Tale sottospazio è unico? (1,5 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determini una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$. L'applicazione lineare f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? Si determini inoltre la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio). (3 pts)
2. Si calcoli $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. (2 pts)
3. Si calcolino gli autovalori di f con le relative molteplicità algebriche e geometriche. Si dimostri che l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si determini una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f . (2 pts)
4. Esiste un numero $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$? Esiste un numero $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia la funzione nulla? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

1. Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare l'equazione cartesiana di un piano σ parallelo ad r ed s e passante per l'origine. (2 pti)
 2. Determinare un piano π contenente r ed incidente s nel punto $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1 pti)
 3. Determinare una coppia di punti di minima distanza fra r ed s e calcolare la distanza fra r ed s . (2 pti)
 4. Determinare, con equazioni cartesiane, tutti i piani ortogonali ad r e distanti $\sqrt{2}$ dal punto $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pti)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare la bella copia con le **soluzioni scritte in modo leggibile, ordinato e motivato**. Consegnare anche questo foglio contenente il testo. NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul primo foglio protocollo e consegnare tutti i fogli ricevuti uno dentro l'altro.
- BUON LAVORO!!