

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

IV appello 11/09/2025

DOMANDE di TEORIA

1. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rouché-Capelli. (2 pts)
2. Dimostrare che dato T un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, allora $T \oplus T^\perp = \mathbb{R}^n$, dove $T^\perp$ è l'ortogonale di T . (2 pts)

ESERCIZI

Esercizio 1. Si considerino $\mathbb{R}^4$ con coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 e i sottospazi:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U , una base $\mathcal{B}_W$ di W , una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$ e una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (4 pts)
- (b) Completare la base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$ ad una base $\mathcal{C}$ di W .
Verificare che il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio W e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga v . (2 pts)
- (c) Determinare una base ortonormale di U e calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sul sottospazio U . (2 pts)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \\ 2x-y-3z \end{pmatrix}$$

- i) Determinare una base $\mathcal{B}_{\text{Ker}(f)}$ di $\text{Ker}(f)$ e una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(f)}$ di $\text{Im}(f)$. L'applicazione f è iniettiva; è suriettiva; è biiettiva? (2 pts)
- ii) Determinare il rango di A . Calcolare $f^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. (1,5 pts)
- iii) Si dimostri che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, si determini il polinomio caratteristico di B , gli autovalori di B e i relativi autospazi. (2,5 pts)

- iv) Dimostrare che la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 12 & 21 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

è simile alla matrice B . (1 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 3 si considerino le rette r ed s_a con $a \in \mathbb{R}$:

$$r = \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 3 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + (a - 1)z = a + 4 \\ y - z = a + 1 \end{cases}$$

1. Determinare la posizione reciproca fra r ed s_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Nel caso di rette incidenti calcolare il punto di intersezione. (3 pti)
 2. Posto $a = 0$ determinare una coppia di punti di minima distanza fra la retta r e la retta s_0 e la loro distanza. (2 pti)
 3. Posto $a = -1$ determinare l'equazione cartesiana di un piano σ contenente s_{-1} e parallelo a r e calcolare la distanza tra r e s_{-1} . (2 pti)
 4. Determinare il punto medio del segmento AB e l'asse del segmento AB (l'insieme dei punti equidistanti da A e B) con $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (1 pti)
-

Regole d'esame

- **I telefoni devono essere spenti.**
- Consegnare **i fogli di bella con Nome e Cognome su ogni foglio**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. I FOGLI SENZA IL NOME NON VERRANNO CORRETTI. NON consegnare i fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)**.
- Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora e 30 minuti dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo e consegnare tutti i fogli ricevuti.
- **BUON LAVORO!!**