Problemi di analisi

(1.) Calcolare l'evoluzione libera per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 1)^T$$

(2.) Calcolare l'evoluzione libera e la risposta forzata per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$$

e per un andamento costante della variabile indipendente $u(t) = 1$.

(3.) Calcolare l'evoluzione libera e la risposta forzata per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 0\ 1)^T$$

e per un andamento costante della variabile indipendente $u(t) = 5$.

(4.) Calcolare l'evoluzione libera e la risposta forzata per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 0\ 0)^T$$

e per un andamento costante della variabile indipendente $u(t) = 1$.

(5.) Calcolare l'evoluzione libera del sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (0\ 1)^T$$

(6.) Dato il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t)$$

determinare tutte le condizioni iniziali che producono evoluzioni libere convergenti.

(7.) Determinare per quali valori delle condizioni iniziali, l'evoluzione libera del sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(t)$$

è non divergente.

(8.) Dato il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(t)$$

determinare per quali valori delle condizioni iniziali l'evoluzione libera risulta costante.

(9.) Si consideri il modello di un impianto di smaltimento rifiuti dell'esercizio 18 della prima parte. Assumendo che dalle ore 8:00 di un dato giorno, prima dell'apertura, l'impianto contenga già 25 tonnellate di vetro e 40 tonnellate di altri rifiuti, calcolare l'andamento nel tempo delle quantità di vetro e degli altri rifiuti fino alle ore 8:00 del giorno successivo.

(10.) Si consideri il modello di un casello autostradale dell'esercizio 25 della prima parte. Assumendo un flusso di automobili in entrata al casello costante e pari a 160 automobili l'ora, calcolare l'andamento del numero di automobili in coda sapendo che all'istante iniziale ci sono 60 automobili in coda.

(11.) Calcolare l'evoluzione libera per il sistema a tempo discreto descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 1)^T$$

(12.) Calcolare l'evoluzione libera per il sistema a tempo discreto descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 1)^T$$

(13.) Calcolare l'evoluzione libera e la risposta forzata per il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (0\ 1\ 0)^T$$

e per il seguente andamento della variabile indipendente

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1/2, \quad u(2) = 1, \quad u(k) = 0, \quad k \geq 3$$

(14.) Dato il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

determinare tutte le condizioni iniziali che producono evoluzioni libere convergenti.

(15.) Calcolare l'evoluzione libera per il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 0\ 0)^T$$

(16.) Dato il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

determinare tutte le condizioni iniziali che producono evoluzioni libere convergenti, divergenti e costanti.

(17.) Determinare per quali valori delle condizioni iniziali, l'evoluzione libera del sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(k)$$

è non divergente.

(18.) Dato il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

determinare tutte le condizioni iniziali che producono evoluzioni libere convergenti.

(19.) Calcolare l'evoluzione libera per il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x(k)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (1\ 2)^T$$

(20.) Sia dato il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando il metodo della trasformata di Laplace si calcoli l'evoluzione forzata corrispondente ad andamenti della variabile indipendente $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $u(t) = t$, $t \geq 0$.

(21.) Considerato il sistema a tempo continuo del precedente esercizio si calcoli con il metodo della trasformata di Laplace l'evoluzione forzata corrispondente al seguente andamento della variabile indipendente

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad u_1(t) = t,\ 0 \leq t, \quad u_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ -(t-1), & t \geq 1 \end{cases}$$

(22.) Un sistema tempo continuo sia definito dalle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si calcoli l'evoluzione forzata con il metodo della trasformata di Laplace per $u(t) = 2\sin(t)$, $t \geq 0$.

(23.) Si calcoli l'evoluzione forzata con il metodo della traformata di Laplace per il seguente sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

per l'andamento della variabile indipendente $u(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$.

(24.) Usando il metodo della trasformata zeta si calcoli l'evoluzione forzata del seguente sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

in corrispondenza dell'andamento della variabile indipendente $u(k) = 1$, $k \geq 0$.

(25.) Si ripeta l'esercizio precedente per il seguente andamento della variabile indipendente

$$u(k) = u_1(k) + u_2(k), \quad u_1(k) = 1,\ k \geq 0, \quad u_2(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 1 \\ -1, & k > 1 \end{cases}$$

(26.) Sia $u(k) = (-0.5)^k$, $k \geq 0$. Usando il metodo della trasformata z calcolare l'evoluzione forzata del seguente sistema a tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

(27.) Dato il sistema a tempo discreto descritto dalle matrici

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -1$$

determinare (se esiste) lo stato iniziale per cui $x(k) = x_e$ per ogni valore di k a fronte di una variabile indipendente pari a u_e.

(28.) Calcolare l'esponenziale e^{At} e la potenza A^k della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(29.) Determinare se il sottospazio descritto dall'equazione

$$x_1 - 2x_2 = 0$$

è invariante per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(30.) Determinare se il sottospazio descritto dall'equazione

$$x_1 - x_2 = 0$$

è invariante per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

(31.) Determinare se l'insieme definito dalla disequazione

$$x_1 + x_2 > 1$$

è invariante per il sistema a tempo continuo descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

(32.) Dato il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x(k)$$

determinare se il punto di coordinate

$$x_1 = x_2 = 1$$

è invariante per il sistema.

(33.) Per il sistema del punto precedente determinare se il punto di coordinate

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

è invariante per il sistema.

(34.) Determinare se il sottospazio determinato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

è invariante per il sistema descritto da

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

(35.) Si consideri il modello di un magazzino di merce deperibile dell'esercizio 17 della prima parte. Assumendo che inizialmente il magazzino contenga esclusivamente 1000 unità di merce appena prodotta e che, a causa di un blocco della produzione, esso non riceva più merce dall'esterno, calcolare la quantità totale di unità di merce alla fine del terzo mese.

(36.) Calcolare l'evoluzione del fondo di investimento per il modello dell'esercizio 21 della prima parte assumendo che inizialmente il capitale investito sia di 100 000 euro.

(37.) Calcolare l'evoluzione del fondo di investimento per il modello dell'esercizio 23 della prima parte assumendo che inizialmente il capitale investito sia di 100 000 euro.

(38.) Calcolare l'evoluzione delle quote di mercato per il modello dell'esercizio 27 della prima parte.

(39.) Calcolare l'evoluzione delle quote di mercato per il modello dell'esercizio 28 della prima parte.

(40.) Considerato il circuito dell'esercizio 32 della prima parte, si assuma

$$R = 1\,\Omega, \quad C_1 = C_2 = 1\,\mu\text{F}, \quad L = 1\,\text{mH}$$

e che la corrente nell'induttore e le tensioni sui condensatori siano inizialmente nulle. Si determini la corrente nell'induttore quando $V_g(t) = 10$ V.

(41.) Considerato il circuito dell'esercizio 36 della prima parte, si assuma

$$R_1 = R_1 = 1\,\text{K}\Omega, \quad C = 2\,\mu\text{F}, \quad L = 5\,\text{mH}$$

Si determini la tensione ai capi del condensatore quando $V_g(t) = 10$ V e $I_g(t) = \sin(2\pi f t)\,A$ con $f = 1$ KHz (si assumano condizioni iniziali di riposo).

(42.) Si consideri il modello di un magazzino di merce deperibile dell'esercizio 17 della prima parte. Determinare la risposta sul lungo periodo quando nel magazzino arrivi ogni mese dall'esterno una quantità di merce costante e pari a 800 unità.

(43.) Si consideri il modello di un casello autostradale dell'esercizio 25 della prima parte. Assumendo un flusso di automobili in entrata al casello costante e pari a 160 automobili l'ora, determinare il numero di corsie di pedaggio in funzione sul lungo periodo sapendo che ogni corsia è in grado di servire 40 automobili l'ora.

(44.) Calcolare l'evoluzione dello stato per il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = (2\ 0)^T$$

e per un andamento costante della variabile indipendente $u(t) = 30$. Determinare inoltre tutte le coppie d'equilibrio $[x_e, 30]$ e definirne il tipo di stabilità.

(45.) Si consideri il modello di transizione relativo al problema della condivisione di risorse sviluppato nel Paragrafo 2.4.2. e si scelga $p_{11} = 0.8$ e $p_{12} = 0.7$. Studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato e determinare il valore di lungo periodo dell'evoluzione dello stato.

(46.) Si consideri un modello di transizione relativo a un'agenzia di assicurazioni che suddivida i sottoscrittori di polizza in tre classi di merito, analogo a quello sviluppato nel Paragrafo 2.4.3. e si scelga $p_1 = p_2 = p_3 = 30\%$. Determinare il valore del premio assicurativo atteso nel lungo periodo nell'ipotesi che le tre classi abbiano rispettivamente premi assicurativi di 500, 800 e 1200 euro.

(47.) Si consideri una rete con 4 pagine web caratterizzata dalla seguente matrice di Google

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare il PageRank della rete.

(48.) Si consideri la rete con 4 pagine web caratterizzata dalla seguente matrice di Google

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cosa è caratterizata tale rete? Determinare il PageRank.

(49.) Si consideri la rete con 4 pagine web in cui il surfer decida con probabilità $p = 0.85$ di seguire un link presente nella pagina in cui si trova, altrimenti decida di saltare a un'altra pagina qualsiasi digitandone l'indirizzo. La matrice di Google in questo caso è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare il PageRank della rete.

(50.) Si consideri l'esercizio precedente e si scelga $p = 0.6$. Come cambia il PageRank della rete?