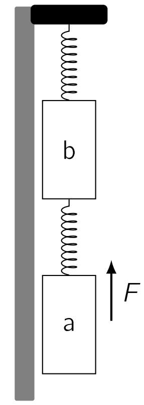
Domanda 1

Si consideri il sistema meccanico in figura, composto da due pesi di identica massa $m = 1$ che scorrono su un binario verticale (in grigio). I due pesi sono connessi tra di loro da una molla ideale con coefficiente elastico k e lunghezza a riposo L, e sono entrambi soggetti ad un attrito dinamico di coefficiente b dovuto allo scorrimento sul binario. Uno dei due pesi e' dotato di un motore che puo' esercitare una forza verticale F come in figura. L'altro e' invece collegato per mezzo di un'altra molla, ancora di coefficiente elastico k e lunghezza a riposo L ad una flangia fissa inamovibile che funziona da fine corsa per questa seconda massa. Si chiamino x_a ed x_b le posizioni lungo i rispettivi binari dei due pesi, e si fissi l'origine del sistema come le posizioni di equilibrio delle masse quando F e' identicamente nulla.



1. Si modelli il sistema, i.e., si scrivano opportune equazioni differenziali utili a calcolare l'evoluzione di x_a ed x_b nel tempo come funzione delle condizioni iniziali e del segnale $F(t)$, assumendo che queste quantita' siano sufficientemente piccole da garantire che la seconda massa non tocchi la flangia.
2. Si trovi, se necessario linearizzando anche le equazioni differenziali sopra, la funzione di trasferimento tra l'ingresso $F(t)$ e la posizione della prima massa x_a.
3. Si scriva, se necessario linearizzando anche le equazioni differenziali sopra, il sistema in spazio di stato, i.e., come $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu$, $y = C\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}$, y, A, B e C opportuni vettori, scalari, e matrici rispettivamente.

Soluzione 1:

Sistemi di riferimento: sia x_a che x_b positive verso l'alto.
Forze che agiscono su x_a:

- la propria mg verso il basso (e quindi negativa),
- F verso l'alto (e quindi positiva),
- il suo attrito $b\dot{x}_a$ (che si oppone al moto, e quindi negativa),
- la forza della molla tra le due masse, il cui modulo e direzione si trovano pensando che:
  - se x_a e' positiva tanto quanto x_b e' positiva allora la forza e' zero;
  - se x_b e' negativa tanto quanto x_a e' negativa allora la forza e' zero;
  - se x_a e' positiva ed x_b e' nulla allora la forza e' $-kx_a$;
  - se x_b e' positiva ed x_a e' nulla allora la forza e' $+kx_b$.

  Questo suggerisce che se sia x_a che x_b sono positive allora la forza deve essere $-k(x_a - x_b)$.

Quindi la prima ODE e'

$$m\ddot{x}_a = F - b\dot{x}_a - k(x_a - x_b).$$

Forze che agiscono su x_b:

- la propria mg verso il basso (e quindi negativa),
- il suo attrito $b\dot{x}_b$ (che si oppone al moto, e quindi negativa),
- la forza della molla tra m_a ed m_b, il cui modulo e direzione si trovano pensando che:
  - se x_b e' positiva tanto quanto x_a e' positiva allora la forza e' zero;
  - se x_a e' negativa tanto quanto x_b e' negativa allora la forza e' zero;
  - se x_b e' positiva ed x_a e' nulla allora la forza e' $-kx_b$;
  - se x_a e' positiva ed x_b e' nulla allora la forza e' $+kx_a$.

  Questo indica che se sia x_a che x_b sono positive allora la forza e' $-k(x_b - x_a)$;
- la forza della molla tra x_b e la flangia, il cui modulo e direzione si trovano pensando che:
  - se x_b e' positiva allora la forza e' negativa e pari a $-kx_b$.

Quindi la seconda ODE e'

$$m\ddot{x}_b = -b\dot{x}_b - k(x_b - x_a) - kx_b.$$

Come "double check" se m_a e' fissa in zero e $x_b = 1$ allora la forza esercitata dalle molle e' $-2k$, perche' entrambe spingerebbero m_b a tornare al suo equilibrio.
Si noti infine che se non ci fosse l'assunzione che la seconda massa non puo' arrivare a toccare la flangia allora la seconda ODE sarebbe da modificare.

Soluzione 2:

per trovare la funzione di trasferimento da $F(s)$ ad $X_a(s)$ si otterranno sicuramente delle equazioni contenenti $X_b(s)$. Conviene quindi trovare $X_b(s)$ come funzione di $X_a(s)$, e poi inserire questa relazione nelle equazioni tra $F(s)$ ad $X_a(s)$. Quindi (ed ignorando la dipendenza delle varie funzioni da s):

$$ms^2 X_b = -bsX_b - 2kX_b + kX_a$$

che implica

$$\left(ms^2 + bs + 2k\right) X_b = kX_a$$

o, in altre parole,

$$X_b = \frac{k}{ms^2 + bs + 2k} X_a.$$

Ora dalla prima ODE si ha

$$ms^2 X_a = F - bsX_a - kX_a + kX_b$$

che implica

$$\left(ms^2 + bs + k\right) X_a = F + kX_b$$

Per semplicita' di notazione sia quindi

$$\Delta_1 = ms^2 + bs + k, \qquad \Delta_2 = ms^2 + bs + k.$$

Usando queste relazioni, si ha

$$\Delta_1 X_a = F + kX_b = F + \frac{k^2}{\Delta_2} X_a.$$

Riarrangiando i termini,

$$\frac{\Delta_1 \Delta_2 - k^2}{\Delta_2} X_a = F$$

che indica che la funzione di trasferimento cercata sia

$$G(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_2 - k^2}.$$

Soluzione 3:

Scrivere il sistema in spazio di stato implica in primis scegliere lo stato del sistema – qui semplicemente x_a, $\dot{x}_a$, x_b, $\dot{x}_b$. Inoltre, $F = u$, ed y e' o x_a o x_b a seconda di che uscita serve considerare. Quindi, usando anche il fatto che $m = 1$,

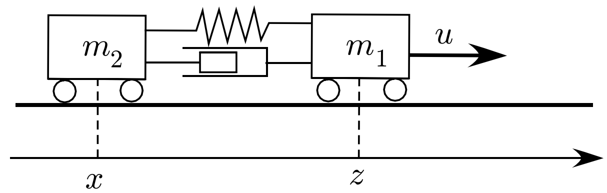
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -b & +k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ +k & 0 & -2k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

Inoltre, a seconda del fatto che y sia o x_a o x_b si ha

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Domanda 2

Si consideri il seguente sistema meccanico, composto da due carrelli di massa m_1 e m_2 di posizione z e x collegati tra loro tramite una molla e uno smorzatore, e dove sul secondo carrello agisce una forza esterna u.



Supponendo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L e che lo smorzatore sia ideale con costante di attrito b, e definendo $y(t) = z(t) - x(t)$,

1. determinare le equazioni del moto;
2. determinare l'evoluzione di equilibrio $x(t) = \overline{x}$, $z(t) = \overline{z}$ e $y(t) = \overline{y}$ in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = 0$;
3. definendo inoltre $\widetilde{u}(t) := u(t) - \overline{u}$, $\widetilde{x}(t) := x(t) - \overline{x}$, $\widetilde{z}(t) := z(t) - \overline{z}$ e $\widetilde{y}(t) := y(t) - \overline{y}$, determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $\widetilde{u}(t)$ e l'uscita $\widetilde{x}(t)$;
4. determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $\widetilde{u}(t)$ e l'uscita $\widetilde{y}(t)$;
5. discutere la stabilità BIBO delle due funzioni di trasferimento trovate;
6. scrivere il modello del sistema trovato sotto forma di un modello di stato, considerando come uscita $\widetilde{y}(t)$.

Soluzione 1:

Equazioni del moto:

$$m_2 x^{(2)} = -b(x^{(1)} - z^{(1)}) - k(x - z + L) \tag{1}$$
$$m_1 z^{(2)} = -b(z^{(1)} - x^{(1)}) - k(z - x - L) + u \tag{2}$$

Soluzione 2:

Assumendo che $u(t) = 0$ e $x(t) = \overline{x}$, $z(t) = \overline{z}$ costanti, le equazioni precedenti diventano

$$0 = 0 - k(\overline{x} - \overline{z} + L) \tag{3}$$
$$0 = 0 - k(\overline{z} - \overline{x} - L) + 0 \tag{4}$$

che porta alla relazione $\overline{z} = \overline{x} + L$ e quindi $\overline{y} = L$. Traducendo le equazioni sulle variabili $\widetilde{u}(t) := u(t) - \overline{u}$, $\widetilde{x}(t) := x(t) - \overline{x}$, $\widetilde{z}(t) := z(t) - \overline{z}$ e $\widetilde{y}(t) := y(t) - \overline{y}$ otteniamo

$$m_2 \widetilde{x}^{(2)} = -b(\widetilde{x}^{(1)} - \widetilde{z}^{(1)}) - k(\widetilde{x} - \widetilde{z}) \tag{5}$$
$$m_1 \widetilde{z}^{(2)} = -b(\widetilde{z}^{(1)} - \widetilde{x}^{(1)}) - k(\widetilde{z} - \widetilde{x}) + \widetilde{u} \tag{6}$$

Soluzione 3:

Passando alle trasformate di Laplace si ottiene

$$(m_2 s^2 + bs + k)\widetilde{X}(s) = (bs + k)\widetilde{Z}(s) \tag{7}$$

$$(m_1 s^2 + bs + k)\widetilde{Z}(s) = (bs + k)\widetilde{X}(s) + \widetilde{U}(s) \tag{8}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$\widetilde{Z}(s) = \frac{m_2 s^2 + bs + k}{bs + k}\widetilde{X}(s)$$

e sostituendo nella seconda

$$(m_1 s^2 + bs + k)\frac{m_2 s^2 + bs + k}{bs + k}\widetilde{X}(s) = (bs + k)\widetilde{X}(s) + \widetilde{U}(s)$$

da cui segue

$$((m_1 s^2 + bs + k)(m_2 s^2 + bs + k) - (bs + k)^2)\widetilde{X}(s) = (bs + k)\widetilde{U}(s).$$

Cio' implica che la fdt da $\widetilde{u}$ a $\widetilde{x}$ e'

$$G_{\widetilde{u}\to\widetilde{x}} = \frac{bs + k}{(m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)(bs + k))s^2}.$$

Soluzione 4:

osserviamo che siccome $L = \overline{z} - \overline{x}$, allora

$$\widetilde{y} = y - \overline{y} = z - x - L = z - x - \overline{z} + \overline{x} = (z - \overline{z}) - (x - barx) = \widetilde{z} - \widetilde{x}$$

e quindi

$$\widetilde{Y}(s) = \widetilde{Z}(s) - \widetilde{X}(s) = \frac{m_2 s^2 + bs + k}{bs + k}\widetilde{X}(s) - \widetilde{X}(s) \tag{9}$$

$$= \left(\frac{m_2 s^2 + bs + k}{bs + k} - 1\right)\widetilde{X}(s) \tag{10}$$

$$= \frac{m_2 s^2}{bs + k}\frac{bs + k}{(m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)(bs + k))s^2}\widetilde{U}(s) \tag{11}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)(bs + k)}\widetilde{U}(s) \tag{12}$$

La fdt da $\widetilde{u}$ a $\widetilde{y}$ e' quindi

$$G_{\widetilde{u}\to\widetilde{y}} = \frac{m_2}{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)(bs + k)}.$$

Soluzione 5:

avendo un polo nell'origine, $G_{\widetilde{u}\to\widetilde{x}}$ non e' BIBO stabile. Inoltre se i parametri m_1, m_2, b, k sono positivi, allora $G_{\widetilde{u}\to\widetilde{y}}$ ha il denominatore di secondo grado con coefficienti positivi. Per il criterio della permanenza del segno per polinomi di ordine 2 quindi ha entrambe le radici a parte reale negativa. Possiamo concludere che questa seconda fdt e' BIBO stabile.

Soluzione 6:

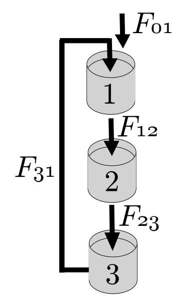
Ponendo $x_1 = \widetilde{x}, x_2 = \widetilde{x}^{(1)}, x_3 = z, x_4 = \widetilde{z}^{(1)}$ si arriva facilmente a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_2 & -b/m_2 & k/m_2 & b/m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_1 & b/m_1 & -k/m_1 & -b/m_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = [0] \tag{14}$$

Domanda 3

Si considerino quattro serbatoi come descritto dalla figura e siano $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ i volumi del liquido in ciascun serbatoio. Supponiamo che esistono i flussi:
$F_{12}(t) = 2x_1(t)$ dal serbatoio 1 al serbatoio 2,
$F_{23}(t) = f(x_2(t))$ dal serbatoio 2 al serbatoio 3,
$F_{31}(t) = u(t)$ dal serbatoio 3 al serbatoio 1, dove $u(t)$ e' un ingresso di controllo,
$F_{01}(t) = d(t)$ dall'esterno al serbatoio 1, dove $d(t)$ e' un ingresso di disturbo,
dove $f(x) = -\sqrt{x}$ se $x \leq 0$ e $f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$,



1. Scrivere le equazioni che descrivono la dinamica del liquido nei serbatoi.
2. Supponendo che $u(t) = \bar{u} = 9$ e che $d(t) = \bar{d} = 0$, trovare gli equilibri $x_1(t) = \bar{x}_1, x_2(t) = \bar{x}_2, x_3(t) = \bar{x}_3$.
3. Siano $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}, \tilde{d}(t) = d(t) - \bar{d}$ e $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \bar{x}_1, \tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \bar{x}_2, \tilde{x}_3(t) = x_3(t) - \bar{x}_3$. Trovare le funzioni di trasferimento tra gli ingressi $\tilde{u}(t)$ e $\tilde{d}(t)$ e l'uscita $y(t) = \tilde{x}_3(t)$ tramite la linearizzazione.

Soluzione 1:

① Per scrivere le ODE del sistema devo considerare le variazioni di liquido in ogni serbatoio:

Se il livello di liquido mi è dato da $x_n(t)$ allora la variazione di liquido dell'n-esimo serbatoio sarà $\dot{x}_n(t)$.

Ora per ogni serbatoio è necessario identificare le cause che generano una variazione di liquido:

① FLUSSI ENTRANTI ⇒ liquido che si aggiunge al serbatoio ⇒ dato che fa aumentare il liquido lo SOMMERÒ

② FLUSSI USCENTI ⇒ liquido che il serbatoio perde allora dato che fa diminuire lo sottrarrò.

In questo modo sarò in grado di ottenere le 3 equazioni del sistema. Perché 3? Perché ho 1 equazione per ogni oggetto che devo descrivere ⇒ 3 STATI $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ⇒ 3 EQUAZIONI.

Allora:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -F_{12} + F_{01} + F_{31} \\ \dot{x}_2(t) = F_{12} - F_{23} \\ \dot{x}_3(t) = F_{23} - F_{31} \end{cases}$$

Sostituisco con i valori forniti per i flussi

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + d(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - f(x_2(t)) \\ \dot{x}_3(t) = f(x_2(t)) - u(t) \end{cases} \quad \#$$

② Devo trovare gli equilibri per:

$u(t) = \bar{u} = 9$ $\quad d(t) = \bar{d} = 0$ $\quad x_1(t) = \bar{x}_1$

$x_2(t) = \bar{x}_2$ $\quad x_3(t) = \bar{x}_3$

Avendo posto $x_1, x_2, x_3 (t)$ come costanti allora le loro derivate saranno 0!

Soluzione 2:

Sostituisco allora all'equazione mandata nel punto 1 le ~~tutte~~ costanti e cerco i valori di equilibrio, cioè risolvo il sistema cercando di ottenere i valori $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$

$\dot{x}_1 = 0 \qquad \dot{x}_2 = 0 \qquad \dot{x}_3 = 0$

$$\begin{cases} 0 = -2\bar{x}_1 + 9 \\ 0 = 2\bar{x}_1 - f(\bar{x}_2) \\ 0 = f(\bar{x}_2) - 9 \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$ altrimenti $-\sqrt{x}$ se $x < 0$. Chiaramente deve essere $\sqrt{x}$ altrimenti la 3° equazione risulta impossibile (anche la 2°)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{9}{2} \\ 0 = 9 - \sqrt{\bar{x}_2} \rightarrow \\ 0 = \sqrt{\bar{x}_2} - 9 \rightarrow \end{cases} \Bigg\} \text{sono uguali}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{9}{2} \\ \bar{x}_2 = 81 \end{cases} \Rightarrow \forall \bar{x}_3$$

$\rightarrow$ Risolvendo il sistema non ho ottenuto nessuna condizione su $\bar{x}_3 \Rightarrow$ ho 1 GRADO di LIBERTÀ all'equilibrio!

(3) Pongo allora:

$\tilde{u} = u(t) - \bar{u} = u(t) - 9$

$\tilde{x}_1 = x_1(t) - \bar{x}_1 = x_1(t) - \frac{9}{2}$

$\tilde{x}_2 = x_2(t) - \bar{x}_2 = x_2(t) - 81$

$\tilde{x}_3 = x_3(t) \qquad \tilde{d} = d(t) - \bar{d} = d(t)$

$\bar{d} = 0$

Dato che $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}$ sono costanti allora ho che

$u(t) = \tilde{u} + \bar{u} \qquad \dot{\tilde{u}} = \dot{u}$

$x_1(t) = \tilde{x}_1 + \bar{x}_1 \qquad \dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_1 \qquad \dot{\tilde{d}} = \dot{d}$

$x_2(t) = \tilde{x}_2 + \bar{x}_2 \qquad \dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2$

$x_3(t) = \tilde{x}_3 + \bar{x}_3 \qquad \dot{\tilde{x}}_3 = \dot{x}_3$

$d(t) = \tilde{d} + \bar{d}$

Soluzione 3:

Sostituisco al sistema del punto ① le nuove variabili

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) + \tilde{d} + \bar{d} + \tilde{u} + \bar{u} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = 2(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) - f(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = f(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) - (\tilde{u} + \bar{u}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2\left(\tilde{x}_1 + \frac{9}{2}\right) + \tilde{d} + \tilde{u} + 9 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = 2\left(\tilde{x}_1 + \frac{9}{2}\right) - \sqrt{\tilde{x}_2 + \bar{x}_2} \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \sqrt{\tilde{x}_2 + \bar{x}_2} - \tilde{u} - 9 \end{cases}$$

Adesso dovrei passare a LAPLACE per ottenere la funzione di trasferimento MA ho 2 problemi:

① ci sono delle COSTANTI => NON posso fare Laplace

② NON ho un SISTEMA LINEARE (causa la $\sqrt{\cdot}$) => NON posso fare Laplace

Per risolvere il primo STEP è linearizzare la radice. Espando la funzione con TAYLOR

$\tilde{x}$ per come la abbiamo fino ad ora definita

$$f(\tilde{x} + \bar{x}) \simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\,\tilde{x}$$

$$\sqrt{\tilde{x}_2 + \bar{x}_2} \simeq \sqrt{\bar{x}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_2}}\,\tilde{x}_2$$

$\bar{x}_2 = 81$ da punto ②

$$\sqrt{\tilde{x}_2 + \bar{x}_2} \simeq 9 + \frac{1}{18}\tilde{x}_2$$

Sostituisco nuovamente

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2\tilde{x}_1 \cancel{-9} + \tilde{d} + \tilde{u} \cancel{+9} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = 2\tilde{x}_1 \cancel{+9} \cancel{-9} - \frac{1}{18}\tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \cancel{9} + \frac{1}{18}\tilde{x}_2 - \tilde{u} \cancel{-9} \end{cases}$$

$\boxed{\text{CHECK 1}}$ Si nota che dopo la linearizzazione, l'efficacia di aver cambiato sistema di coordinate con le $\tilde{x}$ mi permette,

Soluzione 4:

grazie alla soluzione di equilibrio del punto ② di rimuovere le costanti e poter fare la LAPLACE. Se si rimuovono tutte ⇒ ho un TEST che mi verifica la correttezza del punto ② (Almeno che il PUNTO ① sia giusto :)).

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2\tilde{x}_1 + \hat{d} + \tilde{u} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = 2\tilde{x}_1 - \frac{1}{18}\tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{1}{18}\tilde{x}_2 - \tilde{u} \end{cases} \xrightarrow[\text{LAPLACE}]{} \begin{cases} s\tilde{X}_1 = 2\tilde{X}_1 + \tilde{D} + \tilde{U} \\ s\tilde{X}_2 = 2\tilde{X}_1 - \frac{1}{18}\tilde{X}_2 \\ s\tilde{X}_3 = \frac{1}{18}\tilde{x}_2 - \tilde{U} \end{cases}$$

Adesso dato che mi viene richiesto $y = \tilde{x}_3$ come uscita e ingresso $\tilde{u}$ e $\tilde{d}$ per la funzione di trasferimento cerco di ottenere dal sistema una cosa del tipo:

$$X_3(s) = \frac{(\dots)\cdots(\dots)}{(\dots)\cdots(\dots)}\tilde{U} + \frac{(\dots)\cdots}{(\dots)(\dots)}\tilde{D}$$

$$\begin{cases} (s+2)\tilde{X}_1 = \tilde{D} + \tilde{U} \\ \left(s + \frac{1}{18}\right)\tilde{X}_2 = 2\tilde{X}_1 \\ s\tilde{X}_3 = \frac{1}{18}\tilde{x}_2 - \tilde{U} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{X}_1 = \frac{1}{s+2}\tilde{U} + \frac{1}{s+2}\tilde{D} \\ \tilde{X}_2 = \frac{1}{(s+1/18)}\cdot\left(\frac{2}{s+2}\tilde{U} + \frac{2}{s+2}\tilde{D}\right) \\ \dots \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

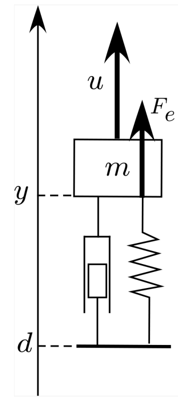
$$s\tilde{X}_3 = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(s+1/18)}\left(\frac{2}{s+2}\tilde{U} + \frac{2}{s+2}\tilde{D}\right) - \tilde{U}$$

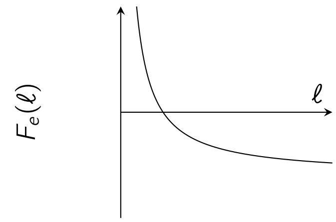
$$s\tilde{X}_3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(s+1/18)}\cdot\frac{1}{(s+2)}\tilde{U} - \tilde{U} + \frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s+1/18}\tilde{D}$$

$$\boxed{\tilde{X}_3 = \frac{1 - 9(s+1/18)(s+2)}{9\cdot s(s+1/18)(s+2)}\tilde{U} + \frac{1}{9s(s+2)(s+1/18)}\tilde{D}}$$

Domanda 4

Si consideri il sistema meccanico come in figura a fianco, i.e., una massa appoggiata a un asse in posizione $d(t)$ tramite una molla e uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b. Sulla massa agisce la forza di gravitá e una forza esterna $u(t)$. Supponiamo che la forza elastica F_e generata dalla molla dipenda dalla sua lunghezza ℓ secondo la funzione $F_e(\ell) = k\left(\frac{L}{\ell} - 1\right)$ (i.e., come in figura a fianco), dove k ed L sono costanti positive.





1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza agli ingressi costanti $u(t) = \bar{u}$, $d(t) = \bar{d}$.
3. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e le funzioni di trasferimento tra gli ingressi $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e $\tilde{d}(t) := d(t) - \bar{d}$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Soluzione 1:

$\boxed{ES. 1}$

1) Equazioni del moto

$$F_e = k(L/\ell - 1)$$
$$\ell = y - d$$

$$-m\, y^{(2)} - b(y^{(1)} - d^{(1)}) + F_e - mg + u = 0$$

$$-m\, y^{(2)} - b(y^{(1)} - d^{(1)}) + k\left(\frac{L}{y-d} - 1\right) - mg + u = 0$$

2) Equilibrio $y(t) = \bar{y}$ $d(t) = \bar{d}$ $\Rightarrow$ $y^{(2)} = y^{(1)} = 0$ $d^{(1)} = 0$

$$k\left(\frac{L}{\bar{y}-\bar{d}} - 1\right) - mg = 0 \Rightarrow \frac{L}{\bar{y}-\bar{d}} = \frac{mg}{k} \Rightarrow \bar{y} - \bar{d} = \frac{kL}{mg}$$

$$\bar{y} = \bar{d} + \frac{kL}{mg} = (\bar{d} = 0) = \frac{kL}{mg}$$

3) $$-m\,\tilde{y}^{(2)} - b(\tilde{y}^{(1)} - \tilde{d}^{(1)}) + k\left(\frac{L}{\bar{y} + \tilde{y} - \tilde{d}} - 1\right) - mg + u = 0$$

Siccome è non lineare, dobbiamo linearizzare

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(\bar{x} + \tilde{x}) \simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\tilde{x} = \frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{\bar{x}^2}\tilde{x}$$

$$\frac{1}{\bar{y} + \tilde{y} - \tilde{d}} \simeq \frac{1}{\bar{y}} - \frac{1}{\bar{y}^2}(\tilde{y} - \tilde{d})$$

Quindi il modello linearizzato è

$$-m\,\tilde{y}^{(2)} - b(\tilde{y}^{(1)} - \tilde{d}^{(1)}) + k\left(\frac{L}{\bar{y}} - \frac{1}{\bar{y}^2}(\tilde{y} - \tilde{d}) - 1\right) - mg + \tilde{u} = 0$$

$$-m\,\tilde{y}^{(2)} - b(\tilde{y}^{(1)} - \tilde{d}^{(1)}) + \cancel{k\left(\frac{L}{\bar{y}} - 1\right)} - \frac{kL}{\bar{y}^2}(\tilde{y} - \tilde{d}) \cancel{- mg} + \tilde{u} = 0$$

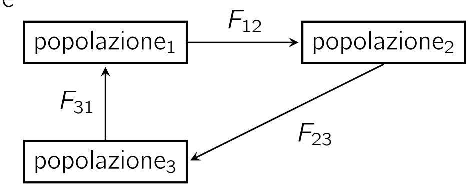
$$Y(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}] \qquad U(s) = \mathcal{L}[\tilde{u}] \qquad D(s) = \mathcal{L}[\tilde{d}]$$

$$\left(ms^2 + bs + \frac{kL}{\bar{y}^2}\right)Y(s) = \left(bs + \frac{kL}{\bar{y}^2}\right)D(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{bs + kL/\bar{y}^2}{ms^2 + bs + kL/\bar{y}^2}}_{W_{dy}(s)} D(s) + \underbrace{\frac{1}{ms^2 + bs + kL/\bar{y}^2}}_{W_{uy}(s)} U(s)$$

Domanda 5

Si considerino tre popolazioni di entita' $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ e tali per cui esiste, come schematizzato a fianco,



(i) un flusso $F_{12}(t) = ax_1(t)x_2(t)$ dalla popolazione 1 alla popolazione 2;

(ii) un flusso $F_{23}(t) = bx_2(t)$ dalla popolazione 2 alla popolazione 3;

(iii) un flusso controllabile $F_{31}(t) = u(t)$ dalla popolazione 3 alla popolazione 1.

1. Scrivere le equazioni differenziali che descrivono la dinamica di queste 3 popolazioni.
2. Supponendo che $u(t) = \bar{u} \neq 0$, trovare gli equilibri $x_1(t) = \bar{x}_1, x_2(t) = \bar{x}_2, x_3(t) = \bar{x}_3$.
3. Supponiamo ora che $a = b = 1$ e siano $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}, \tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \bar{x}_1, \tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \bar{x}_2, \tilde{x}_3(t) = x_3(t) - \bar{x}_3$. Trovare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t) = \tilde{x}_1(t)$ tramite la linearizzazione.

Soluzione 1:

ES. 1

$$\begin{cases} \dot x_1 = -a x_1 x_2 + u \\ \dot x_2 = a x_1 x_2 - b x_2 \\ \dot x_3 = b x_2 - u \end{cases}$$

Equilibri $u(t)=\bar u > 0$ $\quad x_1(t)=\bar x_1 \quad x_2(t)=\bar x_2 \quad x_3(t)=\bar x_3$

$$\begin{cases} 0 = -a\bar x_1 \bar x_2 + \bar u & \longrightarrow \bar x_1 = \dfrac{\bar u}{a \bar x_2} = \dfrac{b}{a} \\ 0 = a \bar x_1 \bar x_2 - b \bar x_2 & \longrightarrow 0 = a\dfrac{b}{a}\dfrac{\bar u}{b} - b\dfrac{\bar u}{b} = \bar u - \bar u = \\ 0 = b\bar x_2 - \bar u & \longrightarrow \bar x_2 = \bar u / b \neq 0 \end{cases}$$

Quindi $\boxed{\bar x_1 = \dfrac{b}{a}, \quad \bar x_2 = \dfrac{\bar u}{b} \quad \bar x_3 \text{ qualsiasi.}}$

Definiamo $\tilde x_1(t) = x_1(t) - \bar x_1 \quad \tilde x_2(t) = x_2(t) - \bar x_2 \quad \tilde x_3(t) = x_3(t) - \bar x_3$

$\tilde u(t) = u(t) - \bar u$

Sostituiamo $\tilde x_i$ al posto di x_i e $\tilde u$ al posto di u

$$\begin{cases} \dot{\tilde x}_1 = -a(\bar x_1 + \tilde x_1)(\bar x_2 + \tilde x_2) + \bar u + \tilde u = \overbrace{(-a\bar x_1 \bar x_2 + \bar u)}^{=0 \text{ per equilibrio}} - a\bar x_1 \tilde x_2 - a \bar x_2 \tilde x_1 - \overbrace{a \tilde x_1 \tilde x_2}^{\text{Trascurabile}} + \tilde u \\ \dot{\tilde x}_2 = a(\bar x_1 + \tilde x_1)(\bar x_2 + \tilde x_2) - b(\bar x_2 + \tilde x_2) = \underbrace{(a\bar x_1 \bar x_2 - b \bar x_2)}_{=0 \text{ per equilibrio}} + a\bar x_1 \tilde x_2 + a \bar x_2 \tilde x_1 - b\tilde x_2 + \underbrace{a\tilde x_1 \tilde x_2}_{\text{Trascurabile}} \\ \dot{\tilde x}_3 = b(\bar x_2 + \tilde x_2) - (\bar u + \tilde u) = \underbrace{(b\bar x_2 - \bar u)}_{=0 \text{ per equilibrio}} + b\tilde x_2 - \tilde u \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde x}_1 = -a\bar x_2 \tilde x_1 - a \bar x_1 \tilde x_2 + \tilde u = -\dfrac{a\bar u}{b}\tilde x_1 - b\tilde x_2 + \tilde u \\ \dot{\tilde x}_2 = a \bar x_2 \tilde x_1 + a\bar x_1 \tilde x_2 - b\tilde x_2 = \dfrac{a\bar u}{b}\tilde x_1 + \cancel{b\tilde x_2} - \cancel{b\tilde x_2} = \dfrac{a\bar u}{b}\tilde x_1 \\ \dot{\tilde x}_3 = b\tilde x_2 - \tilde u \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{Laplace}$$

$$\begin{cases} \left(s + \dfrac{a\bar u}{b}\right)\tilde X_1(s) = -b\tilde X_2(s) + \tilde U(s) & \cancel{\rightarrow \tilde X_1(s) = -\dfrac{b}{s+\frac{a\bar u}{b}}\tilde X_2(s) + \dfrac{1}{s+\frac{a\bar u}{b}}\tilde U(s)} \\ s\tilde X_2(s) = \dfrac{a\bar u}{b}\tilde X_1(s) & \rightarrow \tilde X_2(s) = \dfrac{a\bar u / b}{s}\tilde X_1(s) \\ s\tilde X_3(s) = b\tilde X_2(s) - \tilde U(s) \end{cases}$$

Soluzione 2:

$$\left(s+\frac{a\bar{u}}{b}\right)\tilde{X}_1(s) = -\frac{a\bar{u}}{s}\tilde{X}_1(s) + \tilde{U}(s)$$

$$s\left(s+\frac{a\bar{u}}{b}\right)\tilde{X}_1(s) = -a\bar{u}\tilde{X}_1(s) + s\hat{U}(s)$$

$$\left(s^2+\frac{a\bar{u}}{b}s+a\bar{u}\right)\tilde{X}_1(s) = s\hat{U}(s)$$

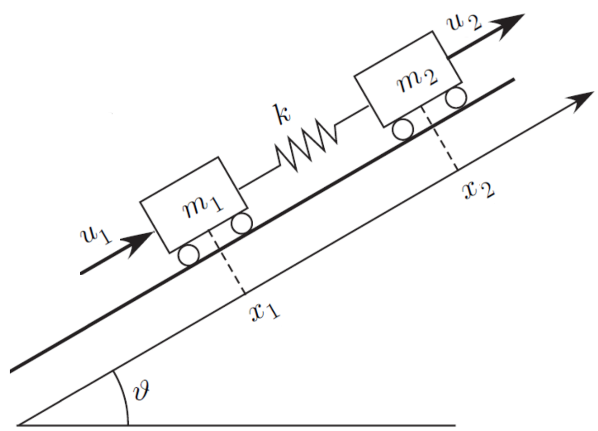
$$\tilde{X}_1(s) = \frac{s}{s^2+\frac{a\bar{u}}{b}s+a\bar{u}}\tilde{U}(s)$$

La funzione di trasferimento di $\tilde{u}$ o $\tilde{x}_1$ è

$$W_{\tilde{u},\tilde{x}_1}(s) = \frac{s}{s^2+\frac{a\bar{u}}{b}s+a\bar{u}} = (a=b=1) = \frac{s}{s^2+\bar{u}s+\bar{u}}$$

Domanda 6

Si consideri il sistema meccanico a fianco, formato da due carrelli che si muovono su di un piano inclinato collegati tra loro da una molla nonlineare, ed entrambi dotati del proprio motore, che agiscono con una forza u_1 sul primo carrello ed u_2 sul secondo. Per quanto riguarda la molla, la sua lunghezza a riposo é L, e se Δ é la deviazione dalla sua lunghezza a riposo, allora essa esercita una forza di modulo $k \cdot \Delta^3$ e segno opportuno.



1. Determinare le equazioni del moto del sistema;
2. Determinare gli equilibri del sistema quando il secondo ingresso é nullo e il primo ingresso é costante e tale da compensare l'effetto della forza di gravitá sui due carrelli, cioe' tale da mantenerli fermi;
3. Linearizzare le equazioni del moto attorno ad uno di questi equilibri;
4. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $\tilde{u}_1$ (deviazione di u_1 rispetto al valore di equilibrio) e l'uscita $\tilde{x}_2$ (deviazione di x_2 rispetto al valore di equilibrio).

Soluzione 1:

la molla esercita sul carrello 1 una forza pari a

$$k\left(x_2 - x_1 - L\right)^3$$

e sul carrello 2 l'opposto, i.e.,

$$-k\left(x_2 - x_1 - L\right)^3.$$

Considerando che per entrambi i carrelli la forza di gravitá agisce nello stesso verso, si ha in generale

$$m_1\ddot{x}_1 = k\left(x_2 - x_1 - L\right)^3 - m_1 g \sin\theta + u_1$$

e

$$m_2\ddot{x}_2 = -k\left(x_2 - x_1 - L\right)^3 - m_2 g \sin\theta + u_2$$

Soluzione 2:

in questo caso $u_2 = 0$, e se il primo ingresso compensa la gravitá significa che

$$u_1 = (m_1 + m_2) g \sin\theta.$$

Ogni posizione x_1 puó poi essere di equilibrio, ed in questo caso si ha che é come se il primo carrello fosse bloccato ed il secondo scendesse di un po' a causa della gravitá.
In pratica dato un generico $\overline{x}_1$ di equilibrio, deve essere

$$k\left(\overline{x}_2 - \overline{x}_1 - L\right)^3 + m_2 g \sin\theta = 0$$

e quindi

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + L - \sqrt[3]{\frac{m_2 g \sin\theta}{k}}.$$

Per semplicitá di notazione definiamo

$$\overline{L} = L - \sqrt[3]{\frac{m_2 g \sin\theta}{k}}.$$

Soluzione 3:

Per calcolare il sistema linearizzato serve linearizzare solo la parte relativa alla molla. Per questo bisogna calcolare le derivate della corrispondente equazione e valutarla nell'equlibrio attorno a cui si sta linearizzando. Usando il fatto che deve essere $\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + \overline{L}$, si ha

$$\left.\frac{\partial k\left(x_2 - x_1 - L\right)^3}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_2 - L} = -2k\left(x_2 - x_1 - L\right)\big|_{\overline{x}_1 = \overline{x}_2 - \overline{L}} = -2k(\overline{L} - L) = \sqrt{4 k m_2 g \sin\theta} =: \alpha$$

e l'opposto della stessa quantitá relativamente al secondo carrello. Le equazioni del moto linearizzate sono quindi

$$\ddot{\tilde{x}}_1 = \alpha(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + \tilde{u}_1, \qquad \ddot{\tilde{x}}_2 = -\alpha(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + \tilde{u}_2.$$

Notare come non ci si deve dimenticare di linearizzare anche gli ingressi.

Soluzione 4:

a questo punto la funzione di trasferimento si ottiene passando alle trasformate di Laplace, per cui

$$s^2 X_1 = \alpha(X_2 - X_1) + U_1, \qquad s^2 X_2 = -\alpha(X_2 - X_1) + U_2,$$

e quindi dalla seconda

$$X_2(s^2 + \alpha) = \alpha + U_2 \qquad \Longrightarrow \qquad X_2 = \frac{\alpha X_1 + U_2}{s^2 + \alpha}.$$

Sostituendo nella prima si ottiene quindi

$$s^2 X_1 = \alpha \left(\frac{\alpha X_1 + U_2}{s^2 + \alpha} - X_1 \right) + U_1 = \frac{-\alpha s^2}{s^2 + \alpha} X_1 + \frac{\alpha}{s^2 + \alpha} U_2 + U_1.$$

Conviene poi moltiplicare ambo i membri per il denominatore parziale, in modo da avere polinomi in s, i.e., scrivere

$$(s^2 + \alpha) s^2 X_1 = -\alpha s^2 X_1 + \alpha U_2 + (s^2 + \alpha) U_1$$

e infine trovare

$$X_1 = \frac{s^2 + \alpha}{s^4 + 2\alpha s^2} U_1 + \frac{\alpha}{s^4 + 2\alpha s^2} U_2.$$

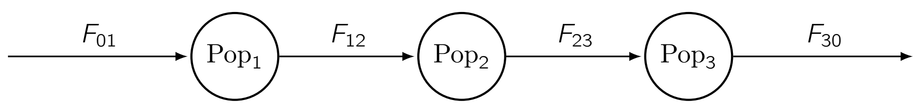
In questa espressione si vedono immediatamente le due funzioni di trasferimento dai due ingressi all'uscita (in questo caso x_1).

Domanda 7

Si considerino tre popolazioni di entitá $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ per cui esiste:

(i) un flusso $F_{01}(t) = u(t)$ dall'esterno alla popolazione 1;
(ii) un flusso $F_{12}(t) = a x_1(t)$ dalla popolazione 1 alla popolazione 2;
(iii) un flusso $F_{23}(t) = b x_2(t) x_3(t)$ dalla popolazione 2 alla popolazione 3;
(iv) un flusso $F_{30}(t) = c x_3(t)$ dalla popolazione 3 all'esterno,

come nello schema sotto.



Si assuma che $u(t)$ sia una grandezza controllabile.

1. Scrivere le equazioni differenziali che descrivono la dinamica delle popolazioni.
2. Supponendo che $u(t) = \overline{u} \neq 0$, trovare gli equilibri $x_1(t) = \overline{x}_1, x_2(t) = \overline{x}_2, x_3(t) = \overline{x}_3$.
3. Supponiamo ora che $\tilde{u}(t) = u(t) - \overline{u}, \widetilde{x}_1(t) = x_1(t) - \overline{x}_1, \widetilde{x}_2(t) = x_2(t) - \overline{x}_2, \widetilde{x}_3(t) = x_3(t) - \overline{x}_3$. Trovare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t) = \widetilde{x}_2(t)$ tramite linearizzazione.

Soluzione 1:

1) $\dot{x}_1 = u - a x_1$

$\dot{x}_2 = a x_1 - b x_2 x_3$

$\dot{x}_3 = b x_2 x_3 - c x_3$

2) Equilibri

$$\begin{cases} 0 = \bar{u} - a\bar{x}_1 \\ 0 = a\bar{x}_1 - b\bar{x}_2\bar{x}_3 \\ 0 = b\bar{x}_2\bar{x}_3 - c\bar{x}_3 \end{cases} \longrightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}/a \neq 0 \quad \text{dato che } \bar{u} \neq 0$$

$$\begin{cases} \bar{u} = a\bar{x}_1 = b\bar{x}_2\bar{x}_3 \\ c\bar{x}_3 = b\bar{x}_2\bar{x}_3 \end{cases} \rightarrow \bar{u} = c\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_3 = \frac{\bar{u}}{c} \neq 0$$

$$\bar{u} = c\bar{x}_3 = b\bar{x}_2\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{b\bar{x}_3} = \frac{\bar{u}}{b\,\bar{u}/c} = \frac{c}{b}$$

Quindi $x_1 = \frac{\bar{u}}{a}$, $\bar{x}_2 = \frac{c}{b}$, $\bar{x}_3 = \frac{\bar{u}}{c}$ $\quad \bar{u} \neq 0$ qualsiasi

3) Linearizzazione $x_1 = \bar{x}_1 + \tilde{x}_1$ $\quad x_2 = \bar{x}_2 + \tilde{x}_2$ $\quad x_3 = \bar{x}_3 + \tilde{x}_3$ $\quad u = \bar{u} + \tilde{u}$

$$x_2 x_3 \simeq \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\tilde{x}_2 + \bar{x}_2\tilde{x}_1$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} - \cancel{a\bar{x}_1} - a\tilde{x}_1 = \tilde{u} - a\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \cong \cancel{a\bar{x}_1} + a\tilde{x}_1 - \cancel{b\bar{x}_2\bar{x}_3} - b\bar{x}_3\tilde{x}_2 - b\bar{x}_2\tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \cong \cancel{b\bar{x}_2\bar{x}_3} + b\bar{x}_2\tilde{x}_3 + b\bar{x}_3\tilde{x}_2 - \cancel{c\bar{x}_3} - c\tilde{x}_3 \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace

$$s\tilde{X}_1(s) = \tilde{U}(s) - a\tilde{X}_1(s) \quad \rightarrow \tilde{X}_1(s) = \frac{1}{s+a}\tilde{U}(s)$$

$$s\tilde{X}_2(s) = a\tilde{X}_1(s) - b\bar{x}_3\tilde{X}_2(s) - b\bar{x}_2\tilde{X}_3(s)$$

$$s\tilde{X}_3(s) = b\bar{x}_3\tilde{X}_2(s) + b\bar{x}_2\tilde{X}_3(s) - c\tilde{X}_3(s) \longrightarrow \tilde{X}_3(s) = \frac{b\bar{x}_3}{s + \cancel{c} - \cancel{b\bar{x}_2}}\tilde{X}_2(s) = \frac{b\bar{u}/c}{s}\tilde{X}_2(s)$$

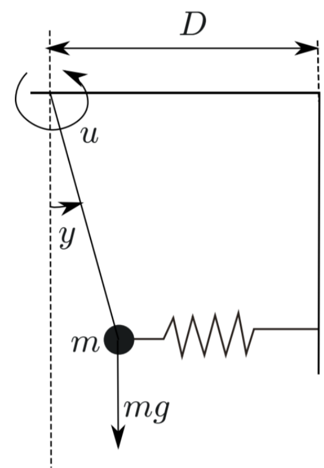
$$s\tilde{X}_2 = \frac{a}{s+a}\tilde{U} - b\frac{\bar{u}}{c}\tilde{X}_2 - b\frac{c}{b}\frac{b\bar{u}/c}{s}\tilde{X}_2$$

$$\left[s + \frac{b\bar{u}}{c} + \frac{b\bar{u}}{s}\right]\tilde{X}_2 = \frac{a}{s+a}\tilde{U}$$

$$\frac{\tilde{X}_2}{\tilde{U}} = \frac{a}{s+a}\,\frac{cs}{cs^2 + b\bar{u}s + b\bar{u}c} = \frac{ac\,s}{(s+a)(cs^2 + b\bar{u}s + b\bar{u}c)}$$

Domanda 8

Si consideri il sistema meccanico in figura a fianco, i.e., un pendolo di lunghezza l con massa m concentrata alla sua estremita' incernierato al soffitto a distanza D dalla parete e collegato ad essa con una molla in modo che questa resti orizzontale. Supponiamo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L. Supponiamo che al pendolo sia applicata una coppia di ingresso u e che l'uscita sia l'angolo y.

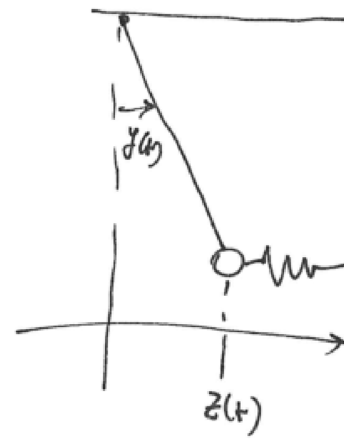


1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponendo che $u(t) = 0$, determinare D tale che $y(t) = 0$ sia evoluzione di equilibrio.
3. Determinare la funzione di trasferimento del sistema dall' ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ supponendo che $y(t), u(t)$ siano piccoli.
4. Per quali valori di l questa funzione di trasferimento e' BIBO stabile?

Soluzione 1:

1) Equazioni del moto.

Il momento di inerzia è $J = ml^2$



$$J\ddot{y} = -mgl \sin y + u - K(z(t) - D + L)\, l \cos y$$

dove $z = l \sin y$

$$\boxed{J\ddot{y} = -mgl \sin y + u - k(l \sin y - D + L)\, l \cos y}$$

2) Equilibrio $y(t) = 0$ $u(t) = 0$

$$0 = -\cancel{mgl \sin 0} + \cancel{0} - k(\cancel{l \sin 0} - D + L)\, l \cos 0$$

$$0 = -k(-D+L)\, l \quad \Rightarrow \boxed{D = L}$$

3) Se y è piccolo allora $\sin y \simeq y$ e $\cos y \simeq 1$

$$J\ddot{y} = -mgl\, y + u - k(l y \cancel{-D+L})\, l$$

$$J\ddot{y} = -mgl\, y - kl^2 y + u$$

Facendo la Laplace trasformata $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ $U(s) = \mathcal{L}[u]$ otteniamo

$$s^2 J\, Y(s) = -mgl\, Y(s) - kl^2 Y(s) + U(s)$$

$$(s^2 + mgl + kl^2)\, Y(s) = U(s)$$

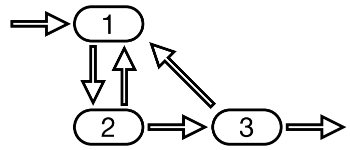
$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + mgl + kl^2}\, U(s)$$

4) Non è mai BIBO stabile

Domanda 9

Si considerino quattro serbatoi come descritto dalla figura a fianco, e siano $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ i volumi del liquido in ciascuno dei serbatoi. Supponiamo che esistano i flussi:

- $F_{01}(t) = u(t)$ dall'esterno al serbatoio 1, dove $u(t)$ e' un ingresso di controllo,
- $F_{30}(t) = d(t)$ dal serbatoio 3 all'esterno, dove $d(t)$ e' un ingresso di disturbo,
- $F_{21}(t) = f(x_2(t))$ dal serbatoio 2 al serbatoio 1, dove $f(x)$ e' una generica funzione nonlineare,
- $F_{12}(t) = x_1(t)$ dal serbatoio 1 al serbatoio 2,
- $F_{23}(t) = x_2(t)$ dal serbatoio 2 al serbatoio 3,
- $F_{31}(t) = x_3(t)$ dal serbatoio 3 al serbatoio 1.

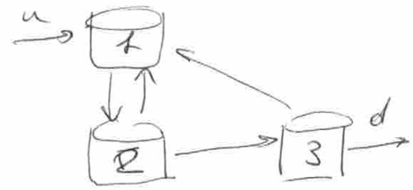


1. Scrivere le equazioni che descrivono la dinamica del liquido nei serbatoi.
2. Supponendo che $u(t) = \overline{u} = 1$ e che $d(t) = \overline{d} = 1$, trovare gli equilibri $x_1(t) = \overline{x}_1, x_2(t) = \overline{x}_2, x_3(t) = \overline{x}_3$.
3. Siano $\widetilde{u}(t) = u(t) - \overline{u}$, $\widetilde{d}(t) = d(t) - \overline{d}$ e $\widetilde{x}_1(t) = x_1(t) - \overline{x}_1$, $\widetilde{x}_2(t) = x_2(t) - \overline{x}_2$, $\widetilde{x}_3(t) = x_3(t) - \overline{x}_3$. Trovare le funzioni di trasferimento tra gli ingressi $\widetilde{u}(t)$ e $\widetilde{d}(t)$ e l'uscita $y(t) = \widetilde{x}_1(t)$ tramite la linearizzazione. Si tratti il valore della derivata di $f(\cdot)$ attorno al punto di linearizzazione come un parametro a.

Soluzione 1:

$\boxed{\text{ES. 1}}$

Consideriamo 3 serbatoi



$F_{01} = u \qquad F_{30} = d$

$F_{12} = x_1 \qquad F_{23} = x_2$

$F_{21} = f(x_2) \qquad F_{31} = x_3 \qquad y = x_1 - \bar{x}_1$

Equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + f(x_2) + u + x_3 \\ \dot{x}_2 = +x_1 - f(x_2) - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 - d \end{cases}$$

Equilibri con $u = d = 1$

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_1 + f(\bar{x}_2) + \bar{x}_3 + 1 \\ 0 = \bar{x}_1 - f(\bar{x}_2) - \bar{x}_2 \\ 0 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3 - 1 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= f(\bar{x}_2) + \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 &= \bar{x}_2 - 1 \end{aligned}$$

Sostituendo nella prima equazione $0 = \underbrace{-\cancel{f(\bar{x}_2)} - \cancel{\bar{x}_2}}_{-\bar{x}_1} + \cancel{f(\bar{x}_2)} + \cancel{\bar{x}_2} - \cancel{1} + \cancel{1} = 0$

quindi non abbiamo vincoli su $\bar{x}_2$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\bar{x}_1 - \tilde{x}_1 + f(\bar{x}_2) + f'(\bar{x}_2)\tilde{x}_2 + \bar{x}_3 + \tilde{x}_3 + \bar{u} + \tilde{u} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \bar{x}_1 + \tilde{x}_1 - f(\bar{x}_2) - f'(\bar{x}_2)\tilde{x}_2 - \bar{x}_2 - \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \bar{x}_2 + \tilde{x}_2 - \bar{x}_3 - \tilde{x}_3 - \bar{d} - \tilde{d} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1 + \overbrace{f'(\bar{x}_2)}^{a}\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 - f'(\bar{x}_2)\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - \tilde{d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 + a\tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 + \tilde{U} \\ s\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1 - a\tilde{X}_2 - \tilde{X}_2 \\ s\tilde{X}_3 = \tilde{X}_2 - \tilde{X}_3 - \tilde{D} \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \frac{1}{s+1}\left(a\tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 + \tilde{U}\right) \\ \tilde{X}_2 &= \frac{1}{s+1+a}\tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_3 &= \frac{1}{s+1}\left(\tilde{X}_2 - \tilde{D}\right) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1+a}\tilde{X}_1 - \tilde{D}\right) \end{aligned}$$

Sostituiamo nella prima

$$\tilde{X}_1 = \frac{1}{s+1}\frac{a}{s+1+a}\tilde{X}_1 + \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1+a}\tilde{X}_1 - \tilde{D}\right) + \frac{1}{s+1}\tilde{U}$$

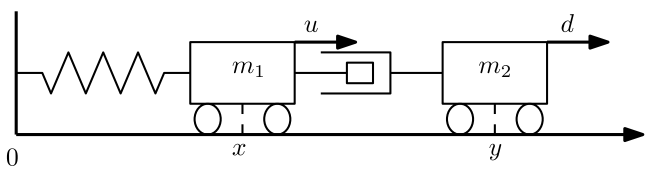
$$(s+1)^2(s+1+a)\tilde{X}_1 = a(s+1)\tilde{X}_1 + \tilde{X}_1 - (s+1+a)\tilde{D} + (s+1)(s+1+a)\tilde{U}$$

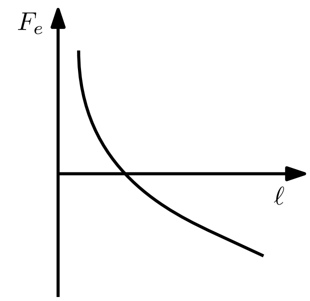
$$Y = \tilde{X}_1 = \frac{-(s+1+a)}{(s+1)^2(s+1+a) - a(s+1) - 1}\tilde{D} + \frac{(s+1)(s+1+a)}{(s+1)^2(s+1+a) - a(s+1) - 1}\tilde{U}$$

$$= \frac{-(s+1+a)}{(s^2 + (a+3)s + (a+3))s}\tilde{D} + \frac{(s+1)(s+1+a)}{(s^2 + (a+3)s + (a+3))s}\tilde{U}$$

Domanda 10

Si consideri il sistema meccanico in figura, composto da due carrelli di massa m_1 e m_2 le cui posizioni sono indicate come $x(t)$ e $y(t)$. Il primo carrello é collegato alla parete da una molla ed al secondo tramite uno smorzatore. Sul primo carrello agisce una forza $u(t)$ mentre sul secondo una forza di disturbo $d(t)$. Inoltre, lo smorzatore e' ideale con costante di attrito b, mentre la molla genera una forza elastica F_e che dipende dalla sua lunghezza ℓ secondo la funzione $F_e = k\left(\frac{L}{\ell} - 1\right)$ dove k, L sono costanti positive.





1. determinare le equazioni del moto del sistema,
2. determinare l'equilibrio $x(t) = \overline{x}$, $y(t) = \overline{y}$ che corrisponde agli ingressi costanti $u(t) = \overline{u}$, $d(t) = 0$,
3. determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio,
4. determinare le funzioni di trasferimento tra gli ingressi $\widetilde{u}(t) := u(t) - \overline{u}$ e $d(t)$ e l'uscita $\widetilde{y}(t) := y(t) - \overline{y}$.

Soluzione 1:

ES 1

1) Equazioni del moto

$$\begin{cases} m_1 x^{(2)} = k\left(\frac{L}{x} - 1\right) - b\left(x^{(1)} - y^{(1)}\right) + u \\ m_2 y^{(2)} = -b\left(y^{(1)} - x^{(1)}\right) + d \end{cases}$$

2) Equilibrio $x(t) = \bar{x}$ $y(t) = \bar{y}$ $u(t) = \bar{u}$ $d(t) = 0$

$$\begin{cases} 0 = k\left(\frac{L}{\bar{x}} - 1\right) + \bar{u} \Rightarrow \frac{L}{\bar{x}} = -\frac{\bar{u}}{k} + 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{kL}{k - \bar{u}} \\ 0 = 0 + 0 \end{cases} \qquad \bar{u} < k$$

3) Linearizzazione

$$f(x) \triangleq k\left(\frac{L}{x} - 1\right) \qquad f'(x) = -\frac{kL}{x^2}$$

$$f(\bar{x} + \tilde{x}) \simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\tilde{x} = k\left(\frac{L}{\bar{x}} - 1\right) - \frac{kL}{\bar{x}^2}\tilde{x}$$

Sostituendo

$$\begin{cases} m_1 \tilde{x}^{(2)} \simeq \cancel{k\left(\frac{L}{\bar{x}} - 1\right)} - \frac{kL}{\bar{x}^2}\tilde{x} - b\left(\tilde{x}^{(1)} - \tilde{y}^{(1)}\right) + \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} \\ m_2 \tilde{y}^{(2)} = -b\left(\tilde{y}^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}\right) + d \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace

$$\begin{cases} m_1 s^2 \tilde{X} = -\frac{kL}{\bar{x}^2}\tilde{X} - bs\tilde{X} + bs\tilde{Y} + \tilde{U} \\ m_2 s^2 \tilde{Y} = -bs\tilde{Y} + bs\tilde{X} + D \end{cases}$$

$$\left(m_1 s^2 + bs + \frac{kL}{\bar{x}^2}\right)\tilde{X} = bs\tilde{Y} + \tilde{U} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{bs\tilde{Y} + \tilde{U}}{m_1 s^2 + bs + kL/\bar{x}^2}$$

Sostituendo

$$m_2 s^2 \tilde{Y} = -bs\tilde{Y} + bs\frac{bs\tilde{Y} + \tilde{U}}{m_1 s^2 + bs + kL/\bar{x}^2} + D$$

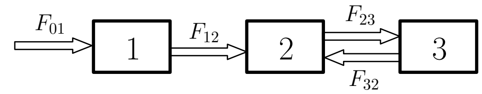
$$\left(m_2 s^2 + bs\right)\left(m_1 s^2 + bs + kL/\bar{x}^2\right)\tilde{Y} = b^2 s^2 \tilde{Y} + bs\tilde{U} + \left(m_1 s^2 + bs + \frac{kL}{\bar{x}^2}\right)\tilde{D}$$

$$W_{\tilde{u}\tilde{y}}(s) = \frac{bs}{\left(m_2 s^2 + bs\right)\left(m_1 s^2 + bs + \frac{kL}{\bar{x}^2}\right) - b^2 s^2} \qquad \tilde{u} \rightarrow \tilde{y}$$

$$W_{d\tilde{y}}(s) = \frac{m_1 s^2 + bs + kL/\bar{x}^2}{\left(m_2 s^2 + bs\right)\left(m_1 s^2 + bs + \frac{kL}{\bar{x}^2}\right) - b^2 s^2} \qquad d \rightarrow \tilde{y}$$

Domanda 11

Si considerino tre serbatoi come descritto dalla figura a fianco, con $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ i volumi del liquido in ciascun serbatoio, e caratterizzato dai seguenti flussi:



- $F_{01}(t) = d(t)$ dall'esterno al serbatoio 1, dove $d(t)$ e' un ingresso di disturbo,
- $F_{12}(t) = ax_1(t)x_2(t)$ dal serbatoio 1 al serbatoio 2, dove $a > 0$,
- $F_{23}(t) = bx_2(t)$ dal serbatoio 2 al serbatoio 3, dove $b > 0$,
- $F_{32}(t) = u(t)$ dal serbatoio 3 al serbatoio 2, dove $u(t)$ e' un ingresso di controllo.

1. Scrivere le equazioni che descrivono la dinamica del liquido nei serbatoi.
2. Supponendo che $u(t) = \overline{u} = 1$ e che $d(t) = \overline{d} = 0$, trovare gli equilibri $x_1(t) = \overline{x}_1$, $x_2(t) = \overline{x}_2$, $x_3(t) = \overline{x}_3$.
3. Siano $\widetilde{u}(t) = u(t) - \overline{u}$, $\widetilde{d}(t) = d(t) - \overline{d}$ e $\widetilde{x}_1(t) = x_1(t) - \overline{x}_1$, $\widetilde{x}_2(t) = x_2(t) - \overline{x}_2$, $\widetilde{x}_3(t) = x_3(t) - \overline{x}_3$. Trovare le funzioni di trasferimento tra gli ingressi $\widetilde{u}(t)$ e $\widetilde{d}(t)$ e l'uscita $y(t) = \widetilde{x}_3(t)$ tramite la linearizzazione.

Soluzione 1:

Notare che qui non c'e' un typo che invece c'e' sulle note successive

$$\begin{cases} \tilde{x}_1^{(1)} = -\frac{a}{b}\tilde{x}_1 + \tilde{d} \\ \tilde{x}_2^{(1)} = \frac{a}{b}\tilde{x}_1 - \cancel{b\bar{x}_2} - b\tilde{x}_2 + \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} \\ \tilde{x}_3^{(1)} = \cancel{b\bar{x}_2} + b\tilde{x}_2 - \cancel{\bar{u}} - \tilde{u} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1^{(1)} = -\frac{a}{b}\tilde{x}_1 + \tilde{d} \\ \tilde{x}_2^{(1)} = \frac{a}{b}\tilde{x}_1 - b\tilde{x}_2 + \tilde{u} \\ \tilde{x}_3^{(1)} = b\tilde{x}_2 - \tilde{u} \end{cases}$$

Passando alle Laplace Trasformate

$$\begin{cases} s\tilde{X}_1 = -\frac{a}{b}\tilde{X}_1 + \tilde{D} & \longrightarrow \tilde{X}_1 = \frac{1}{s+a/b}\tilde{D} \\ s\tilde{X}_2 = \frac{a}{b}\tilde{X}_1 - b\tilde{X}_2 + \tilde{U} & \longrightarrow \tilde{X}_2 = \frac{1}{s+b}\left[\frac{a}{b}\tilde{X}_1 + \tilde{U}\right] = \frac{a/b}{(s+b)(s+a/b)}\tilde{D} + \frac{1}{s+b}\tilde{U} \\ s\tilde{X}_3 = b\tilde{X}_2 - \tilde{U} & \end{cases}$$

$$Y = \tilde{X}_3 = \frac{b}{s}\tilde{X}_2 - \frac{1}{s}\tilde{U} = \frac{a}{s(s+b)(s+a/b)}\tilde{D} + \frac{b}{s(s+b)}\tilde{U} - \frac{1}{s}\tilde{U}$$

$$W_{uy}(s) = \frac{b}{s(s+b)} - \frac{1}{s} = \frac{\cancel{b} - s - \cancel{b}}{s(s+b)} = -\frac{1}{s+b} \qquad W_{dy}(s) = \frac{a}{s(s+b)(s+a/b)}$$

Soluzione 2:

Notare che qui c'e' un typo nella soluzione

ES.1

1)
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -a x_1 x_2 + d \\ x_2^{(1)} = a x_1 x_2 - b x_2 + u \\ x_3^{(1)} = b x_2 - u \end{cases}$$

2) Equilibrio

$x_i(t) = \bar x_i \qquad u(t) = \bar u \qquad d(t) = \bar d = 0$

$$\begin{cases} 0 = -a\bar x_1 \bar x_2 & \Rightarrow \bar x_1 = 0 \text{ dato che } \bar x_2 \neq 0 \\ 0 = a\bar x_1 \bar x_2 - b\bar x_2 + \bar u & \Rightarrow 0 = 0 \text{ Nessuna condizione extra} \\ 0 = b\bar x_2 - \bar u & \Rightarrow \bar x_2 = \bar u / b \neq 0 \text{ essendo } \bar u \neq 0 \text{ per ipotesi} \end{cases}$$

Quindi equilibrio è $\bar x_1 = 0$, $\bar x_2 = \bar u / b$, $\bar x_3$ qualsiasi

Essendo $\bar u = 1$ allora $\bar x_1 = 0$, $\bar x_2 = 1/b$, $\bar x_3 =$ qualsiasi

3) Osservo che $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \simeq f(\bar x_1, \bar x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar x_1, \bar x_2)\tilde x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar x_1, \bar x_2)\tilde x_2$

$= \bar x_1 \bar x_2 + \bar x_2 \tilde x_1 + \bar x_1 \tilde x_2 = \frac{1}{b}\tilde x_1$

Quindi la linearizzazione è

$$\begin{cases} \tilde x_1^{(1)} = -\frac{a}{b}\tilde x_1 + \tilde d \\ \tilde x_2^{(1)} = \frac{a}{b}\tilde x_2 - \cancel{b\bar x_2} - b\tilde x_2 + \cancel{\bar u} + \tilde u \\ \tilde x_3^{(1)} = \cancel{b\bar x_2} + b\tilde x_2 - \cancel{\bar u} - \tilde u \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tilde x_1^{(1)} = -\frac{a}{b}\tilde x_2 + \tilde d \\ \tilde x_2^{(1)} = \frac{a}{b}\tilde x_2 - b\tilde x_2 + \tilde u \\ \tilde x_3^{(1)} = b\tilde x_2 - \tilde u \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace

$$\begin{cases} s\tilde X_1 = -\frac{a}{b}\tilde X_2 + \tilde D \\ s\tilde X_2 = \frac{a}{b}\tilde X_2 - b\tilde X_2 + \tilde U & \longrightarrow \tilde X_2 = \frac{1}{s - \frac{a}{b} + b}\tilde U \\ s\tilde X_3 = b\tilde X_2 - \tilde U & \longrightarrow \tilde X_3 = \frac{b}{s}\tilde X_2 - \frac{1}{s}\tilde U = \frac{b}{s}\frac{1}{s - \frac{a}{b} + b}\tilde U - \frac{1}{s}\tilde U \end{cases}$$

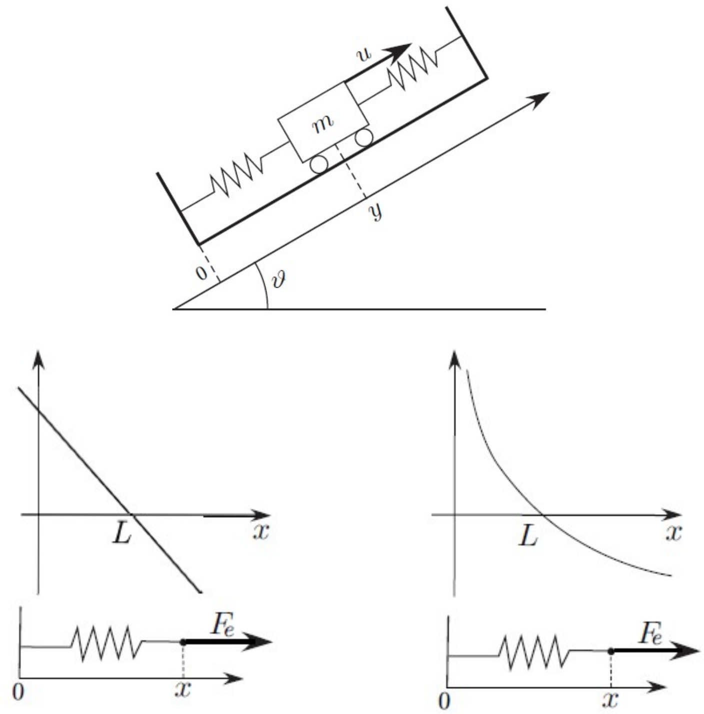
$$Y = \tilde X_3 = \frac{\cancel{b} - s + \frac{a}{b} - \cancel{b}}{s\left(s - \frac{a}{b} + b\right)}\tilde U = -\frac{s - \frac{a}{b}}{s\left(s - \frac{a}{b} + b\right)}\tilde U$$

Quindi le due funzioni di trasferimento sono

$$W_{\tilde u, y}(s) = \frac{s - a/b}{s(s - a/b + b)} \qquad W_{\tilde d, y}(s) = 0$$

Domanda 12

Si consideri il sistema meccanico a fianco, composto da un carrello di massa m che si muove su di un piano inclinato sul quale agisce una forza u, attaccato alle pareti con due molle.



1. Determinare le equazioni del moto supponendo che entrambe le molle sono ideali con costante di elasticitá k e lunghezza a riposo L.
2. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \overline{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.
3. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\widetilde{y}(t) := y(t) - \overline{y}$.
4. Determinare la risposta impulsiva del sistema corrispondente a tale funzione di trasferimento.
5. Supponiamo ora di togliere la molla destra, e sostituire quella sinistra con una nonlineare che genera una forza secondo la legge

$$F_e = k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L}\right)$$

graficamente visualizzabile nella parte destra della figura a fianco (per confronto la parte sinistra della figura mostra il caso ideale $F_e = -k(x - L)$, dove x é la lunghezza della molla e L é la lunghezza a riposo della molla.). Determinare le nuove equazioni del moto, l' evoluzione di equilibrio $y(t) = \overline{y}$ in corrispondenza all' ingresso $u(t) = 0$, e le equazioni del sistema linearizzato attorno a tale equilibrio.

Soluzione 1:

1. $-m\ddot{y} - k(y-L) - k\left(y - y_0 + L\right) + u - mg\sin\theta = 0$

2. $y(t) = \overline{y} \quad u(t) = 0$

   $-k(\overline{y} - \cancel{L}) - k\left(\overline{y} - y_0 + \cancel{L}\right) - \text{mg}\sin\theta = 0$

   $\overline{y} = \frac{ky_0 - mg\sin\theta}{2k}$

3. $\widetilde{y}(t) = y(t) - \overline{y} \qquad \ddot{\widetilde{y}} - \ddot{y} \qquad y = \overline{y} + \widetilde{y}$

   $-m\ddot{\widetilde{y}} - k(\overline{y} + \widetilde{y} - L) - k\left(\overline{y} + \widetilde{y} - y_0 + L\right) + u - mg\sin\theta = 0$

   $-m\ddot{\widetilde{y}} - 2k\widetilde{y} + u - \cancel{k(\overline{y} - L)} - \cancel{k\left(\overline{y} - y_0 + L\right)} - \cancel{mg\sin\theta} = 0.$

   $\widetilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\widetilde{y}] \quad U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$

   $\left(-ms^2 - 2k\right)\widetilde{Y}(s) + U(s) = 0$

   $\widetilde{Y}(s) = \frac{1}{ms^2 + 2k}U(s)$

4. $-m\ddot{y} + k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L}\right) + u - mg\sin\theta = 0$

   $y(t) = \overline{y} \qquad\qquad u(t) = 0$

   $k\left(\frac{1}{\overline{y}} - \frac{1}{L}\right) - mg\sin\theta = 0$

   $\frac{k}{\overline{y}} = \frac{k}{L} + mg\sin\theta \qquad\qquad \overline{Y} = \frac{k}{\frac{k}{L} + mg\sin\theta} = \frac{L}{1 + \frac{L}{k}mg\sin\theta}$

   $k\left(\frac{1}{\overline{y} + \widetilde{y}} - \frac{1}{L}\right) \simeq k\left(\frac{1}{\overline{y}} - \frac{1}{L}\right) + \left(-\frac{k}{\overline{y}^2}\right)\widetilde{y}$

   $-m\ddot{\widetilde{y}} + \cancel{k\left(\frac{1}{\overline{y}} - \frac{1}{L}\right)} - \frac{k}{\overline{y}^2}\widetilde{y} + u - \cancel{mg\sin\theta} = 0$

   $\widetilde{Y}(s) = \frac{1}{ms^2 + \frac{k}{\overline{y}^2}} \qquad\qquad U(s) = \frac{1}{ms^2 + \frac{\left(\frac{k}{L} + mg\sin\theta\right)^2}{k}}U(s)$