

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

III appello – 04/07/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare la Formula di Grassmann. (2 pts)
2. Siano d_1, d_2 autovalori distinti di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che gli autospazi di A relativi a tali autovalori sono in somma diretta. (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione:

$$z^3 = 4i\bar{z}$$

Quante soluzioni distinte ha questa equazione? (2,5 pts)

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare una $\mathcal{B}_U$ di U , una base $\mathcal{B}_W$ di W , una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$ e una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (4 pts)
- (b) Determinare un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus W = \mathbb{R}^4$.
Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^4$. (2 pts)
- (c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U . (1,5 pts)

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

- i) Determinare la matrice M associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$. Determinare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f)}$ di $\text{Ker}(f)$ e una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f)}$ di $\text{Im}(f)$. L'applicazione f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (3,5 pts)
- ii) Determinare $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. (1 pts)
- iii) Denotiamo con A la matrice ottenuta da M eliminando l'ultima colonna. Determinare il polinomio caratteristico di A . La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice invertibile H e una matrice diagonale D tali che $H^{-1}AH = D$. (2,5 pts)
- iv) Si consideri la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Esiste un valore del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A sia simile alla matrice B_a ? Esiste un valore del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tale che la matrice A sia ortogonalmente simile alla matrice B_a ? (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s :

$$r = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad s : \begin{cases} x - 5y = -12 \\ 2y - z = 6 \end{cases}$$

1. Determinare la posizione reciproca fra r ed s e la loro distanza. (2 pti)
 2. Determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente s e passante per l'origine. (1 pto)
 3. Determinare il punto T proiezione ortogonale del punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sul piano $\sigma : 2x + z = 2$. Detta t la retta passante per i punti P e T determinare la proiezione ortogonale della retta t sul piano σ . (2 pti)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Consegnare **i fogli di bella con Nome e Cognome su ogni foglio**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. I FOGLI SENZA IL NOME NON VERRANNO CORRETTI. NON consegnare i fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo e consegnare tutti i fogli ricevuti.
- BUON LAVORO!!