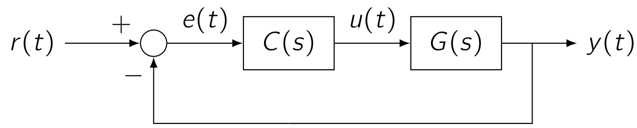
1 Root locus

Domanda 1

Si consideri lo schema a blocchi



in cui

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2(s-4)}.$$

1. Si dimostri che 2 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ sapendo che 2 é l'unico punto doppio del luogo (si determinino asintoti ed eventuali intersezioni dell'asse immaginario).
3. Si determini per quale valore di K il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente il modo e^{2t}. In corrispondenza a questo valore di K determinare i rimanenti modi del sistema in catena chiusa.
4. Si determini per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente solo modi non oscillatori.

Soluzione 1:

1. Mostriamo che, ancora in piu' generale,

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2+2s+c}{s^2(s-4)}.$$

e' tale per cui c deve anche essere 4.

In generale i punti doppi del luogo $a(s)+Kb(s)=0$ sono le soluzioni $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{C}$ di

$$\begin{cases} a(s)+Kb(s)=0 \\ \frac{da(s)}{ds}+K\frac{db(s)}{ds}=0. \end{cases}$$

a cui corrispondono soluzioni $K_1, K_2, \ldots$ reali. Quindi in questo caso generico, i.e., con c invece di 4, deve essere

$$\begin{cases} s^2(s-4)+K\left(s^2+2s+c\right)=0 \\ 2s(s-4)+s^2+K(2s+2)=0 \end{cases} \xrightarrow{s=2} \begin{array}{ll} -8+K(s+c)=0 & \Rightarrow c=4 \\ -4+6K=0 & \Rightarrow K=2/3 \end{array}$$

2. Altri punti doppi: esiste un lemma che dice che Un polinomio $f(s)$ ha uno zero di molteplicita' l in $\bar{s} \in \mathbb{C}$ se e solo se $f(\bar{s}) = f^{(1)}(\bar{s}) = \cdots = f^{(l-1)}(\bar{s}) = 0 \quad$ e $\quad f^{(l)}(\bar{s}) \neq 0$. Quindi

$$\begin{cases} s^2(s-4)+K\left(s^2+2s+4\right)=0 \\ (3s-8)s+K(2s+2)=0 \end{cases} \Rightarrow K = -\frac{s(3s-8)}{2s+2}$$

Quindi

$$s^{\cancel{2}}(s-4) - \frac{\cancel{s}(3s-8)}{2s+2}(s^2+2s+4)=0$$

$$\left(s^2-4s\right)(2s+2)-(3s-8)\left(s^2+2s+4\right)=0$$

$$\begin{array}{l} 2s^3+2s^2-8s^2-8s-3s^3-6s^2-12s+8s^2+16s+32=0 \\ -s^3-4s^2-4s+32=0 \\ s^3+4s^2+4s-32=0 \end{array}.$$

Divido quindi per $s-2$:

$$\frac{s^3+4s^2+4s-32}{s-2} = s^2+6s+16$$

I rimanenti punti doppi sono le radici di $s^2+6s+16$ che peró sono complesse. Quindi non corrispondono a punti doppi.

Asintoti: essendoci un polo in piu' di uno zero, c'è un solo asintoto, che quindi corrisponde anche all'asse reale.

Intersezioni con l'asse immaginario: questo corrisponde ad un s per cui

$$\mathrm{Re}[s^3+(K-4)s^2+2Ks+4K]=0.$$

Puo' essere importante determinare i punti nei quali il luogo attraversa l'asse immaginario e i corrispondenti valori di K. La tabella di Routh e' il metodo piu' semplice per ottenere questa informazione.

In effetti l'attraversamento dell'asse immaginario corrisponde a un K per il quale il numero di radici stabili cambia di numero e quindi a un K per il quale il numero di variazioni e permanenze cambia. Questo accade proprio quando una riga della tabella e' nulla.

In questo caso la tabella di Routh e'

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K \\ 2 & K-4 & 4K \\ 1 & \frac{2K(K-6)}{K-4} & \\ 0 & 4K & \end{array}$$

e notiamo che La riga 1 si annulla per $K=6$, e da questa possiamo considerare la riga 2 da il polinomio $(K-4)s^2+4K = 2s^2+24$ con quel valore specifico di K, che da' le radici cercate $s_{12} = \pm j\sqrt{12}$.

Angoli di uscita (non richiesti dall'esercizio, ma per chi volesse calcolare anche questi):

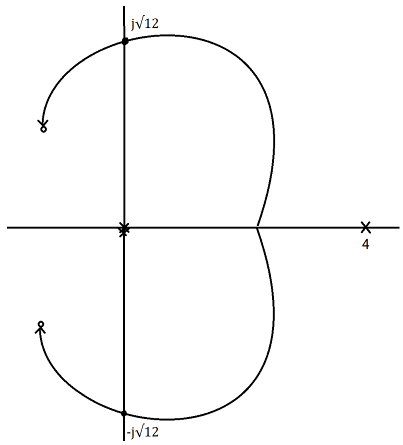
Le radici di s^2+2s+4 sono $z_{12} = -1 \pm j\sqrt{3}$

Gli angoli di entrata/uscita sono:

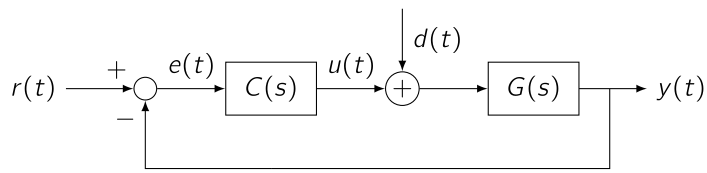
$$\angle(s-z_1)+\angle(z_1-z_2)-\angle(z_1-\bar{z}_1)-\angle(z_1-\bar{z}_2)-\angle(z_1-\bar{z}_3)=\pi$$

dove $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0 \quad$ e $\bar{z}_3 = 4$

Soluzione 2:



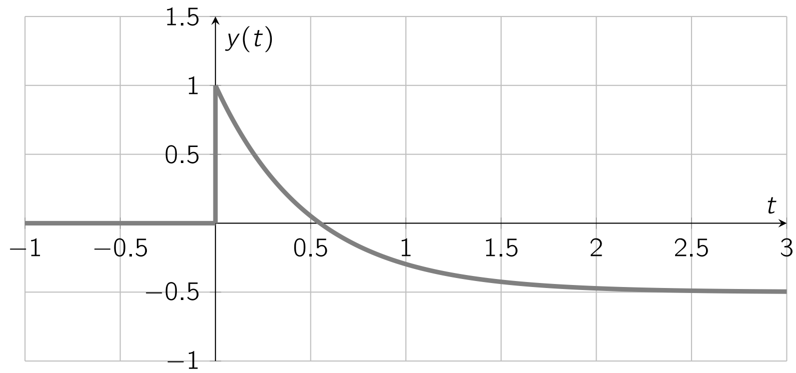
Domanda 2



Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, dove

$$C(s) = \frac{K}{s^2}, \quad G(s) = \frac{s+a}{s+2}.$$

Supponiamo che per $K = 0$ la risposta $y(t)$ ad un disturbo pari al gradino unitario (i.e., $d(t) = 1$ per $t \geq 0$, 0 altrimenti) sia come quella illustrata in figura sotto.



1. Determinare la costante a;
2. determinare il luogo dei poli in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino asintoti, punti doppi, ed eventuali intersezioni con l'asse immaginario;
3. determinare il valore di K per il quale la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}.

Soluzione 1:

1. Dalla figura si deduce che il valore a regime di $y(t)$ é $-\frac{1}{2}$. Questo valore deve inoltre coincidere con $G(0)$, il guadagno a regime, che e' $\frac{a}{2}$. Da ció consegue che $a = -1$.

2. La funzione di trasferimento in catena chiusa é

$$T(s) = \frac{K(s-1)}{s^2(s+2) + K(s-1)}$$

che implica che bisogna determinare il luogo definito dal polinomio

$$s^2(s+2) + K(s-1) = 0.$$

Significa che ci sono 2 asintoti con centro individuabile attraverso

$$\sigma_a = \frac{\sum P_i - \sum z_i}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Per calcolare i punti doppi del luogo serve che si annullino i due polinomi

$$\begin{cases} s^2(s+2) + K(s-1) = 0 \\ 2s(s+2) + s^2 + K = 0 \end{cases}$$

Il sistema sopra implica dunque, da un punto di vista algebrico,

$$\begin{array}{l} K = -s(3s+4) \\ s^2(s+2) - s(3s+4)(s-1) = 0 \\ s^2 + 2s - 3s^2 + 3s - 4s + 4 = 0 \\ 2s^2 - s - 4 = 0 \end{array}$$

e quindi

$$s_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

per il valore di K corrispondente.

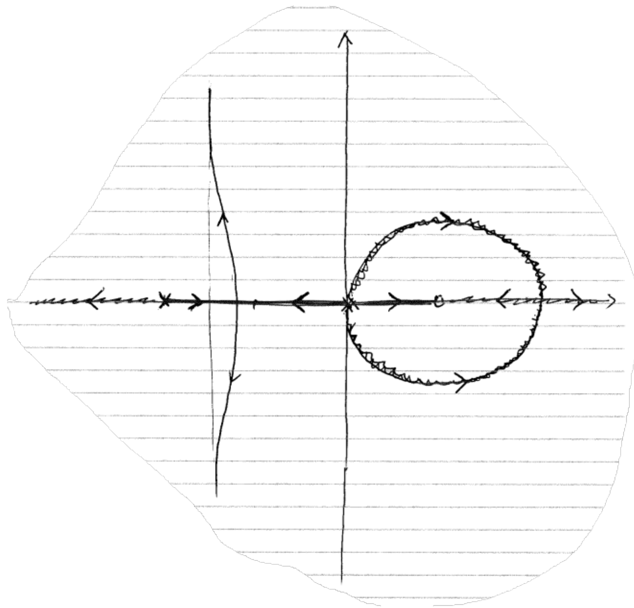
Per trovare infine le intersezioni del luogo con l'asse immaginario conviene calcolare la tabella di Routh di s^3+2s^2+Ks-K, che corrisponde a

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K \\ 2 & 2 & -K \\ 1 & \frac{3}{2}K & \\ 0 & -K & \end{array}$$

Notiamo che per $K > 0$ otteniamo una variazione di segno, e quindi instabilita'; questo succede anche per $K < 0$ (due variazioni). Siccome la riga si annulla per $K = 0$, non si ha nessuna intersezione con l'asse immaginario quando consideriamo $K < 0$ oppure $K > 0$. Quindi il luogo risulta come in figura sotto.

3. Perché la risposta impulsiva contenga il modo e^{-t} é necessario che s = -1 sia polo di $T(s)$ e quindi che $s = -1$ sia radice di $s^2(s+2) + K(s-1)$. Ció equivale a porre $(-1)^2(-1+2) + K(-1-1) = 0$, che implica $K = \frac{1}{2}$.

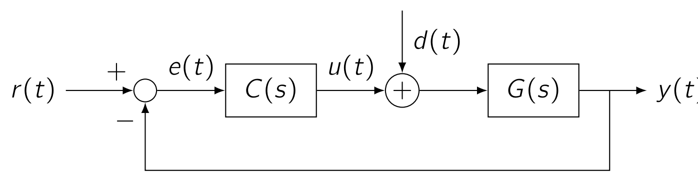
Soluzione 2:



Domanda 3

Si consideri lo schema a blocchi a fianco, con

$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}.$$



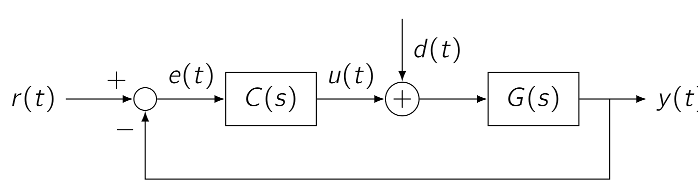
1. Si verifichi che -1 e' un punto doppio del luogo.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario).
3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette modi puramente oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti). In corrispondenza a tale valore di K determinare i rimanenti modi del sistema.
4. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

Soluzione 1:

Domanda 4

Si consideri lo schema a blocchi a fianco, con

$$C(s) = K\frac{s+1}{s}, \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+3)}.$$



1. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
2. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-2t}.

Determinare tutti i modi corrispondenti a tale valore di K.

Soluzione 1:

Es. 3

1) $W_{zy}(s) = \dfrac{k(s+1)}{s^2(s+3)+k(s+1)}$

Punti doppi

$$\begin{cases} s^2(s+3)+k(s+1)=0 \\ 2s(s+3)+s^2+k=0 \end{cases} \qquad k=-s(2s+6+s)=-s(3s+6)$$

$$s^2(s+3)-s(3s+6)(s+1)=0 \Rightarrow s^3+3s^2-3s^3-6s^2-3s^2-6s=0$$

$$-2s^2-4s-6=0 \Rightarrow s^2+2s+3=0 \qquad s_{12}=-1\pm\sqrt{1-3} \text{ non reali}$$

$\Downarrow$

non sono punti doppi

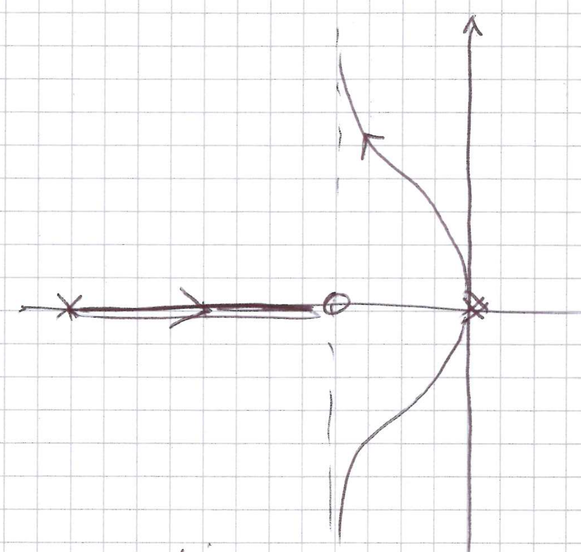
Asintoti

$$\sigma=\frac{\sum P_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{0+0-3-(-1)}{2}=-1$$

Intersezione asse immaginario

3	1	k
2	3	k
1	$\frac{2k}{3}$	
0	k	

Stabile $\forall k>0$



2) Il modo e^{-2t} corrisponde alla presenza di un polo in -2 e quindi $s^2(s+3)+k(s+1)\big|_{s=-2}=0$

$$\Rightarrow 4(-2+3)+k(-2+1)=0 \qquad \boxed{k=4}$$

Per trovare gli altri modi devo trovare le altre due radici del polinomio $s^2(s+3)+k(s+1)$ per $k=4$ $=s^3+3s^2+4s+4$

$$\begin{array}{r|l} s^3+3s^2+4s+4 & s+2 \\ \cline{2-2} s^3+2s^2 \quad\quad\;\; & s^2+s+2 \\ \cline{1-1} s^2+4s+4 & \\ s^2+2s \quad & \\ \cline{1-1} 2s+4 & \\ 2s+4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$s^2+s+2 \rightarrow s_{12}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

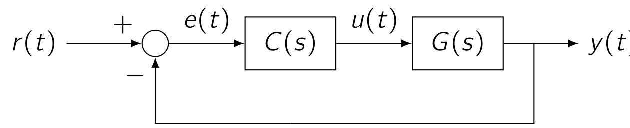
Quindi gli altri modi sono

$$e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \quad e \quad e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

Domanda 5

Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, e si supponga

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad G(s) = \frac{s+3}{s}.$$



1. calcolare quanti e quali sono i punti doppi del luogo dei poli in catena chiusa, e per ognuno di questi punti doppi trovare gli eventualmente rimanenti punti del luogo.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare per quali valori di K > 0 il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente solo modi non oscillatori.
4. Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente il modo e^{-4t}. Trovare tutti i modi in corrispondenza di tale valore di K.

Soluzione 1:

per quanto riguarda i punti doppi consideriamo innanzitutto che il denominatore della funzione di trasferimento in catena chiusa é dato da $s^2 + K(s+3)$.
Questo implica che il sistema che determina quali siano i punti doppi del luogo é

$$\begin{cases} s^2 + Ks + 3K = 0 \\ 2s + K = 0 \end{cases}$$

e dalla seconda equazione si ottiene $K = -2s$, che sostituita nella prima dá $s^2 - 2s^2 - 6s = 0$.
Le soluzioni sono dunque $s = 0$ e $s = -6$, che ritornano $K = 0$ (non accettabile per il luogo positivo) e $K = 12$.

Soluzione 2:

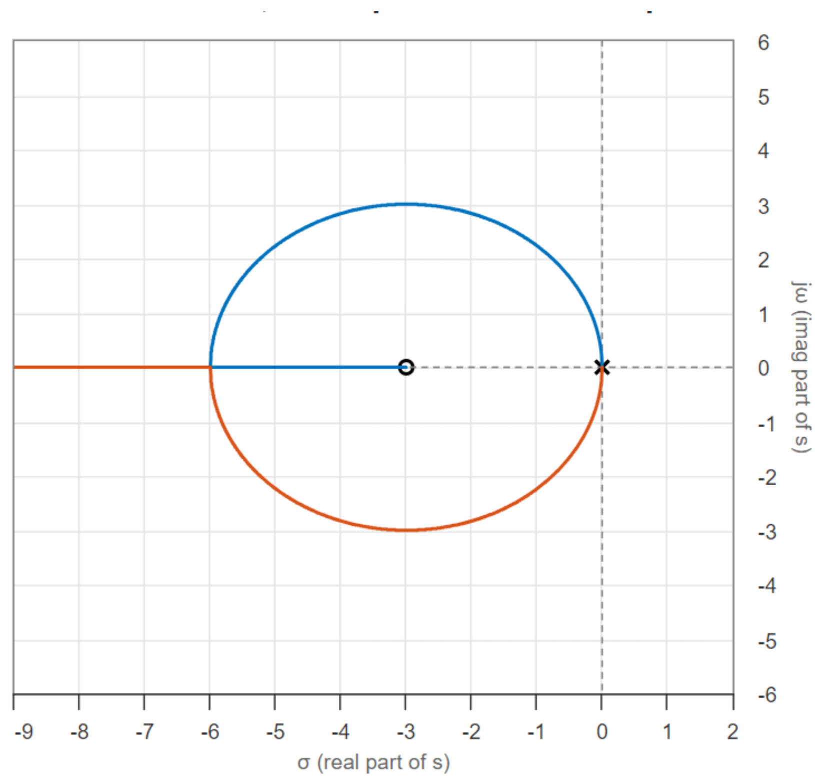
Prima di disegnare il luogo determiniamone gli asintoti. Essendoci 2 poli ed uno zero, essi formano una stella a 1 punta. Non serve calcolare il suo centro, che in generale é in

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

perche' in questo caso la stella coincide con l'asse negativo reale.
Per quanto riguarda le intersezioni con gli assi, in questo caso si ottiene una tabella di Routh pari a

$$\begin{matrix} 1 & 3K \\ K & 0 \\ 3K & 0 \end{matrix}$$

che ha righe che si annullano solo per $K = 0$ (un caso per cui c'e' un punto doppio, come trovato prima).
Sostituendo sulla prima riga $K = 0$ viene fuori che l'unica intersezione e' per $s = 0$, e quindi non ci sono intersezioni con l'asse immaginario per $K > 0$.
Mettendo insieme i vari elementi, is ottiene il seguente disegno (che in realtá é stato ottenuto con `https://lpsa.swarthmore.edu/Root\_Locus/RLDraw.html`):



Si noti che essendo i rami appartengono sempre al semiasse negativo, il sistema sará sempre BIBO stabile per ogni $K > 0$.

Soluzione 3:

La richiesta di avere modi non oscillatori significa avere una risposta impulsiva del sistema in catena chiusa che e' composta solo da esponenziali puri, i.e.,

$$h_{ry}(t) = \alpha_1 e^{\sigma_1 t} + \alpha_2 e^{\sigma_2 t} \qquad \text{per } t \geq 0$$

(si noti che ci sono due modi soli, perche' si hanno due poli). Guardando il luogo delle radici questo richiede avere un K piú grande di quello che individua il punto doppio. Quindi la risposta a questo punto e' $K > 12$.

Soluzione 4:

La richiesta di avere un modo specifico significa avere una risposta impulsiva del sistema in catena chiusa che contiene quel modo, i.e., in questo caso,

$$h_{ry}(t) = \alpha_1 e^{-4t} + \alpha_2 e^{\sigma_2 t} \qquad \text{per } t \geq 0.$$

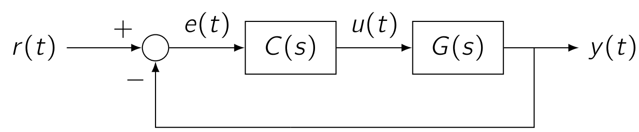
Questo implica che -4 e' radice del polinomio caratteristico del sistema per un opportuno $\overline{K}$ (che, dato il punto precedente, deve essere per forza piu' grande di 12). In altre parole, deve essere che

$$(-4)^2 + \overline{K}(-4+3) = 0$$

che da' la soluzione $\overline{K} = 16$.

Domanda 6

Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, e si supponga



$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s^2+2s+4}{s(s-4)}.$$

1. Verificare che $s = 2$ e' un punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa, e trovare i rimanenti punti doppi del luogo.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare per quale valore di K il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente il modo e^{2t}. In corrispondenza di questo valore di K, determinare i rimanenti modi del sistema in catena chiusa.
4. Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa e' BIBO stabile.
5. Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente solo modi **non** oscillatori.
6. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene dei modi puramente oscillatori. Determinare tutti i modi corrispondenti a tali valori di K.

Soluzione 1:

ES. 3

1) poli del sistema in catena chiusa sono le radici di

$s^2(s-4)+k(s^2+2s+4)$

I punti doppi di tale luogo soddisfano

$$\begin{cases} s^2(s-4)+k(s^2+2s+4)=0 \\ 2s(s-4)+s^2+k(2s+2)=0 \end{cases} \xrightarrow{s=2} \begin{cases} 4(2-4)+k(4+4+4)=0 \\ 4(2-4)+4+k(4+2)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8+12k=0 \\ -4+6k=0 \end{cases}$$

Per $k=2/3$ entrambe le equazioni sono soddisfatte

2) Rimanenti punti doppi?

Dalla seconda equazione dei punti doppi ricavo

$k=-\frac{s(3s-8)}{2s+2}$ che sostituito nella prima do

$$s^{\cancel{2}}(s-4)-\frac{\cancel{s}(3s-8)}{2s+2}(s^2+2s+4)=0$$

$$(s^2-4s)(2s+2)-(3s-8)(s^2+2s+4)=0$$

$$2s^3+2s^2-8s^2-8s-[3s^3+6s^2+12s-8s^2-16s-32]=0$$

$$-s^3-4s^2-4s+32=0$$

$$\begin{array}{l|l} s^3+4s^2+4s-32 & s-2 \\ \hline s^3-2s^2 & s^2+6s+16 \\ \hline 6s^2+4s-32 & \\ 6s^2-12s & \\ \hline 16s-32 & \\ 16s-32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Gli eventuali rimanenti punti doppi sono le radici di $s^2+6s+12$ che non sono reali perché il discriminante è negativo

Quindi non ci sono altri punti doppi.

Intersezioni asse immaginario?

Tabella di Routh di

$$s^2(s-4)+k(s^2+2s+4)=s^3+(k-4)s^2+2ks+4k$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2k \\ 2 & k-4 & 4k \\ 1 & \frac{2k(k-4)-4k}{k-4}=\frac{2k(k-6)}{k-4} & \\ 0 & 4k & \end{array}$$

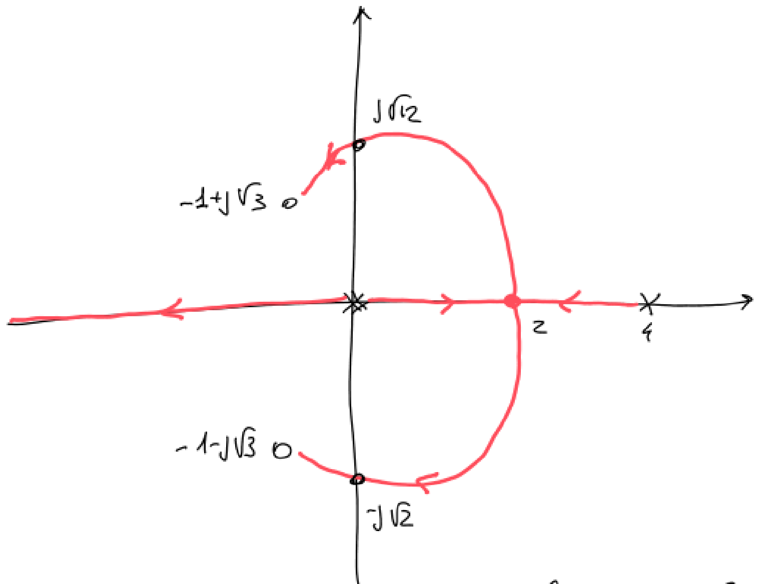
Abbiamo intersezione asse immaginario per

$K=6$ che sono le radici di $(k-4)s^2+4k=(k=6)=2s^2-24$

Soluzione 2:

che sono $s_{1,2} = \pm j\sqrt{12}$.

Osservo che le radici di s^2+2s+4 sono $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$



3) Il modo e^{2t} corrisponde alla presenza della radice $s=2$ nel luogo che appare per $k = 2/3$

$$s^2(s-4)+k(s^2+2s+4) = \left(k=\tfrac{2}{3}\right) = s^3-4s^2+\tfrac{2}{3}s^2+\tfrac{4}{3}s+\tfrac{8}{3}$$

$$= s^3-\tfrac{10}{3}s^2+\tfrac{4}{3}s+8/3$$

Questo è divisibile per $(s-2)^2$

Quindi i modi sono

$e^{2t}, te^{2t}, e^{-\frac{2}{3}t}$

$$\begin{array}{r|l} s^3-\frac{10}{3}s^2+\frac{4}{3}s+\frac{8}{3} & s^2-4s+4 \\ \cline{2-2} s^3-4s^2+4s & s+\frac{2}{3} \\ \cline{1-1} \frac{2}{3}s^2-\frac{8}{3}s+\frac{8}{3} & \\ \frac{2}{3}s^2-\frac{8}{3}s+\frac{8}{3} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

4) Modi non oscillatori per $0<k<\frac{2}{3}$

BIBO stabile per $k>6$

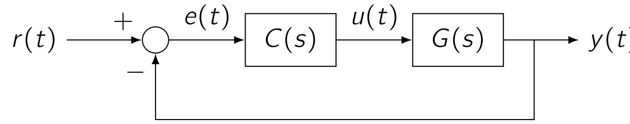
5) Modi puramente oscillatori per $k=6$

in tal caso i modi sono $\sin(\sqrt{12}\,t)$ e e^{-2t}

Domanda 7

Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, e si supponga

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad G(s) = \frac{s+3}{s}.$$



1. calcolare quanti e quali sono i punti doppi del luogo dei poli in catena chiusa, e per ognuno di questi punti doppi trovare gli eventualmente rimanenti punti del luogo.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare per quali valori di K > 0 il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente solo modi non oscillatori.
4. Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente il modo e^{-4t}. Trovare tutti i modi in corrispondenza di tale valore di K.

Soluzione 1:

1. per quanto riguarda i punti doppi consideriamo innanzitutto che il denominatore della funzione di trasferimento in catena chiusa é dato da $s^2 + K(s + 3)$.

   Questo implica che il sistema che determina quali siano i punti doppi del luogo é

   $$\begin{cases} s^2 + Ks + 3K = 0 \\ 2s + K = 0 \end{cases}$$

   e dalla seconda equazione si ottiene $K = -2s$, che sostituita nella prima dá $s^2 - 2s^2 - 6s = 0$.

   Le soluzioni sono dunque $s = 0$ e $s = -6$, che ritornano $K = 0$ (non accettabile per il luogo positivo) e $K = 12$.

2. prima di disegnare il luogo determiniamone gli asintoti. Essendoci 2 poli ed uno zero, essi formano una stella a 1 punta. Non serve calcolare il suo centro, che in generale é in

   $$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

   perche' in questo caso la stella coincide con l'asse negativo reale.

   Per quanto riguarda le intersezioni con gli assi, in questo caso si ottiene una tabella di Routh pari a

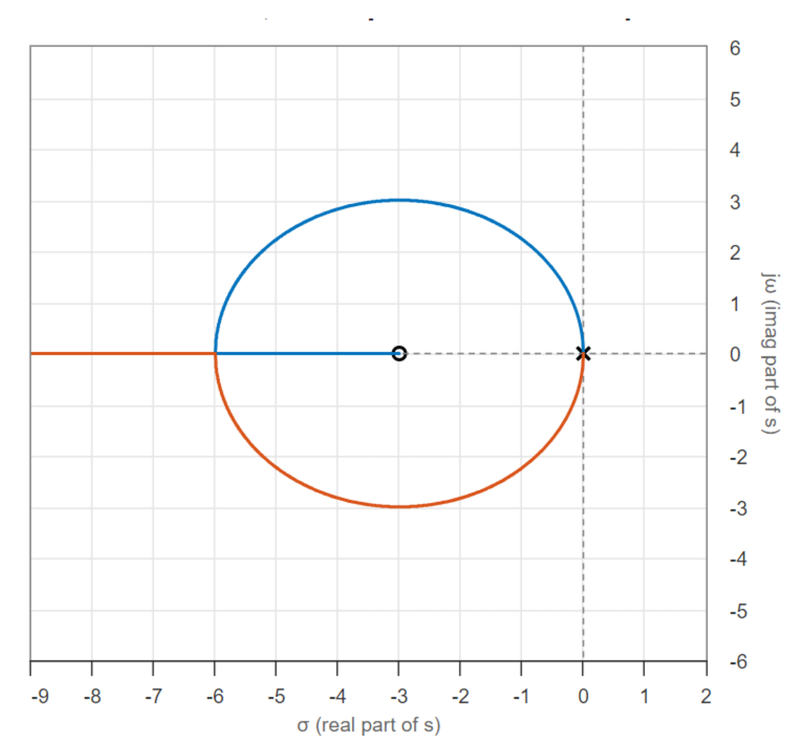
   $$\begin{array}{cc} 1 & 3K \\ K & 0 \\ 3K & 0 \end{array}$$

   che ha righe che si annullano solo per $K = 0$ (un caso per cui c'e' un punto doppio, come trovato prima).

   Sostituendo sulla prima riga $K = 0$ viene fuori che l'unica intersezione e' per $s = 0$, e quindi non ci sono intersezioni con l'asse immaginario per $K > 0$.

   Mettendo insieme i vari elementi, is ottiene il disegno sotto (che in realtá é stato ottenuto con `https://lpsa.swarthmore.edu/Root\_Locus/RLDraw.html`).

3. essendo i rami appartengono sempre al semiasse negativo, il sistema sará sempre BIBO stabile per ogni $K > 0$.



Domanda 8

(Opzionale) Si tracci il luogo delle radici associato a

$$s^4 + K(s+3)$$

e si discutano le differenze e similitudini tra questa situazione e quella nell'esercizio 3.

Soluzione 1:

1. per quanto riguarda i punti doppi del luogo consideriamo innanzitutto che il denominatore della funzione di trasferimento in catena chiusa é dato da $s^4 + K(s+3)$.

   Questo implica che il sistema che determina quali siano i punti doppi del luogo é

   $$\begin{cases} s^4 + K(s+3) = 0 \\ 4s^3 + K = 0 \end{cases}$$

   e dalla seconda equazione si ottiene $K = -4s^3$, che sostituita nella prima dá $s^4 - 4s^3(s+3) = 0$.

   Le soluzioni sono dunque $s = 0$ e $s = -4$, che ritornano $K = 0$ (non accettabile per il luogo positivo) e $K = -4^4$.

2. prima di disegnare il luogo determiniamone gli asintoti. Essendoci 4 poli ed uno zero, essi formano una stella a 3 punte. Il suo centro é in

   $$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{3}{3} = 1$$

   ed é ovviamente tale per cui uno dei rami coincide con l'asse negativo reale.

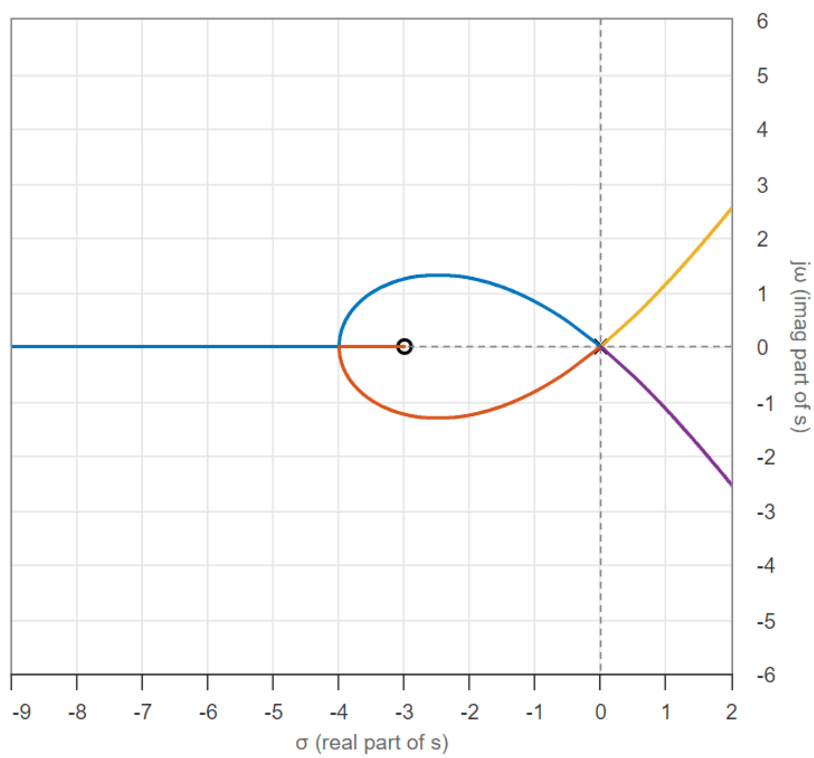
   Per quanto riguarda le intersezioni con gli assi, in questo caso si ottiene una tabella di Routh interessante, i.e.,

   $$\begin{matrix} 1 & 0 & K \\ 0 & K & \end{matrix}$$

   che non si puó propagare a causa dello zero come primo elemento della seconda riga, e che si annulla per $K = 0$ (un caso per cui c'e' un punto doppio, come detto prima).

   Non ci sono dunque intersezioni con l'asse immaginario per $K > 0$.

   Mettendo insieme i vari elementi, is ottiene il seguente disegno (che in realtá é stato ottenuto con `https://lpsa.swarthmore.edu/Root\_Locus/RLDraw.html`):

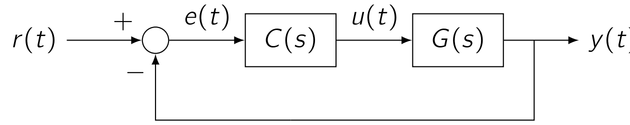
   

3. essendo che due rami appartengono sempre al semiasse positivo, il sistema non sará BIBO stabile per nessun $K > 0$.

Domanda 9

Si consideri lo schema a blocchi della figura a fianco, in cui

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}.$$



1. Trovare i punti doppi del luogo del luogo.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente solo modi non oscillatori.
4. Determinare per quale valore di K il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente il modo e^{-3t}. In corrispondenza di questo valore di K, determinare i rimanenti modi del sistema in catena chiusa.

Soluzione 1:

1) $\begin{cases} s(s+2)^2+k(s+4)=0 \\ (s+2)^2+2s(s+2)+k=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} s(s+2)^3 - (s+2)(3s+2)(s+4)=0 \\ k=-(s+2)(3s+2) \end{cases}$

$(s+2)[s^2+\cancel{2s}-3s^2-12s-\cancel{2s}-8]=0$

$(s+2)[-2s^2-12s-8]=0 \qquad s_1=-2 \quad k_1=0$

$(s+2)(s^2+6s+4)=0 \qquad s_{2,3}=-3\pm\sqrt{9-4}=-3\pm\sqrt{5} \begin{cases} -0.76 & k_2=0, \\ -5.23 \end{cases}$

2) Asintoti: angoli $\pm\frac{\pi}{2}$

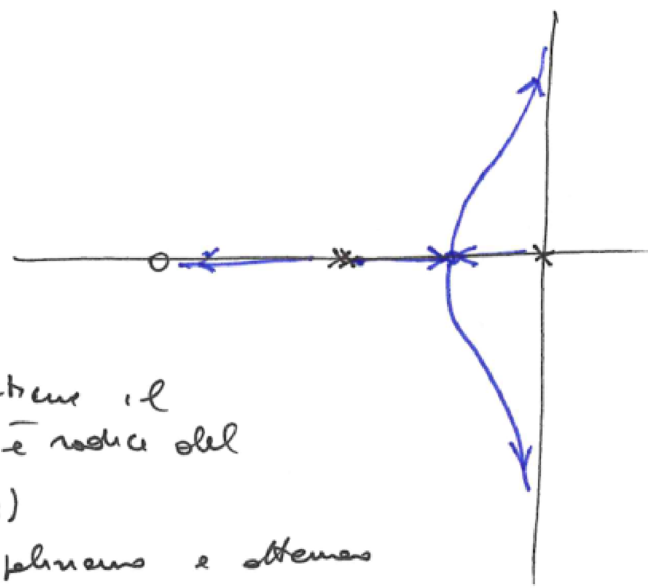
Centro $\sigma=\frac{-2-2-(-4)}{2}=0$

Stabilità è intersezione asse immaginario

$s(s+2)^2+k(s+4)=s^3+4s^2+(k+4)s+4k$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k+4 \\ 2 & 4 & 4k \\ 1 & \frac{4k+16-4k}{4} & \\ 0 & 4k & \end{array}$$

Stabile per $k>0$



3) $0<k<0,36$

4) La risposta impulsiva contiene il modo e^{-3t} se $s=-3$ è radice del polinomio $s(s+2)^2+k(s+4)$

Sostituiamo $s=-3$ nel polinomio e otteniamo

$-3(-3+2)^2+k(-3+4)=0 \rightarrow -3+k=0 \rightarrow k=3$

Il polinomio diventa

$s(s+2)^2+3(s+4)=s^3+4s^2+7s+12$

dividiamo per $s+3$

Le radici di s^2+s+3 sono $-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$

I rimanenti modi sono

$e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$

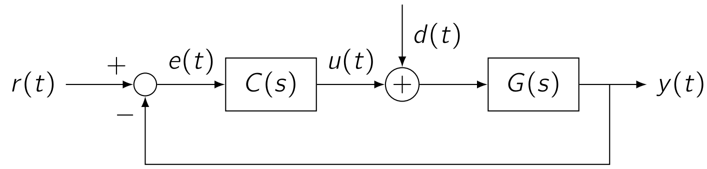
$$\begin{array}{l|l} s^3+4s^2+7s+12 & s+3 \\ \hline s^3+3s^2 & s^2+s+3 \\ \quad s^2+7s+12 & \\ \quad s^2+3s & \\ \qquad 4s+12 & \\ \qquad 4s+12 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Domanda 10

Si consideri lo schema a blocchi in figura a fianco, dove

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + a}$$

e dove a e K sono due parametri reali.



1. Si determini a in modo che -1 sia punto doppio del luogo.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$.
3. Si determini il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il modi puramente oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti).
4. In corrispondenza di tale valore di K, si determinino i rimanenti modi del sistema.

Soluzione 1:

1. per essere un punto doppio, una radice deve annullare non solo il polinomio caratteristico ma anche la sua derivata prima. Considerando quindi che questo polinomio e' $s(s^2+4s+a)+K=0$, questa condizione corrisponde a dire che $s=-1$ risolve il sistema

$$\begin{cases} s(s^2+4s+a)+K=0 \\ 3s^2+8s+a=0 \end{cases}$$

   Quindi imponendo $s=-1$ implica $3(-1)^2+8(-1)+a=0$, che implica a sua volta $a=5$.

   Si noti che una volta settato a si possono usare le stesse equazioni per trovare anche un altro punto doppio. Infatti con quel valore di a segue che la seconda riga e' $3s^2+8s+5=0$, un polinomio le cui soluzioni sono

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-15}}{3} = \begin{cases} -\frac{5}{3} \\ -1 \end{cases} \quad .$$

   Questa informazione e' utile per disegnare correttamente il luogo delle radici.

2. il punto richiede di trovare il luogo del polinomio $s(s^2+4s+5)+K=0$, in cui ci sono 3 poli $(0,-2\pm j)$ e nessuno zero.

   Gli asintoti partono dal centro

$$\sigma_a = \frac{0-2\cancel{+j}-2\cancel{-j}}{3} = -\frac{4}{3}.$$

   Gli angoli di uscita dai poli $-2+j$ sono invece dati da

$$-\beta - \angle(s-(-2-j)) - \angle(s-0) = \pi$$

   quindi deve essere

$$-\beta - \angle(2j) - \angle(-2+j) = \pi$$

   e cioe'

$$\begin{aligned} \beta &= -\pi - \frac{\pi}{2} - \angle(-2+j) \\ &= -\pi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \arctan 2\right) \\ &= -2\pi - \arctan 2 = -\arctan 2 \end{aligned} \tag{1}$$

   Le intersezioni con l'asse immaginario sono date dai K tali per cui il polinomio s^3+4s^2+5s+K passa dall'essere stabile ad instabile.

   Per calcolare i K per cui questo accade si usa il criterio di Routh, e quindi scrive la tabella

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & K \\ 1 & \frac{20-K}{4} & \\ 0 & K & \end{array} \tag{2}$$

   che mostra come ci sia stabilita' per $0<K<20$. Per $K=20$ troviamo che il polinomio $4s^2+20$ e' divisore del polinomio originale.

   Innanzitutto il divisore ha radici $\pm j\sqrt{5}$. Per trovare le radici rimanenti effettuiamo la divisione tra polinomi, i.e., calcoliamo

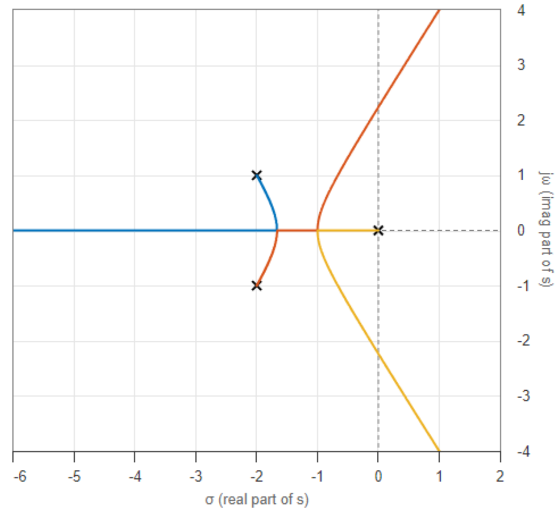
$$\begin{array}{l|l} s^3+4s^2+5s+20 & s^2+5 \\ \cline{2-2} s^3+5s & s+4 \\ \hline 4s^2+20 & \\ 4s^2+20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

   e troviamo che l'ultima radice e' -4.

3. Abbiamo modi puramente oscillatori se abbiamo poli puramente immaginari. Questo avviene per $K=20$.

4. Dati i conti precedenti, le radici sono $\pm j\sqrt{5}, -4$ e quindi i modi sono $\cos(\sqrt{5}t), \sin(\sqrt{5}t), e^{-4t}$.

Soluzione 2:

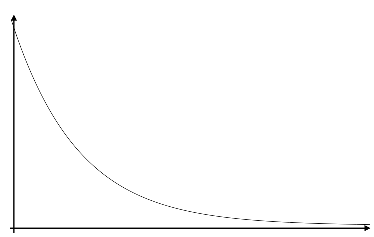


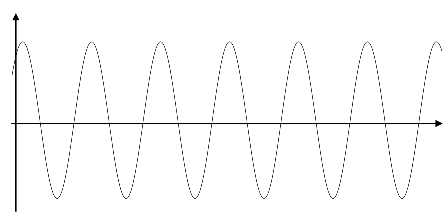
Domanda 11

Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+8s+25)}$$

1. Si trovino i punti doppi.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa ha tutti i modi con andamento simile a quello illustrato nella figura sotto a sinistra.
4. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene dei modi con andamento simile a quello illustrato nella figura sotto a destra.





Soluzione 1:

$\boxed{\text{ES. 3}}$

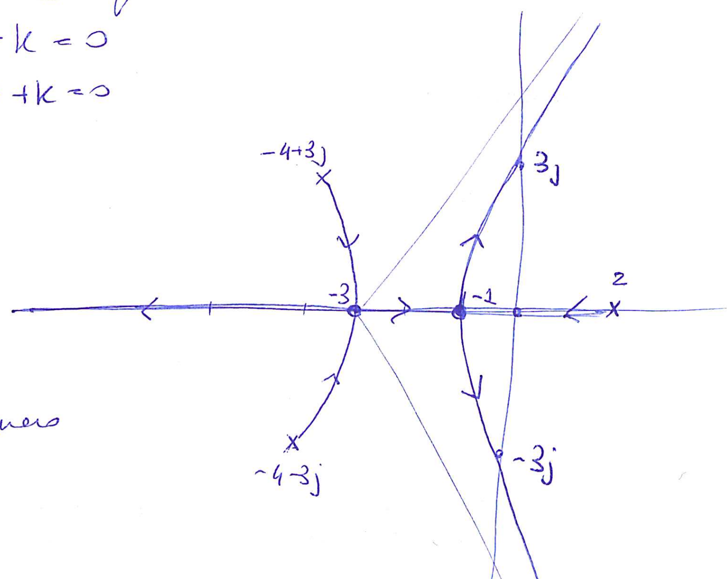
1) poli coincidono con gli zeri di

$$(s-2)(s^2+8s+25)+k=0$$

$$s^3+6s^2+9s-50+k=0$$

radici di $s^2+8s+25$

$$s_{12}=-4\pm\sqrt{16-25}=-4\pm j3$$



<u>Asintoti</u>

$$\sigma_e=\frac{-4+\cancel{3j}-4-\cancel{3j}+2}{3}=-3$$

Intersezione asse immaginario

3	1	9
2	6	$k-50$
1	$\frac{104-k}{6}$	
0	$k-50$	

Per $k=104$

$6s^2+k-50=0 \qquad k=104$

$6s^2+54=0 \iff s^2+9=0 \qquad s_{12}=\pm 3j$

2) $k=104$

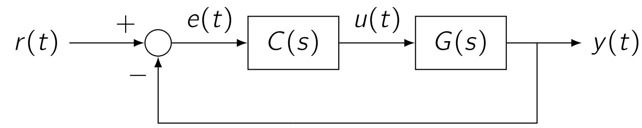
$$s^3+6s^2+9s-50+k=s^3+6s^2+9s+54$$

$$\begin{array}{rr|l} s^3+6s^2+9s+54 & & s^2+9 \\ \hline s^3+9s & & s+6 \\ \hline 6s^2+54 & & \\ 6s^2+54 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$\cos 3t$, $\sin 3t$, e^{-6t}

Domanda 12

Si consideri lo schema a blocchi della figura a fianco, in cui



$$C(s) = K\frac{1}{s+2} \qquad G(s) = \frac{s^2+6s+c}{s^2-4}.$$

1. Determinare c sapendo che $s = 0$ e' un punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali punti doppi, asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare, se esistono, i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene il modo t. Determinare tutti gli altri modi corrispondenti a tale valore di K.

Soluzione 1:

$\boxed{ES.3}$

I poli in catena chiusa coincidono con le radici del polinomio

$$(s+2)(s^2-4)+k(s^2+6s+c) = (s+2)^2(s-2)+k(s^2+6s+c)$$

1) Punti doppi

$$\begin{cases}(s+2)^2(s-2)+k(s^2+6s+c)=0 \\ 2(s+2)(s-2)+(s+2)^2+k(2s+6)=0\end{cases} \xrightarrow{s=0} \begin{cases}-8+kc=0 \\ -8+4+6k=0\end{cases} \qquad c=\frac{8}{k}=8\,\frac{3}{2}=12 \qquad k=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad \boxed{c=12}$$

2) Altri punti doppi

$$\begin{cases}(s+2)^2(s-2)+k(s^2+6s+12)=0 \\ (s+2)(2s-4+s+2)+k(2s+6)=0\end{cases} \qquad k=-\frac{(s+2)(3s-2)}{2s+6}$$

$$(s+2)^2(s-2)-\frac{(s+2)(3s-2)}{2s+6}(s^2+6s+12)=0$$

$$(s+2)\left[(s^2-4)(2s+6)-(3s-2)(s^2+6s+12)\right]=0$$

$$(s+2)\left[2s^3+6s^2-8s-\cancel{24}-3s^3-16s^2-24s+\cancel{24}\right]=0$$

$$(s+2)s(-s^2-10s-32)=-(s+2)s(s^2+10s+32)$$

$$\hookrightarrow s_{1,2}=-5\pm\sqrt{25-32} \quad \text{non reale} \;\to\; \text{non punti doppi}$$

Intersezioni asse immaginario

tabella di Routh

$$(s+2)(s^2-4)+k(s^2+6s+12)=s^3+2s^2-4s-8+k(s^2+6s+12)$$

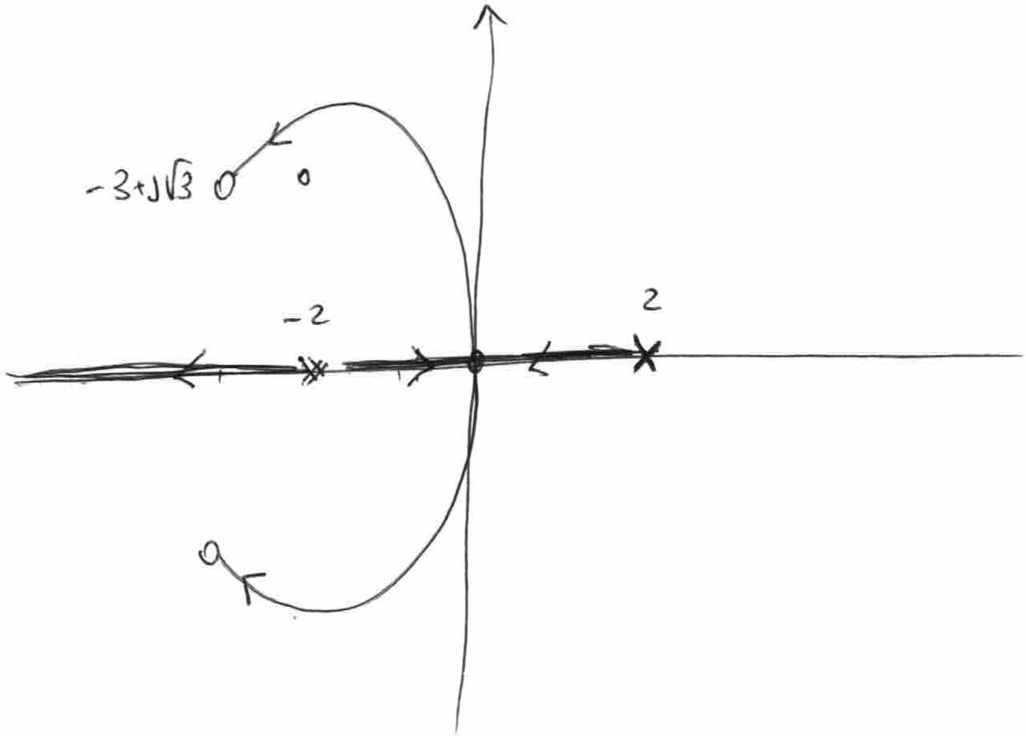
$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 6k-4 \\
2 & k+2 & 12k-8 \\
1 & \frac{(k+2)(6k-4)-12k+8}{k+2} = \frac{6k^2+\cancel{12k}-4k\cancel{-8}\cancel{-12k}\cancel{+8}}{k+2} = \frac{6k^2-4k}{k+2} = \frac{k(6k-4)}{k+2} & \\
0 & 12k-2 &
\end{array}$$

Riga si annulla per $k=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \to$ punto doppio

radici di $s^2+6s+12$

$$s_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-12}=-3\pm j\sqrt{3}$$

Soluzione 2:



3) Il modo t si ha solo se $s=0$ è polo doppio e questo avviene per $K=\frac{2}{3}$. In tal caso il polinomio diventa

$$(s+2)(s^2-4)+K(s^2+6s+12)\Big|_{K=\frac{2}{3}} = s^3+2s^2-4s-8+\frac{2}{3}(s^2+6s+12)$$

$$= s^3+2s^2\cancel{-4s}\cancel{-8}+\frac{2}{3}s^2\cancel{+4s}\cancel{+8} = s^3+\frac{8}{3}s^2 = s^2\left(s+\frac{8}{3}\right)$$

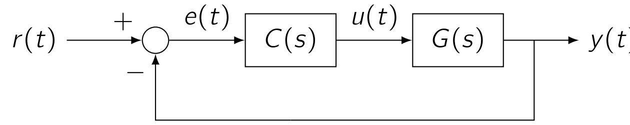
Quindi il rimanente polo è $s=-8/3$. Quindi i modi sono

$$1,\ t,\ e^{-8/3\,t}$$

Domanda 13

Si consideri lo schema a blocchi della figura a fianco, in cui

$$C(s) = \frac{K}{s+2} \qquad G(s) = \frac{s+c}{s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{2}{9}}.$$



1. Determinare c sapendo che $G(s)$ é tale per cui la sua risposta forzata ad un gradino di altezza 2 tende asintoticamente al valore -9.
2. Si disegni il luogo delle radici in catena chiusa per $K > 0$, determinando eventualmente punti doppi, asintoti, ed intersezioni con l'asse immaginario.
3. Si trovino i valori di K positivi per cui il sistema ad anello chiuso e' stabile.
4. Si trovino i valori di K positivi per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso non hanno componenti oscillatorie.

Soluzione 1:

Se la risposta al gradino di altezza due di $G(s)$ converge a -9, significa che la risposta al gradino di altezza uno di $G(s)$ converge a -4.5. Questo significa che il guadagno di $G(s)$ e' -4.5, i.e., $G(0) = -4.5$. Notare che questa cosa e' possibile solo se il sistema e' BIBO stabile, cosa in questo caso garantita dal fatto che per la regola di Cartesio abbiamo due radici con parte reale strettamente negativa.
Quindi la soluzione e'

$$G(0) = \frac{c}{2/9} = -4.5 \qquad \Longrightarrow \qquad c = -1.$$

Soluzione 2:

Per trovare il luogo delle radici consideriamo il denominatore di

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

e quindi

$$p(s, K) = (s + 2)(s^2 + 1/3s + 2/9) + K(s - 1)$$

Quindi il luogo parte da tre poli, in $s = -2$, $-\frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{7}}{6}$, ed arriva con un ramo nello zero in $s = 1$, mentre altri due rami divergono con due asintoti verticali.
Per trovare i punti doppi bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} p(s, K) & = 0 \\ \dfrac{\partial p(s, K)}{\partial s} & = 0 \end{cases}$$

che in valori numerici diventa

$$\begin{cases} s^3 + 7/3s^2 + (8/9 + K)s + 4/9 - K & = 0 \\ 3s^2 + 14/3s + 8/9 + K & = 0 \end{cases}$$

Per trovare le soluzioni quindi sostituiamo $-K$ dall'ultima equazione nella prima, trovando

$$\begin{cases} s^3 + 7/3s^2 + (8/9 + K)s + 4/9 - K & = 0 \\ 3s^2 + 14/3s + 8/9 = -K \end{cases}$$

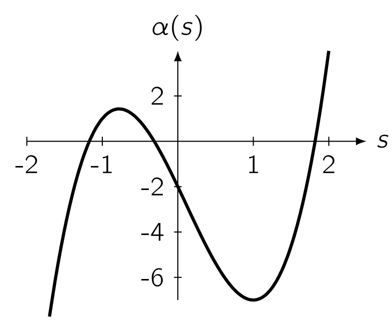
che da' il polinomio

$$-\frac{2}{3}\left(3s^3 - s^2 - 7s - 2\right) = -\frac{2}{3}\alpha(s).$$

Le radici di $\alpha(s)$ sono difficili da calcolare a mano. Se uno le calcola con il calcolatore viene $s \approx -1.17$ (per $K \approx 0.46$), $s \approx -0.27$ (per $K \approx 0.27$), $s \approx 1.8$. Come si puo' evincere dalla posizione degli zeri e dei poli che caratterizzano il luogo, la soluzione evidentemente appartiene al luogo negativo (i.e., il luogo che si trova per $K < 0$).
Se uno non ha un calcolatore a disposizione, sapendo che alla fine stiamo cercando degli s reali e negativi come zeri, uno puo' provare a mano a vedere se ci sono effettivamente degli zeri cosi' come li 'vogliamo'.
Provando a mettere dei valori 'standard', otteniamo una tabella come segue:

s	$\alpha(s)$	segno
$+\infty$	$+\infty$	$+$
0	$0 - 0 - 0 - 2$	$-$
-1	$-3 - 1 + 7 - 2$	$+$
-2	$-24 - 4 + 14 - 2$	$-$
$-\infty$	$-\infty$	$-$

Per la continuita' dei polinomi, deve quindi effettivamente esserci una radice positiva, e due radici negative. Infatti, graficamente $\alpha(s)$ e' come il seguente:



Senza calcolatrice si puo' quindi ritrovare bene o male dove possono essere queste radici, ma poi diventa difficile trovare i corrispondenti K.
In ogni caso, considerando quindi la posizione dei poli e degli zeri del polinomio per cui si vuole trovare il luogo delle radici, e le posizioni dei punti doppi trovate sopra, si vede che si deve avere un solo passaggio per l'asse immaginario (che deve avvenire per $K = \frac{4}{9}$ nel punto $s = 0$).

Soluzione 3:

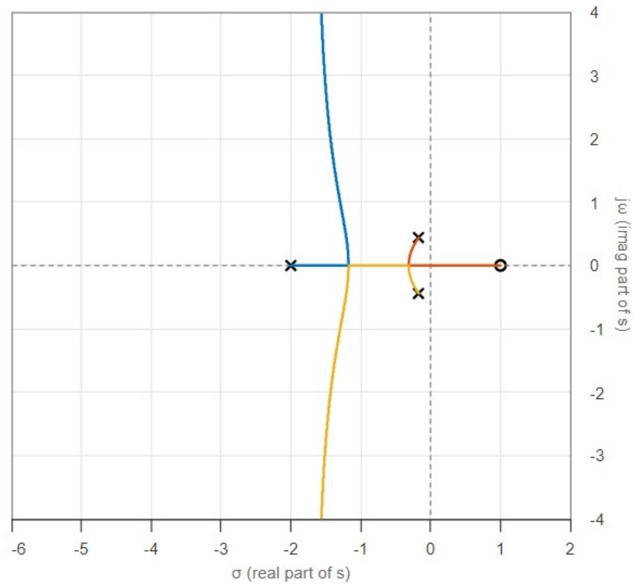
Infine, il centro degli asintoti si trova usando la formula

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

che in questo caso ci da' una soluzione pari a

$$\frac{-2-2/6-1}{3-1} = -\frac{5}{3}.$$

Abbiamo quindi due asintoti a $\pm 90^o$. Il luogo e' riportato in figura.



Soluzione 4:

Guardando il luogo delle radici, si ha stabilita' per $K < 4/9$.

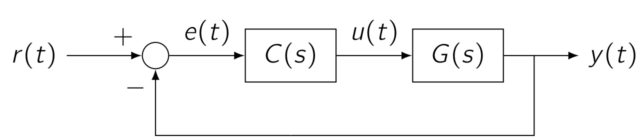
Soluzione 5:

Otteniamo modi non oscillanti per (usando i valori approssimati come se fossero quelli veri) $0.27 < K < 0.46$, i.e., per i valori in cui i rami del luogo stanno sull'asse reale. In pratica finche' raggiungiamo un punto doppio a partire dall'altro.

Domanda 14

Si consideri lo schema a blocchi della figura a fianco, in cui

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{(s^2 + as + 13)}{s(s+4)^2}$$



con a un parametro reale.

1. Determinare a sapendo che $s = -1$ è punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, ed i punti doppi del luogo.
3. Si trovino i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa contiene modi puramente oscillatori. Determinare gli altri modi

del sistema in corrispondenza a tale valore di K

Soluzione 1:

Punti doppi:

$$\begin{cases} s(s+3)(s+6)+k(s+b)=0 \\ 3s^2+18s+18+k=0 \end{cases} \qquad s=-2$$

$$\begin{cases} -2(1)\cdot(4)+k(b-2)=0 \\ 12-36+18+k=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8+6(b-2)=0 \\ k=6 \end{cases} \qquad \boxed{b=\frac{10}{3}}$$

Soluzione 2:

Asintoti:

$$\sigma_a=\frac{\sum \overline{z_1}-\sum z_i}{n-m}=\frac{-3-6-\frac{10}{3}}{2}=-\frac{17}{3}$$

pics/esercizio-3-30-06-2014.PNG

Soluzione 3:

per k = 6
$s(s+3)(s+6)+k(s+\frac{10}{3})=0$ ha punto doppio in -2 e quindi $(s+2)^2$ e' fattore del polinomio.

$$s(s+3)(s+6)+6(s+\frac{10}{3})=s^3+9s^2+24s+20$$

i nodi sono:

$$e^-2t,\ \ te^-2t,\ \ e^-5t$$