Domanda 1

Si consideri un sistema lineare tempo invariante modellato attraverso la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s}.$$

1. Si calcoli la risposta forzata del sistema per $u(t)$ uguale al gradino unitario.
2. Si descriva in parole (e se si preferisce ci si aiuti anche con qualche formula e grafico) un possibile modo analitico (quindi **non** numerico, come ad esempio schemi di Eulero) per calcolare la risposta forzata relativa all'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t & \text{se } t \in [0,1], \\ 1 & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

   Suggerimento: si pensi alle proprieta' dei sistemi lineari tempo invarianti, e se ne usi una specifica.

Soluzione 1:

Banalmente, risulta

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s+1)^2 s^2}.$$

Per trovare l'espansione in fratti semplici ci sono ora due modi diversi: se non ci si ricorda la formula generale (scritta sotto) allora conviene imporre l'eguaglianza tra le seguenti cose:

$$\frac{1}{(s+1)^2 s^2} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{(s+1)^2} + \frac{\gamma}{s} + \frac{\theta}{s^2} = \frac{\alpha(s+1)s^2 + \beta s^2 + \gamma(s+1)^2 s + \theta(s+1)^2}{(s+1)^2 s^2}.$$

Siccome i numeratori devono equivalere, espandendo il numeratore al membro piu' a destra segue il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma + \theta = 0 \\ \gamma + 2\theta = 0 \\ \theta = 1 \end{cases}$$

che porta a $\theta = 1$, $\gamma = -2$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, cosi' che In conclusione,

$$Y_f(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Se si voleva fare questo conto invece con la formula generale, si sarebbe supposto che la funzione razionale $G_a(s)$ abbia h poli distinti p_i con $i = 1, \ldots, h$, ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicita' $r_i \geq 1$ (con la somma degli ordini $\sum_{i=1}^{h} r_i$ uguale al grado massimo del polinomio, in seguito n), quindi

$$G_a(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\ldots(s-p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}}.$$

In questo caso generico le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano quindi mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}}(s-p_i)^{r_i}\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}$$

dove $(i = 1, \ldots, h; \ell = 1, \ldots, r_i)$. Per dare un altro esempio:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

porta direttamente al sistema

$$\begin{aligned} K_{11} &= \left[(s+2)F(s)\right]\big|_{s=-2} = 1 \\ K_{22} &= \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 F(s)\right]\bigg|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]\bigg|_{s=-1} = -1 \\ K_{21} &= \left[(s+1)^2 F(s)\right]\big|_{s=-1} = 1 \end{aligned}$$

Si noti che se si ottengono coefficienti $K_{i\ell}$ complessi coniugati allora questi devono essere in corrispondenza di poli complessi coniugati. In generale pero' si possono anche trovare coefficienti reali in corrispondenza di poli complessi.
Antitrasformando ora la $Y_f(s)$ si ottiene in generale:

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i-\ell)!} t^{r_i-\ell} e^{p_i t}$$

e quindi, nel nostro caso specifico, per $t \geq 0$

$$y_{b,f}(t) = 2\exp(-t) + t\exp(-t) - 2 + t.$$

Soluzione 2:

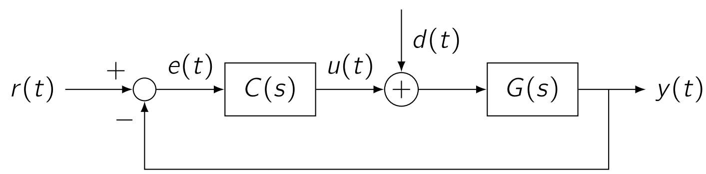
I sistemi lineari godono di sovrapposizione degli effetti. Il segnale $F(t)$ considerato puo' essere immaginato come la sottrazione di una rampa unitaria che parte a $t = 0$, e di una rampa unitaria che parte a $t = 1$. Quindi chiamando $\star(t)$ l'uscita calcolata al punto precedente l'uscita cercata si puo' calcolare come $\star(t) - \star(t - 1)$.'

Domanda 2

Si consideri lo schema a blocchi a fianco, dove

$$C(s) = \frac{k}{s}, \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b},$$

e dove $a, b > 0$.



1. Determinare a e b in maniera che la risposta impulsiva associata a $G(s)$ sia $Ae^{-t}\cos(2t + \phi)$ dove sia A che ϕ sono numeri reali;

2. indicando con $T_{ry}(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$, determinare i valori di K, a, e b che rendono BIBO stabile $T_{ry}(s)$;

3. determinare la funzione sensibilitá di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a;

4. supponiamo ora che $a = 1$, $b = 2$, indipendentemente dai valori che sono stati determinati nel punto 1 (cosí che eventuali errori di calcolo nel punto 1 non vadano ad inficiare la capacitá di risolvere correttamente questo punto. Notare che questi valori sono qualunque, quindi non necessariamente la soluzione al primo punto). Supponiamo inoltre che $r(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right)$ e che $d(t) = t$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

Soluzione 1:

1. la risposta é del tipo $Ae^{-t}cos(2t + \phi)$ se e solo se i due poli di $G(s)$ sono $-1 \pm -2j$, e quindi questi due numeri complessi coniugati sono zeri del suo denominatore $s^2 + as + b$. Deve quindi essere che $(s + 1 - 2j)(s + 1 + 2j) = s^2 + 2s + 5 = s^2 + as + b$, che implica $a = 2$ e $b = 5$.

Soluzione 2:

1. Considerando come si ottiene la fdt della catena chiusa a partire da uno schema a blocchi come questo si ha subito

$$
\begin{aligned}
T_{ry}(s) &= \tfrac{CG}{1+CG} \\
&= \frac{\frac{K}{S}\frac{1}{s^2+as+b}}{1+\frac{K}{S}\frac{1}{s^2+as+b}} \\
&= \frac{K}{s(s^2+as+b)+K} \\
&= \frac{K}{s^3+as^2+bs+K}.
\end{aligned}
$$

   Per controllare quando questa fdt e' associata ad un comportamento stabile si puo' quindi controllare la tabella di Routh, che risulta essere

   Tabella di Routh

3	1	b
2	a	k
1	$\frac{ab-k}{a}$	
0	k	

   Questo significa che si ha stabilita' per $0 < K < ab$.

Soluzione 3:

1. direttamente dalla definizione,

$$
S_a^{T_{ry}} = \frac{a}{T_{ry}}\frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = \frac{a\cancel{(s^3+as^2+bs+K)}}{\cancel{K}}\frac{-\cancel{K}s^2}{[s^3+as^2+bs+K]^{\cancel{2}}} = \frac{-as^2}{s^3+as^2+bs+K}.
$$

Soluzione 4:

1. Per prima cosa conviene trovare la funzione di trasferimento da d a y, che risulta essere

$$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{\frac{1}{s^2+as+b}}{1+\frac{K}{s}\frac{1}{s^2+as+b}} = \frac{s}{s(s^2+as+b)+K}.$$

Poi per trovare $y(t)$ bisogna considerare la proprieta' di linearita' del modello, i.e., il fatto che la risposta a regime totale sara' la somma della risposta a regime dovuta a r quando questo agisce da solo, e della risposta a regime dovuta a d quando questo agisce da solo.

Consideriamo quindi $r(t) = \cos\left(\sqrt{2}t\right)$ e $d(t) = 0$. La proprieta' di fedelta' sinusoidale dei sistemi lineari tempo invarianti implica che

$$y(t) \approx \left|T_{ry}\left(j\sqrt{2}\right)\right| \cos\left(\sqrt{2}t + \angle T_{ry}\left(j\sqrt{2}\right)\right).$$

Per valutare il modulo e la fase di $T_{ry}(j\sqrt{2})$ consideriamo quindi che questo numero complesso e' dato da

$$T_{ry}(j\sqrt{2}) = \frac{K}{j\sqrt{2}\left(-2+j\sqrt{2}+2\right)+K} = \frac{K}{K-2}$$

Siccome il sistema e' stabile per $0 < K < 10$, il precedente numero e' reale negativo. Quindi il suo modulo e' $\frac{K}{10-K}$ e la sua fase e' π da cui segue che

$$y(t) \approx \frac{K}{2-K}\cos\left(\sqrt{2}t+\pi\right) = -\frac{K}{2-K}\cos\left(\sqrt{2}t\right) = \frac{K}{K-2}\cos\left(\sqrt{2}t\right).$$

Calcoliamo quindi l'altro pezzo di risposta forzata corrispondente a $r(t) = 0$ e $d(t) = t$. Si noti che in questo caso si ha $D(s) = \frac{1}{s^2}$, che implica

$$Y(s) = T_{dy}(s)D(s) = \frac{s}{s(s^2+as+b)+k}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{[s(s^2+as+b)+k]s}.$$

Soluzione 5:

Per trovare la risposta forzata si puo' quindi svolgere una decomposizione di $Y(s)$ in fratti semplici, che sara' quindi del tipo

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \sum_i \sum_j \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

dove i vari p_i sono le radici di $s(s^2+as+b)+k$ e i vari j sono le varie possibili molteplicita' dei vari poli. Una volta calcolata l'espansione sopra otteniamo, anti-trasformando ed in generale,

$$y(t) = A + \sum_{i,j} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \approx A$$

dove l'ultima approssimazione vale per $t \to +\infty$ perché i rimanenti termini convergono a zero per la stabilitá del sistema. Possiamo quindi concludere che $y(t) \simeq A$ dove, utilizzando la formula dei residui,

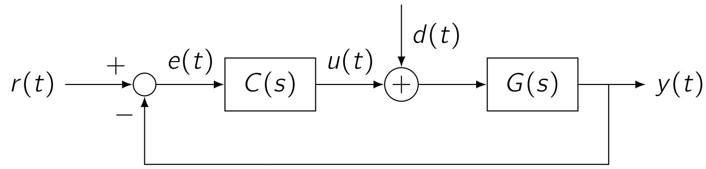
$$A = Y(s)s|_{s=0} = \frac{1}{s(s^2+as+b)+k}|_{s=0} = \frac{1}{K}.$$

Infine, mettendo insieme i due contributi di sopra otteniamo che la risposta a regime complessiva e'

$$y(t) \approx \frac{K}{K-2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{K}.$$

Domanda 3

Si consideri lo schema a blocchi a fianco, dove $C(s) = \frac{K}{s+1}$ e $G(s)$ corrisponde alla funzione di trasferimento associata all'equazione differenziale $\ddot{y} + 4y = \dot{u}$.



1. Determinare $G(s)$ e la risposta impulsiva $g(t)$.
2. Determinare la risposta libera sapendo che $y(0^-) = 0$ e $\dot{y}(0^-) = 1$.
3. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiusa al variare di K.
4. Supponendo che $r(t) = 2\cos(2t)$ e che $d(t) = t$ per t positivi (rampa), determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di K.

Soluzione 1:

Cominciamo risolvendo la ODE $\ddot{y} + 4y = \dot{u}$. Ricordando la trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}(y^{(k)}) = s^k Y(s) + \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}$$

otteniamo

$$s^2 Y(s) + \underbrace{s^0 y^{(1)}(0^-) + s^1 y^{(0)}(0^-)}_{\text{Risultato della sommatoria}} + 4Y(s) = sU(s).$$

Si ottiene quindi

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = sU(s) \iff Y(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

Avremo quindi che la risposta forzata è, ricordando che $\mathcal{L}\cos(\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+2^2} = \cos(2t).$$

Soluzione 2:

Per calcolare la risposta libera dobbiamo concentrarci su termine che è risultato della sommatoria ovvero

$$Y_\ell(s) = \frac{1}{s^2+4} \iff y_\ell(t) = \sin(2t).$$

Consideriamo il diagramma dell'esercizio con $C = \frac{K}{s}$; calcolando dallo schema a blocchi $Y = (W_{d\to y} + W_{r\to y})R$, ed analizzando lo schema a blocchi otteniamo

$$W_{d\to y} = \frac{G}{1+CG} \quad W_{r\to y} = \frac{CG}{1+CG}.$$

Si ottiene quindi

$$W_{r\to y} = \frac{Ks}{s^3+s^2+(4+K)s+4}.$$

Soluzione 3:

Per risolvere il terzo punto dobbiamo calcolare la tabella di Routh del polinomio $s^3 + s^2 + (4+K)s + 4$ in quanto la stabilità dipende dalla presenza dei poli nel semiasse negativo e dato che Routh permette di determinare la presenza di tali poli in base al variare dei segni degli elementi, questa scelta è appropriata. La tabella di Routh e' quindi

n	coeff. del grado n	coeff. del grado $n-2$
3	1	$4+K$
2	1	4
1	K	0
0	0	0

Ricordiamo infatti che le entry delle linee $n=1$, $n=0$ si calcolano prendendo le due entrate sopra e le due alla loro destra e applicando la formula $\frac{cd-ba}{c}$ della matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Quindi per la entry che ha valore K si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 4+K \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e quindi si ha, applicando la formula, che $\frac{4+K-4}{1} = K$. Analizzando quindi la prima colonna vediamo che abbiamo un cambio di segno solo se K è negativo, quindi il sistema è stabile se K è positivo, quindi per $K > 0$ (attenzione che questo significa escludere il caso $K = 0$).

Soluzione 4:

L'andamento a regime è $r(t) = \cos(2t)$, quindi $R(s) = \frac{1}{s^2+4}$ e $d(t) = t$. Notiamo che il disturbo è una rampa lineare (in Laplace sarebbe $\frac{1}{s^2}$). Per calcolare il valore a regime possiamo utilizzare il *final value theorem* che dice che

Final Value Theorem

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = [sY(s)]_{s=0}$$

Calcolando $W_{d\to y}$ si ottiene che vale $\frac{G}{1+CG} = \frac{s(s+1)}{(s+1)(s^2+4)+Ks}$ Quindi considerando il disturbo

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} * \frac{s(s+1)}{(s+1)(s^2+4)+Ks}$$

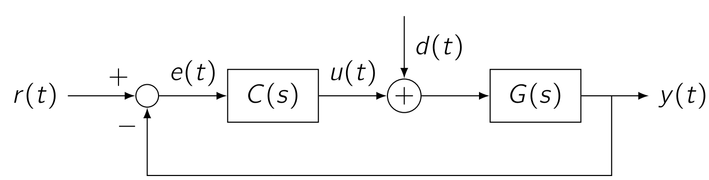
Si ottiene quindi per il final value theorem che

$$y(\infty) = s * \frac{1}{s[(s+1)(s^2+4)+Ks]} \text{ in } s=0 \implies y(\infty) = \frac{1}{4}$$

Domanda 4

Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(2)}(t) - ay(t) = u^{(1)}(t) - 2u(t), \qquad a \in R$$



e lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco.

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e la BIBO stabilita' del sistema definito da $G(s)$ al variare di a.
2. Determinare la risposta forzata di questo sistema per $a = 4$ supponendo che $u(t) = 1$ per $t \geq 0$.

3. Si assuma che $G(s)$ sia la funzione di trasferimento calcolata nel punto 1, e si ponga

$$a = 1 \qquad\qquad C(s) = K\frac{s+2}{s}.$$

Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di K supponendo che $r(t) = \cos(t)$ e che $d(t) = 10$.

Soluzione 1:

$\boxed{Es. 2}$

1) La funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{s-2}{s^2-a}$$

Per $a<0$ $W(s)$ ha due poli immaginari $\Rightarrow$ Non BIBO

Per $a=0$ $W(s)$ ha due poli nell'origine $\Rightarrow$ Non BIBO

Per $a>0$, $a\neq 4$ $W(s)$ ha un polo >0 e un polo <0 $\Rightarrow$ Non BIBO

Per $a=4$ allora $W(s) = \frac{s-2}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \Rightarrow$ BIBO

2) $U(s) = \frac{1}{s}$, $W(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y_f(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$

$A = Y_f(s)\,s\big|_{s=0} = \frac{1}{2}$ $\quad B = Y_f(s)(s+2)\big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$

$y_f(t) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \quad t\geq 0$

3) $W_{ry}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{k(s^2-4)}{s(s^2-1)+k(s^2-4)}$

$W_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{s(s-2)}{s(s^2-1)+k(s^2-4)}$

Stabilità s^3+ks^2-s-4k

3	1	-1
2	k	$-4k$
1	$\frac{-k+4k}{k}=3$	
0	k	

Stabile per $k>0$

Se $r(t)=\cos(t)$ $d(t)=0$ allora

$y(t) \simeq |W_{ry}(j)|\cos\left(t+\angle W_{ry}(j)\right)$

$W_{ry}(j) = \frac{k(-1-4)}{j(-1-1)+k(-1-4)} = \frac{-5k}{-5k-2j} = \frac{5k}{5k+2j}$

$|W_{ry}(j)| = \frac{5k}{\sqrt{25k^2+4}}$ $\quad \angle W_{ry}(j) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{5k}\right)$

Se $r(t)=0$ $d(t)=10$ allora

$y(t) \simeq W_{dy}(0)\cdot 10 = 0$

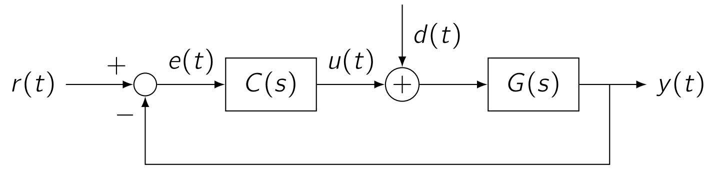
Quindi $y(t) \simeq \frac{5k}{\sqrt{25k^2+4}}\cos\left(t-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{5k}\right)\right)+0$

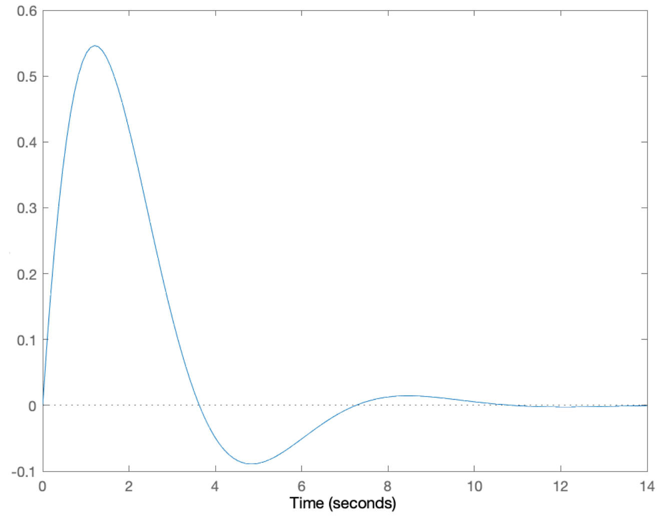
Domanda 5

Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, e si supponga

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+a}{s^2+s+1} \qquad \text{con} \quad a \geq 0.$$

1. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiuso al variare di a e K.
2. Determinare a sapendo che se $K = 0$ e $d(t)$ e' il gradino unitario, allora si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura a fianco.
3. Supponiamo ora che $a = 2$ (valore non necessariamente uguale alla soluzione del punto precedente). Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ sapendo che $r(t) = \sin(t)$ e $d(t) = t$ per $t \geq 0$ (i.e., una rampa unitaria).





Soluzione 1:

$\boxed{ES\,2}$

1) $$W_{zy}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{k(s+a)}{s(s^2+s+1)+k(s+a)} = \frac{k(s+a)}{s^3+s^2+(k+1)s+ka}$$

$$W_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{s(s+a)}{s(s^2+s+1)+k(s+a)} = \frac{s(s+a)}{s^3+s^2+(k+1)s+ka}$$

Tabella di Routh

3	1	$k+1$
2	1	ka
1	$k+1-ka$	
0	ka	

Stabilità $\iff$ $ka>0$

$k+1-ka>0 \iff k(1-a)+1>0$

Siccome sappiamo che $a\geq 0$, allora

$ka>0 \iff a>0$ e $k>0$

Inoltre se $0<a\leq 1$ allora $k(1-a)\geq 0 \Rightarrow k(1-a)+1>0$ vale

se invece $a>1$ allora

$k(1-a)+1>0 \iff 1>k(a-1) \iff k<\frac{1}{a-1}$

Concludendo: abbiamo stabilità 1) per $0<a\leq 1$ e $\forall k$

2) per $a>1$ per $0<k<\frac{1}{a-1}$

2) Dalla figura si nota che $y(t)$ converge a zero.

La teoria ci permette di prevedere che $y(t)$ converge verso il valore $G(0)$. Quindi posso concludere che $G(0)=0$ e quindi che $G(0)=\frac{a}{1}=0 \Rightarrow a=0$

3) Con $a=2$ le funzioni di trasferimento sono

$$W_{zy}(s) = \frac{k(s+2)}{s(s^2+s+1)+k(s+2)} \qquad W_{dy}(s) = \frac{s(s+2)}{s(s^2+s+1)+k(s+2)}$$

che sono stabili per $0<k<1$

i) $z(t)=\sin(t)$ $\quad d(t)=0$

$$y(t)\simeq |W_{zy}(j)|\sin(t+\angle W_{zy}(j))$$

$$W_{zy}(j) = \frac{k(2+j)}{j(-1+j+1)+k(2+j)} = \frac{k(2+j)}{2k-1+jk} \qquad |W_{zy}(j)| = \frac{\sqrt{5}\,k}{\sqrt{(2k-1)^2+k^2}}$$

$$\angle W_{zy}(j) = \angle 2+j - \angle 2k-1+jk = \arctan\left(\tfrac{1}{2}\right) - \arctan\left(\tfrac{k}{2k-1}\right)$$

ii) $z(t)=0$ $\quad d(t)=t \longrightarrow D(s)=\frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = W_{dy}(s)D(s) = \frac{\cancel{s}(s+2)}{s(s^2+s+1)+k(s+2)}\frac{1}{s^{\cancel{2}}} = \frac{A}{s} + \text{altri fratti semplici stabili}$$

$y(t)\simeq A$ $\quad$ dove $A = Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{s+2}{s(s^2+s+1)+k(s+2)}\Big|_{s=0} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$

residuo in $s=0$

Quindi

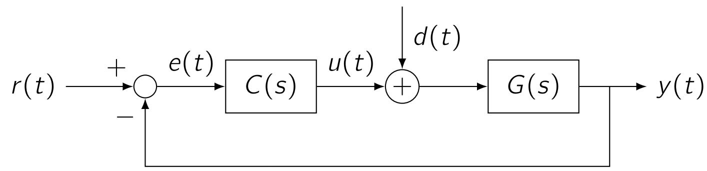
$$y(t) \simeq \frac{\sqrt{5}\,k}{\sqrt{5k^2-4k+1}}\sin\left(t+\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)-\arctan\left(\tfrac{k}{2k-1}\right)\right) + \frac{1}{k} \qquad 0<k<1$$

Domanda 6

Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, e si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

con $a > 0$, e $b > 0$.



1. Determinare a e b in maniera tale che la risposta impulsiva associata a $G(s)$ sia $Ae^{-t}\cos(2t + \phi)$ dove A, e ϕ sono opportuni numeri reali.
2. Sia $W_{ry}(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$. Determinare i valori di K, a, e b che rendono $W_{ry}(s)$ BIBO stabile.
3. Supponiamo che $r(t) = 5$ e che $d(t) = 3t$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di a, b, e K.

Soluzione 1:

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) La risposta impulsiva ha il modo $Ae^{-t}\cos(2t+\phi)$ se e solo se $-1+2j$ è polo di $G(s)$ e quindi radice di s^2+as+b

$$s^2+as+b=(s+1-2j)(s+1+2j)=(s+1)^2-(2j)^2=s^2+2s+5$$

Quindi $a=2 \quad b=5$

2) $$W_{zy}(s)=\frac{K}{s(s^2+as+b)+K}=\frac{k}{s^3+as^2+bs+k}$$

3	1	b
2	a	k
1	$\frac{ab-k}{a}$	
0	ak	

Considerando che $a>0$ e $b>0$ si ottiene

$k>0$ e $k<ab \Rightarrow \boxed{0<k<ab}$

3) $$W_{dy}(s)=\frac{s}{s(s^2+as+b)+k}=\cancel{\left(\begin{matrix}a=2\\ b=5\end{matrix}\right)}=\cancel{\frac{s}{s(s^2+2s+5)+k}}$$

$$W_{zy}(s)=\cancel{\left(\begin{matrix}a=2\\ b=5\end{matrix}\right)}=\frac{k}{s(s^2+as+b)+k}$$

$z(t)=5 \quad d(t)=0$

$y(t)\simeq W_{zy}(0)\,5=5$

$z(t)=0 \quad d(t)=3t$

$$Y(s)=W_{zy}(s)\frac{3}{s^2}=\frac{s}{s(s^2+as+b)+k}\frac{3}{s^2}=\frac{3}{s[s(s^2+as+b)+k]}=\frac{A}{s}+\dots$$

$$A=Y(s)s\Big|_{s=0}=\frac{3}{s(s^2+as+b)+k}\Big|_{s=0}=\frac{3}{k}$$

$y(t)\simeq \frac{3}{k}$

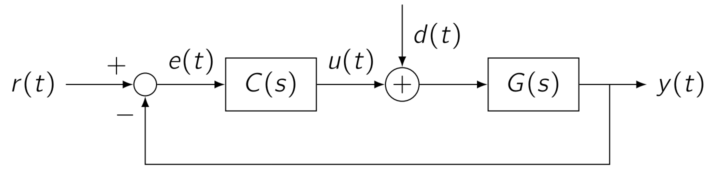
Complessivamente

$y(t)=1+\frac{3}{k}$ Per $0<k<ab$ che assicura la stabilità

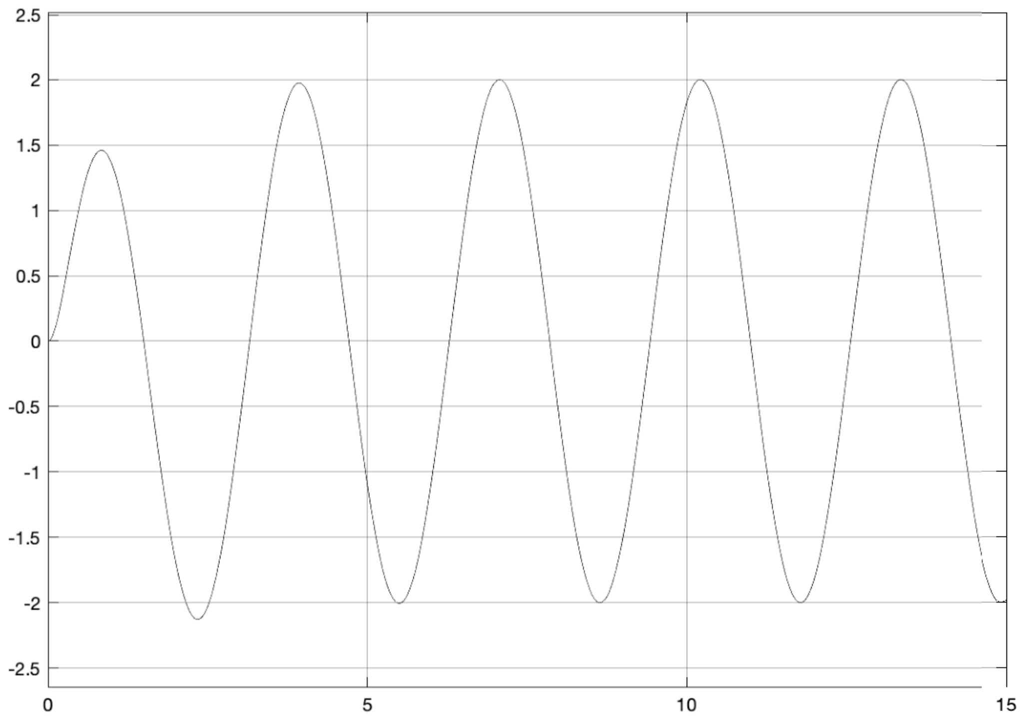
Domanda 7

Si consideri lo schema a blocchi della figura a fianco, in cui

$$C(s) = \frac{K}{s+1} \qquad G(s) = \frac{s}{s^2 + as + 4} \qquad \text{con } a \geq 0.$$



1. Supponiamo che ora che $K = 1$. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiuso al variare di a.
2. Supponiamo che ora che $K = 0$. Determinare a sapendo che se $d(t) = 10\sin(2t)$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



3. Supponiamo ora che $a = 5$ e K sia libero. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ in funzione di K sapendo che $r(t) = 5 + 2t$ e $d(t) = 20$.

Soluzione 1:

1) $W_{ry}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{ks}{(s+1)(s^2+as+4)+ks}$

$W_{dy}(s) = \dfrac{G}{1+CG} = \dfrac{s+1}{(s+1)(s^2+as+4)+ks}$

Il denominatore è $(s+1)(s^2+as+4)+ks = s^3+(a+1)s^2+(k+a+4)s+4$

che per $k=1$ vale $s^3+(a+1)s^2+(a+5)s+4$

Studio la stabilità con Routh

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & a+5 \\
2 & a+1 & 4 \\
1 & -\dfrac{a^2+6a+1}{a+1} & \\
0 & a+1 &
\end{array}
$$

$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}$

Stabilità per $\begin{cases} a+1>0 \\ -\dfrac{a^2+6a+1}{a+1} > 0 \end{cases} \Updownarrow \begin{cases} a>-1 \\ a^2+6a+1<0 \end{cases}$

Stabile per $-1 < a < -3+\sqrt{8} = -0.17$

2) Dalla figura si deduce che

$10\left|\dfrac{2j}{\cancel{(2j)^2}+a2j+\cancel{4}}\right| = 2 \iff \left|\dfrac{\cancel{2j}}{a\cancel{2j}}\right| = \dfrac{1}{5} \iff |a|=5 \Rightarrow a=\pm 5$

3) $a=5$ $\quad W_{ry}(s) = \dfrac{ks}{(s+1)(s^2+5s+4)+ks}$ $\quad W_{dy}(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)(s^2+5s+4)+ks}$

$r(t) = 5+2t = r_1(t) + r_2(t)$ $\quad r_1(t) = 5$ $\quad r_2(t) = 2t$

$Y_1(s) = W_{ry}(s) R_1(s)$ $\quad y_1(t) \simeq |W_{ry}(0)| 5 = 0$

$Y_2(s) = W_{ry}(s) R_2(s) = \dfrac{ks}{(s+1)(s^2+5s+4)+ks} \dfrac{2}{s^2} =$

$= \dfrac{2k}{[(s+1)(s^2+5s+4)+ks]s} = \dfrac{A}{s}$ + Altri fratti semplici stabili

$A = Y_2(s)s\big|_{s=0} = \dfrac{2k}{(s+1)(s^2+5s+4)+ks}\Big|_{s=0} = \dfrac{2k}{4} = \dfrac{k}{2}$

$y_2(t) \simeq \dfrac{k}{2}$

Soluzione 2:

$$Y_3(s) = W_{dy}(s)\, D(s) \qquad d(t) = 20 \qquad D(s) = \frac{20}{s}$$

$$y_3(t) \simeq W_{dy}(0)\, 20 = \frac{1}{4}\, 20 = 5$$

Quindi sommando tutti i contributi otteniamo

$$y(t) \simeq 0 + \frac{k}{2} + 5 = 5 + \frac{k}{2}$$

in corrispondenza ai k stabilizzanti che sono dati da:

$$(s+1)(s^2+5s+4)+ks = s^3 + 6s^2 + (k+9)s + 4$$

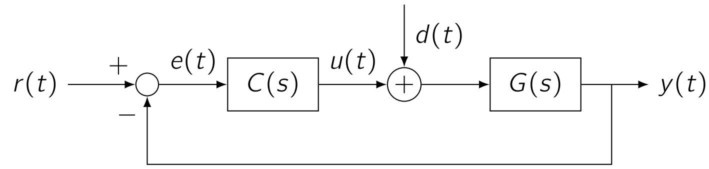
$$\begin{array}{c|ll}
3 & 1 & k+9 \\
2 & 6 & 4 \\
1 & -\dfrac{4-6k-64}{6} = \dfrac{6k+60}{6} = k+10 & \\
0 & 4 &
\end{array}$$

stabile per $k > -10$

Domanda 8

Si consideri lo schema a blocchi in figura a fianco, dove

$$C(s) = \frac{K}{s}, \quad G(s) = \frac{s^2+s+12}{s^2+a}$$



e dove a e K sono due parametri reali.

1. Si determini il valore del parametro a sapendo che la risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ contiene il modo $\sin(3t)$.
2. Si determini il valore di K sapendo che il sistema retroazionato reagisce ad un segnale di ingresso $d(t) = \cos(3t)$ con un'uscita a regime $y(t) = \cos(3t + \frac{\pi}{2})$.
3. Supponendo che $r(t) = 5$ e $d(t) = t, \forall t \geq 0$, si determini l'uscita a regime $y(t)$ in funzione della variable $K \geq 0$.

Soluzione 1:

1. Se il modo e' $\sin(3t)$ allora i poli devono essere posizionati in $\pm 3j$, dunque il denominatore e' $s^2 + 9$.
2. la funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita e' data da

$$H_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s(s^2+s+12)}{s(s^2+9) + K(s^2+s+12)}.$$

Sappiamo inoltre che deve essere che per $\omega = 3$ il modulo di $H_{dy}(j\omega)$ deve essere unitario. Quindi

$$|H_{dy}(3j)| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{3j(12-9+3j)}{3j(-9+9) + K(12-9+3j)} \right| = \left| \frac{3j}{K} \right| = 1$$

che implica $K = \pm 3$.

Abbiamo anche informazione sulla fase, i.e., $\angle H_{dy}(3j) = \pi/2$, che significa (ripetendo fondamentalmente i conti di prima)

$$\angle \frac{3j}{K} = \pi/2$$

e quindi deve essere $K = 3$.

3. Cominciamo a controllare quando si ha che il polinomio caratteristico $s^3 + 9s + K(s^2 + s + 12)$ ha radici stabili. Utilizzando il criterio di Routh si ha

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 9+K \\ 2 & K & 12K \\ 1 & K-3 & \\ 0 & 12K & \end{array}$$

e dunque si ha stabilita' per $K > 3$. Notare come il risultato e' coerente con quello che si e' trovato al punto precedente.

Per poi trovare la risposta a regime usiamo la sovrapposizione degli effetti. La funzione di trasferimento dal riferimento all'uscita e'

$$H_{ry}(s) = \frac{K(s^2+s+12}{s(s^2+9) + K(s^2+s+12)},$$

e data questa H e per la sovrapposizione degli effetti si ha che

- $r(t) = 5$ e $d(t) = 0$ implica una uscita a regime $y_r(t) = H_{ry}(0) \cdot 5 = 5$, e
- $r(t) = 0$ e $d(t) = t$ implica una uscita $y_d(t)$ il cui regime puo' essere calcolato usando il teorema del valore finale, i.e., $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sT_{ry}(s) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{12}{12K} = \frac{1}{K}$ (ricordando come la rampa corrisponda in Laplace a $1/s^2$).

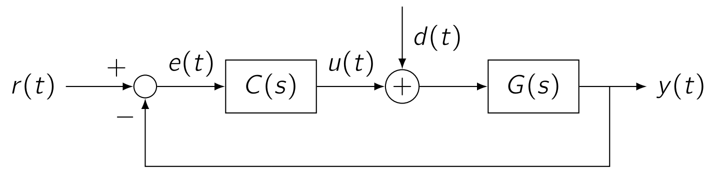
Quindi $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 5 + \frac{1}{K}$.

Domanda 9

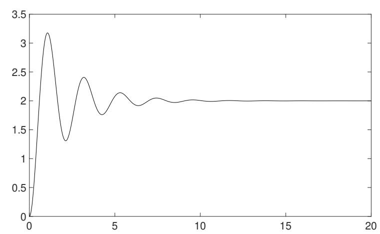
Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, dove

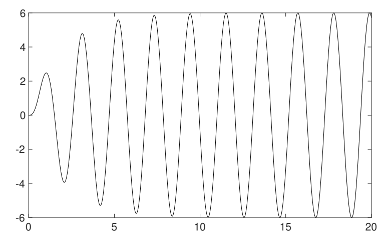
$$C(s) = \frac{K}{s} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{b}{s^2 + s + a},$$

dove i parametri K, a e b sono parametri reali.



1. Determinare i valori di K, a e b che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
2. Determinare a e b, assumendoli entrambi non negativi, sapendo che con $K = 0$, se $d(t) = 1$ (gradino) si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata nella figura sotto a sinistra, e mentre se $d(t) = \sin(3t)$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata nella figura sotto a destra.





3. Supponendo che $a = 9$ e $b = 1$, e lasciando K come variabile indeterminata, si determini l'andamento a regime di $y(t)$ in funzione di K assumendo i segnali r e d pari a $r(t) = 1$ (gradino) e $d(t) = \sin(3t)$.

Soluzione 1:

$\boxed{ES. 2}$

1. $T_{zy}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{kb}{s(s^2+s+a)+kb}$

$T_{dy}(s) = \dfrac{G}{1+CG} = \dfrac{sb}{s(s^2+s+a)+kb}$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & kb \\ 1 & a-kb & \\ 0 & kb & \end{array}$$

2. Dalla figura si nota che

$$\begin{cases} G(0) = 2 \\ |G(3j)| = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b/a = 2 \\ \left|\dfrac{b}{-9+3j+a}\right|^2 = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2a \\ \dfrac{4a^2}{(a-9)^2+9} = 36 \; 9 \end{cases}$$

$a^2 = 9(a-9)^2 + 81$ equazione di 2° grado $a_{12} < \begin{matrix} 9 \\ 45/4 \end{matrix}$ $b_{12} < \begin{matrix} 18 \\ \frac{45}{2} \end{matrix}$

3) $a = 9$ $b = 1$

$T_{zy}(s) = \dfrac{k}{s(s^2+s+9)+k}$ $T_{dy}(s) = \dfrac{s}{s(s^2+s+9)+k}$

$T_{zy}(1) = 1$

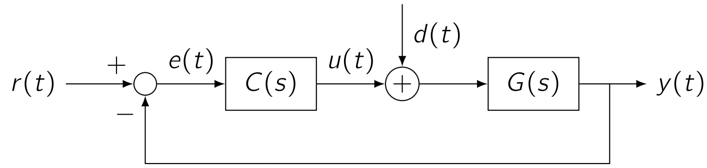
$T_{dy}(3j) = \dfrac{3j}{3j(\cancel{-9}+3j+\cancel{9})+k} = \dfrac{3j}{k-9}$ $\begin{matrix} |T_{dy}(3j)| = \dfrac{3}{9-k} \\ \angle T_{dy}(3j) = -\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}$

$y(t) \simeq 1 + \dfrac{3}{9-k} \sin\left(3t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

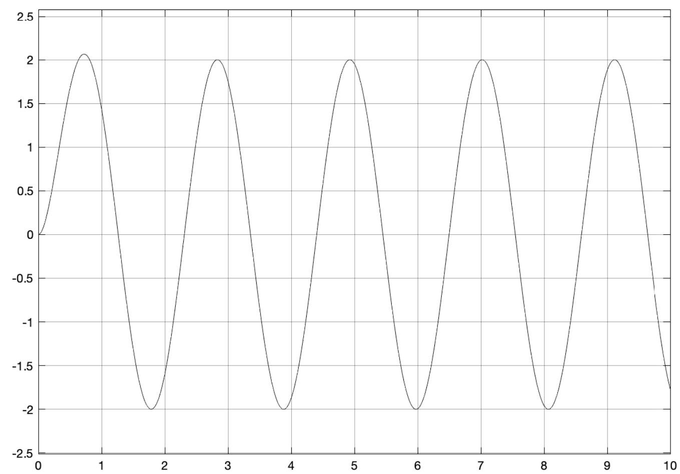
Domanda 10

Si consideri lo schema a blocchi a fianco, dove

$$C(s) = \frac{K}{s(s+1)}, \qquad G(s) = \frac{1}{s+a}, \quad a \geq 0.$$



1. Studiare la stabilita' BIBO della funzione di trasferimento $W_{ry}(s)$ dall'ingresso r all'uscita y al variare dei parametri a e K.
2. Supponiamo di aver fissato $K = 0$ e $d(t) = 10\sin(3t)$ e di osservare il segnale $y(t)$ mostrato nella seguente figura. Trovare la costante a.



3. Supponiamo che $a = 4$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di K supponendo che $r(t) = 10$ e che $d(t) = \cos(2t)$.

Soluzione 1:

ES.2

1) $W_{ry}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{k}{s(s+1)(s+a)+k}$

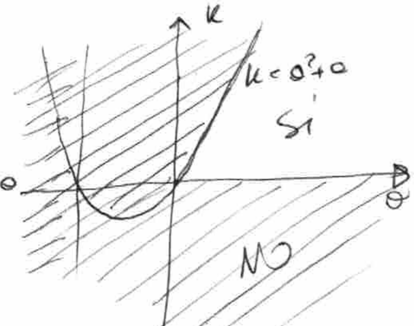
$W_{dy}(s) = \dfrac{G}{1+CG} = \dfrac{s(s+1)}{s(s+1)(s+a)+k}$

Per la stabilità BIBO di W_{ry} dobbiamo studiare la stabilità del polinomio

$s(s+1)(s+a)+k = s^3+(a+1)s^2+as+k$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & a+1 & k \\ 1 & \frac{a^2+a-k}{a+1} & \\ 0 & k & \end{array}$$

stabilità se $\begin{cases} a+1>0 \\ a^2+a-k>0 \\ k>0 \end{cases}$ $\begin{cases} a>-1 \\ k<a^2+a \\ k>0 \end{cases}$



2) Se $k=0$ allora $W_{dy}(s) = \dfrac{1}{s+a}$

Dalla figura osserviamo che $y(t)$ asintoticamente diventa una sinusoide di ampiezza 2. Quindi

$10|W_{dy}(3j)| = 2 \Rightarrow 10\left|\dfrac{1}{3j+a}\right| = 2 \Rightarrow |3j+a| = \dfrac{10}{2} = 5$

$\Rightarrow a^2+9 = 25 \Rightarrow a^2 = 25-9 = 16 \Rightarrow a = 4$

3) Se applichiamo solo $r(t) = 10$ otteniamo a regime

$y(t) \simeq 10\, W_{ry}(0) = 10\dfrac{k}{k} = 10$

$\boxed{\text{Stabilità per } 0<k<20}$

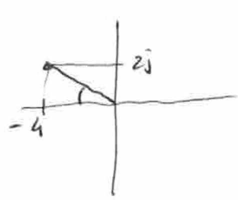
Se applichiamo solo $d(t) = \cos(2t)$ otteniamo

$y(t) \simeq |W_{dy}(2j)| \cos(2t + \angle W_{dy}(2j))$

$W_{dy}(2j) = \dfrac{s(s+1)}{s(s+1)(s+4)+k}\Big|_{s=2j} = \dfrac{s(s+1)}{s(s^2+5s+4)+k}\Big|_{s=2j} = \dfrac{-4+2j}{2j(-4+10j+4)+k}$

$= \dfrac{-4+2j}{k-20}$

$|W_{dy}(2j)| = \dfrac{\sqrt{20}}{k-20}$ $\quad \angle W_{dy}(2j) = \angle -4+2j = \pi - \operatorname{artg}\dfrac{1}{2}$



$y(t) \simeq 10 + \dfrac{\sqrt{20}}{k-20}\cos\left(2t + \pi - \operatorname{artg}\dfrac{1}{2}\right)$

Soluzione 2:

$$= \frac{-4+2j}{K-20} = \frac{4-2j}{20-K}$$

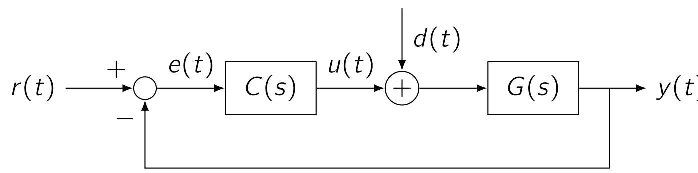
$$|W_{dy}(2j)| = \frac{\sqrt{20}}{20-K} \qquad \angle W_{dy}(2j) = \angle 4-2j + \angle \overbrace{20-K}^{>0} = \angle 4-2j = -\text{arctg}\,\frac{1}{2}$$

$$y(t) \simeq 10 + \frac{\sqrt{20}}{20-K}\cos(2t - \text{arctg}\,1/2)$$

Domanda 11

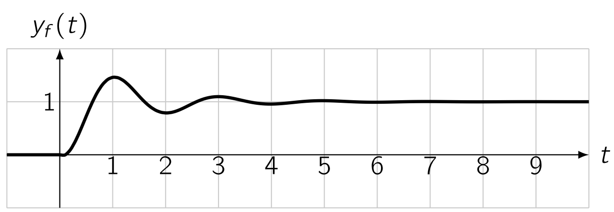
Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura a fianco, dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s^2+s+a},$$



dove i parametri K ed $a > 0$ sono parametri reali.

1. Determinare i valori di K e a che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
2. Determinare a sapendo che, se $K = 0$ e applicando un disturbo $d(t)$ a gradino unitario si osserva l'uscita $y_f(t)$ mostrata in figura.



3. Determinare l'errore $e(t)$ a regime in funzione di K sapendo che $r(t) = 2t$ per $t > 0$, $r(t) = 0$ per $t < 0$, e che $d(t) = \sin(t)$.

Soluzione 1:

Consideriamo la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa,

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{K}{s^3+s^2+as+K}.$$

La tabella di Routh corrispondente a questo sistema e' quindi

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & K \\ 1 & a-K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Considerando che i primi due elementi delle prime due righe sono positivi, e che bisogna avere permanenza del segno per tutti i valori della prima colonna, si ha che la stabilita' e' garantita nel caso in cui $a - K > 0$ e $K > 0$, quindi $0 < K < a$.

Soluzione 2:

Per $K = 0$ la funzione di trasferimento tra d e y é $G(s) = \frac{1}{s^2+s+a}$. Dalla figura si osserva che il guadagno a regime deve essere 1 e quindi $G(0) = 1$. Da cui segue che $a = 1$.

Soluzione 3:

Il calcolo degli andamenti a regime hanno senso solo per i valori di K che rendono BIBO stabile il sistema e quindi per $0 < K < 1$. Inoltre per il valore di a calcolato al punto precedente si ha

$$W_{de}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s}{s^3 + s^2 + s + K}$$

e

$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s^3 + s^2 + s}{s^3 + s^2 + s + K}$$

Inoltre, avendo due ingressi separati conviene applicare la sovrapposizione degli effetti. In piu' dettagli, si avra' $e(t) = e_r(t) + e_d(t)$ dove

1. il caso $r(t) = 2t$ (causale) con $d(t) = 0$ implica

$$E_r(s) = W_{re}(s)\frac{2}{s^2} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s^3 + s^2 + s + K)}$$

   e se ne facciamo la decomposizione ai fratti parziali, il denominatore di $E_r(s)$ ha una parte che corrisponde ad un gradino (l's) ed una parte che corrisponde a modi stabili (il $(s^3 + s^2 + s + K)$). A regime quindi resta quel gradino, la cui ampiezza si puo' calcolare con il teorema del valore finale,

$$\lim_{t\to+\infty} e_r(t) = \lim_{s\to 0} sE_r(s) = \frac{1}{K}.$$

2. invece il caso $r(t) = 0$ e $d(t) = \sin(t)$ implica usare la fedelta' sinusoidale, i.e., sappiamo che a regime si avra'

$$e_{d,\text{regime}}(t) = |W_{de}(j)| \sin\left(t + \angle W_{de}(j)\right).$$

   (notare che non e' vero che $e_d(t)$ e' uguale ad una sinusoide; c'e' un transiente da non dimenticarsi). Quindi, numericamente parlando,

$$|W_{de}(j)| = \frac{1}{1 - K}$$

   e

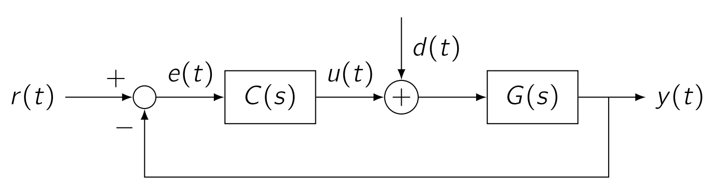
$$\angle W_{de}(j) = \frac{\pi}{2}.$$

Domanda 12

Si consideri lo schema a blocchi a fianco, e si supponga che

$$C(s) = \frac{k}{s} \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

dove $a,b > 0$



1. Determinare a,b in maniera che la risposta impulsiva associata a $G(s)$ sia $Ae^{-t}cos(2t + \phi)$ dove A, ϕ sono opportuni numeri reali.
2. Sia $G_{ry}(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$. Determinare i valori di K, a, e b che rendono BIBO stabile $G_{ry}(s)$.
3. Supponendo che $r(t) = 10$ e che $d(t) = t$, determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

Soluzione 1:

1. la risposta é del tipo $Ae^{-t}cos(2t+\phi)$ se e solo se $-1 \pm -2j$ sono poli di $G(s)$ e quindi sono zeri del suo denominatore s^2+as+b. Quindi $(s+1-2j)(s+1+2j) = s^2+2s+5 = s^2+as+b$. Quindi $a=2$ e $b=5$.

2. $T_{ry}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{\frac{K}{S}\frac{1}{s^2+as+b}}{1+\frac{K}{S}\frac{1}{s^2+as+b}} = \frac{K}{s(s^2+as+b)+K} = \frac{K}{s^3+as^2+bs+K}$

   Stabilitá per $0 < k < ab$

   pics/tabella_es1_23_4_18.png

3. $S_a^{T_{2y}} = \frac{a}{T_{2y}}\frac{\partial T_{2y}}{\partial a} = \frac{a(\cancel{s^3+as^2+bs+k})}{\cancel{k}}\frac{-\cancel{k}s^2}{[s^3+as^2+bs+k]^{\cancel{2}}} = \frac{-as^2}{s^3+as^2+bs+k}$

4. $T_{dg}(S) = \frac{G}{1+CCT} = \frac{\frac{1}{s^2+as+b}}{1+\frac{K}{S}\frac{1}{s^2+as+b}} = \frac{s}{s(s^2+as+b)+k}$

   Se $d(t)=0$ e $r(t)=0$ allora $y(t) \simeq T_{ry}(0)\cdot 10 = \frac{k}{k}\cdot 10 = 10$

   Se $r(t) < 0$ e $d(t) < t$ allora $D(s) < \frac{1}{s^2}$

   $Y(s) < T_{dy}(s)D(s) < \frac{s}{s(s^2+as+b)+k}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{[s(s^2+as+b)+k]s}$

   Svolgendo i tratti semplici $Y(s) = \frac{A}{s}+\sum_y \frac{C_{ij}}{(s-P_i)^j}$ dove P_i sono radici di $s(s^2+as+b)+k$ $y(t) = A+\sum^{ij}\frac{C_{ij}}{(j-1)!}t^{j-1}e^{P_i t} \simeq A$ perché i rimanenti termini convergono a zero per la stabilitá del sistema

   $y(t) \simeq A$ dove $Am = Y(s)\ s|_{s<0} = \frac{1}{s(s^2+as+b)+k}|_{s<0} = \frac{1}{K}$ (formula dei residui).