Esercizio 1: determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^3 = 4 i \bar{z}.$$ Quante sono le radici distinte?

Svolgim.:

Sia $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho \in \mathbb{R}$ $\rho \geq 0$ $\theta \in \mathbb{R}$.

$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$ $\quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ $\quad i = e^{i\pi/2}$

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 4\rho e^{-i\theta} e^{i\pi/2} \iff$$

$$\rho^3 e^{i4\theta} = 4\rho e^{i\pi/2} \iff \begin{cases} \rho^3 = 4\rho \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\rho = 0 \implies z = 0$

oppure se $\rho \neq 0$ $\begin{cases} \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{4k\pi}{8} \end{cases}$ $\quad z_0 = 2e^{i\pi/8}$ $\quad z_2 = 2e^{i\frac{9}{8}\pi}$ $\quad z_1 = 2e^{i\frac{5}{8}\pi}$ $\quad z_3 = 2e^{i\frac{13}{8}\pi}$

Per $k \in \{0,1,2,3\}$ le radici sono distinte mentre poi la radice

$k=4$ coincide con quella corrispondente a $k=0$

$k=5$ " " " " a $k=1$ e così via.

In tutto l'equazione studiata ha 5 soluzioni:

$$\{0,\ 2e^{i\pi/8},\ 2e^{i\frac{5}{8}\pi},\ 2e^{i\frac{9}{8}\pi},\ 2e^{i\frac{13}{8}\pi}\}.$$

Esercizio 2:

a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim U = 2$$

$$W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{w_3} \right\rangle$$

w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti perché non multipli fra loro mentre $w_3 = 2w_1$

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$ $\dim W = 2$

$w \in W \iff w = \begin{pmatrix}a\\a\\2a+b\\-a+3b\end{pmatrix}$ $w \in U \iff \begin{cases} a = 2a+b \\ a = 2a+b \end{cases} \iff b = -a$

$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}a\\a\\2a-a\\-a-3a\end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-4\end{pmatrix} \right\rangle$ $\dim U \cap W = 1$ $B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-4\end{pmatrix} \right\}$.

U e W non sono in somma diretta perché $U \cap W \neq \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$.

$B_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$ perché $\dim(U+W) = 3$ e $w_1 \in W \setminus U$.

b) $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$ $T = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ verifica $T \oplus W = \mathbb{R}^4$

perché $\dim(W+T) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow W+T = \mathbb{R}^4$ ed essendo

$\dim W = \dim T = 2$ per le formule di Grassman $\dim(W \cap T) = 4-2-2 = 0$.

Notiamo che essendo $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ il T precedente non va bene

perché $e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in U$ ma $S = \langle e_2, e_4 + w_2 \rangle$ verifica la richiesta

in quanto $W + S = \langle w_1, w_2, e_2, e_4 + w_2 \rangle = \langle w_1, w_2, e_2, e_4 \rangle = W + T = \mathbb{R}^4$

e $U + S = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^4$. Essendo $\dim S = 2 \Rightarrow S \cap U = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

e $S \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$, quindi $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^4$.

$x_1 - x_2 = 0$

c) La proiezione ortogonale di $v = \begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ sul sottospazio U si calcola

ponendo

$v = u_{/\!/} + u_\perp$ con $u_{/\!/} \in U$ e $u_\perp \in U^\perp$ $u_{/\!/} \in U$ quindi $u_{/\!/} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\\b\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\\b\end{pmatrix} + u_\perp$ $u_\perp = \begin{pmatrix}3-a\\1-a\\2-a\\1-b\end{pmatrix} \in U^\perp \iff \begin{cases} \begin{pmatrix}3-a\\1-a\\2-a\\1-b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix}3-a\\1-a\\2-a\\1-b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \end{cases}$

cioè $\begin{cases} 3-a+1-a+2-a = 0 \\ 1-b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ $u_{/\!/} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ è la proiezione ortogonale di v su U.

Esercizio 3:

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

i) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$ in quanto

$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2(9-1) \neq 0$ $\quad B_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow$ f è suriettiva

Ker f $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad B_{\mathrm{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \mathrm{Ker} f = 1 \Rightarrow f$ non è iniettiva $\Rightarrow$ non è biiettiva.

ii) $f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ $\quad x_2 = 1 \Rightarrow f^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ -1 & 3-x & -1 \\ -1 & -1 & 3-x \end{pmatrix} = (2-x)(x^2-6x+9-1) =$

$= (2-x)(x^2-6x+8) = (2-x)^2(4-x)$ $\Rightarrow$ Tutti gli autovalori di A sono reali

Gli autovalori sono 2 $m_a(2)=2$ e 4 $m_a(4)=1=m_g(4)$

$V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2\mathbb{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} -x+y-z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad m_g(2) = 1 \neq m_a(2)$ $\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile

$V_4 = \mathrm{Ker}(A - 4\mathbb{I}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$ $\quad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

iv) Certamente per $a=0$ A non è simile a B_0 perché A non è diag.

e B_0 è diagonale.

Per $a \neq 0$ A è simile a $B_a \Leftrightarrow H^{-1}AH = B_a$ con $H = (v_1\ v_2\ v_3)$ $\det H \neq 0$

$f(v_1) = 2v_1 \Rightarrow v_1 \in V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ possiamo prendere $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(v_2) = a v_1 + 2 v_2$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = a + 2x_2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = a + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = a \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = a \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = -a \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(v_3) = 4v_3 \Rightarrow v_3 \in V_4$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$

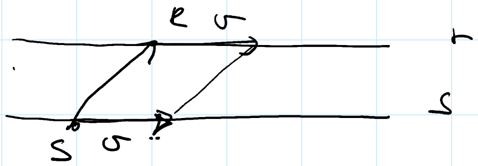
Se due matrici sono ortogonalmente simili sono anche simili quindi per $a = 0$ certamente A non è ortogonalmente simile a B_a.

Notiamo che $\mathrm{Ker}(f - 2id) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad \mathrm{Ker}(f - 4id)$

Esercizio 4:

1) $r: \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad R + \langle v \rangle$ $\qquad s: \begin{cases} x - 5y = -12 \\ 2y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad S + \langle v \rangle$

r è parallela ad s.



$d(r,s) = \frac{\|(R-S) \times v\|}{\|v\|} =$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{25+1+4}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{30}} = \frac{5 \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{30}} = \sqrt{5}$$

2) $\pi_{\alpha\beta}: \alpha(x - 5y + 12) + \beta(2y - z - 6) = 0$ imponiamo il passaggio per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$12\alpha - 6\beta = 0 \quad 2\alpha = \beta \quad \alpha = 1 \quad \beta = 2$

$\pi: x - 5y + 12 + 4y - 2z - 12 = 0$ $\qquad \boxed{\pi: x - y - 2z = 0}$

3) $\sigma: 2x + z = 2$ $\quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

T si ottiene intersecando σ con la retta $t \perp$ a σ passante per P.

t: $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ $\begin{cases} x = 2+2a \\ y = 1 \\ z = 3+a \end{cases}$ intersechiamo con σ imponendo $2x+z=2$

$4+4a+3+a=2$ $5a=-5$ $a=-1$ $T = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

Essendo $t = P \vee T$ ortogonale a σ la proiezione ortogonale della retta t su σ è T.