Esercizio 1: si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^5$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Determinare equazioni cartesiane per U e $\dim U$. Determinare una base B_W di W, $\dim W$, una base $B_{U\cap W}$ di $U\cap W$, $\dim(U\cap W)$.

Svolg: detti $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ notiamo che u_2, u_3 non sono multipli fra loro, quindi sono linearmente indipendenti. Inoltre $u_1 \notin \langle u_2, u_3\rangle$ perché $\langle u_2,u_3\rangle \subseteq x_3 = 0$ mentre la x_3 di u_1 è 1. Quindi $\dim U = 3$

I generatori di W sono lin. ind. $\Rightarrow$ $\boxed{\dim U = 3 \quad \dim W = 2}$

$u = au_1 + bu_2 + cu_3 \in U$

$$u = \begin{pmatrix}a+b\\b+c\\a\\0\\a+b+c\end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = a+b \\ x_2 = b+c \\ \cancel{x_3 = a} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a+b+c \end{cases} \quad a = x_3 \quad \begin{cases} \cancel{x_1 = x_3 + b} \\ x_2 = b+c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = x_3 + b + c \end{cases} \quad \begin{aligned} b &= x_1 - x_3 \\ c &= x_2 - x_1 + x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = x_3 + x_2 \end{cases} \qquad \boxed{U: \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \end{cases}}$$

Calcoliamo $U\cap W$: $w \in W$ $\quad w = \alpha w_1 + \beta w_2 = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\0\\\alpha\\\alpha+\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ $\quad w \in U \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ 0 + \alpha - \alpha = 0 \end{cases}$ $\quad \beta = -\alpha$

$$U\cap W = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} \qquad \boxed{B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}} \qquad \boxed{\dim U\cap W = 1}$$

Per la formule di Grassmann $\boxed{\dim U+W = 3+2-1 = 4}$ completando B_U a base di $U+W$ è necessario e sufficiente aggiungere a B_U un vettore $w \in W \setminus U$ quindi

$$B_{U+W} = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}} \right\}.$$

b) Determinare una base di $(U+W)^\perp$

Svolg: Il sottospazio $(U+W)^\perp$ avrà dimensione 1 essendo $\dim(U+W) = 4$.
Si deve risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} v\cdot u_1 = 0 \\ v \cdot u_2 = 0 \\ v\cdot u_3 = 0 \\ v \cdot w_1 = 0 \end{cases} \quad \text{con } v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 1&0&1&1&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&-1&0&0 \\ 0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_5=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_3+x_5=0 \\ x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=x_3 \\ x_5=-x_3 \\ x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ -x_3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{B_{(U+W)^\perp}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}$$

c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^5$ tali che $P_U(v)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Svolg. Ricordiamo che $U: \begin{cases} x_4=0 \\ x_2+x_3-x_5=0 \end{cases}$ quindi $e_1 \in U$

$$\{v \in \mathbb{R}^5 \mid P_U(v)=e_1\} = P_U^{-1}\{e_1\} = e_1+U^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

d) $Z=\langle z_1,z_2\rangle$ con $z_1,z_2 \in \mathbb{R}^5$ lin. indip.

Dovendo essere $\dim(U\cap Z)=1$ e $\dim(W\cap Z)=1$ posso prendere come $z_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U\cap W$ e cercare $z_2 \notin U$ e $z_2 \in W$. Sappiamo da b) che $U+W$ ha equazione cartesiana $x_2+x_3-x_5=0$ quindi $z_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ e $z_2 \notin W$

Quindi $Z=\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ soddisfa la richiesta. Questo Z non è unico. Ad esempio possiamo prendere $Z'=\langle v,w\rangle$ con $v \in U\setminus W$ e $w \in W\setminus U$

$Z'=\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w} \right\rangle$ perché $\dim(U+Z')=4$ e $\dim(W+Z')=3$ quindi $\dim(U\cap Z')=1$ e $\dim(W\cap Z')=1$

Es 2:

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1) Essendo $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3(1-3)+4(2-1)=-6+4=-2\neq 0$ i vettori

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ quindi esiste un'unica applicazione lineare f che soddisfa le richieste.

$\operatorname{Im} f = \left\langle f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

e $\dim \operatorname{Im} f=2$ quindi $\dim \operatorname{Ker} f = 3-2=1$ ed essendo $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ si ha $\operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$\boxed{B_{\operatorname{Ker} f}=\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \qquad B_{\operatorname{Im} f}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$ f non è iniettiva perché $\operatorname{Ker} f \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

non è suriettiva perché $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ non è biiettiva.

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 6 & -2 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\boxed{A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$

3) Essendo $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ipotesi, allora

$f\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ perciò

$\boxed{f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Ker} f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}$

Essendo $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ si ha che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} f$ perché $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \emptyset.}$

4) Notiamo che 0 è autovalore di f perché $\operatorname{Ker} f \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e

$V_0 = \operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

-2 è autovalore perché $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-2}$

$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Essendo $\operatorname{tr} A = -4 - 1 + 1 = -4 =$ somma degli autovalori

l'ultimo autovalore è ancora 2 cioè $\boxed{\begin{array}{l} 0 \text{ ha } m_a(0) = 1 = m_g(0) \\ -2 \text{ ha } m_a(-2) = 2 \end{array}}$

Se calcoliamo $V_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad -x + y + z = 0$

$x = y + z \quad \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \boxed{m_g(-2) = 2}$ e $1 \leq m_g(-2) \leq m_a(-2)$

$\Rightarrow p_A(x) = -x(x+2)^2$ ha tutti zeri reali e $m_a = m_g$ $\forall$ autovalore di f

$\Rightarrow f$ è diagonalizzabile con base di autovettori $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$4x + 4y - z = 4$

Esercizio 3: determiniamo la posizione reciproca fra r ed s:

1) $r: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\qquad s: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Essendo $r = R + \langle v_r \rangle$ ed $s = S + \langle v_s \rangle$ calcoliamo

$\dim \langle R-S, v_r, v_s \rangle = \dim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$ perché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot (3-1) = 16 \neq 0$

$\Rightarrow$ r ed s non sono complanari quindi sono $\boxed{\text{sghembe}}$.

Il piano $\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle v_r, v_s \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ ed ha eq. cartesiana

$\boxed{\sigma : z = 0}$.

2) Il piano $\pi = R + \langle v_r, S-R \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \rangle$, esso ha eq. cartesiana

$\pi : 4x + 4y - z = 4$

3) Il generico punto di r è $P = \begin{pmatrix} 2+a \\ 1-a \\ 8 \end{pmatrix}$, il generico punto di s è $Q = \begin{pmatrix} 1-b \\ 3b \\ 0 \end{pmatrix}$

$P - Q = \begin{pmatrix} 1+a+b \\ 1-a-3b \\ 8 \end{pmatrix}$ imponiamo $\begin{cases} (P-Q) \cdot v_r = 0 \\ (P-Q) \cdot v_s = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1+a+b \\ 1-a-3b \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cancel{1}+a+b-\cancel{1}+a+3b = 2a+4b = 0 \\ \begin{pmatrix} 1+a+b \\ 1-a-3b \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -1-a-b+3-3a-9b = -4a-10b+2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2b = 0 \\ -2a-5b+1 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} a = -2b \\ 4b - 5b + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sono i punti di minima distanza}}$

$$\boxed{d(r,s) = d(P,Q) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = 8}$$

4) Il fascio di piani ortogonali ad r è $\pi_k : x - y = k$; ora imponiamo

$d(\pi_k, T) = \sqrt{2}$ con $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d(\pi_k, T) = \dfrac{|1-k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \iff |1-k| = 2$ $\quad$ $1-k = 2$ oppure $1-k=-2$ $\quad$ $k=-1$, $k = 3$

I piani richiesti sono

$$\boxed{\pi_{-1} : x - y = -1 \quad \text{e} \quad \pi_3 : x - y = 3}$$