

Soluzioni dei Problemi di analisi

1. $x_l(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$

2. $x_l(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$; $x_f(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $x_l(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2t) - e^{3t} \\ 2e^t \left(\cos(2t) + \sin(2t)\right) - 2e^{3t} \\ 2e^t \sin(2t) + e^{3t} \end{pmatrix}$; $x_f(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \cos 2t + e^t \sin 2t - 3 \\ 2e^t \cos 2t + 4e^t \sin 2t - 2 \\ -e^t \cos 2t + 3e^t \sin 2t + 1 \end{pmatrix}$

4. $x_l(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}$; $x_f(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 1 - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $x_l(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin(t) \\ e^{-t} \left(\cos(t) - \sin(t)\right) \end{pmatrix}$

6. $x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. Per rispondere al quesito, bisogna tener conto che quanto richiesto corrisponde al calcolo dell'andamento delle variabili di stato per $0 \leq t \leq 24$ dove l'origine del tempo corrisponde alle ore 8 di un dato giorno. Si noti che, in tale intervallo di tempo, le variabili indipendenti assumono valori costanti ma differenti fra le 8 e le 20 (cioè per $0 \leq t \leq 12$) e fra le 20 e le 8 del giorno dopo (cioè per $12 < t \leq 24$). Lo stato iniziale è

$$x(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

e le variabili indipendenti sono pari a:

$$u_1(t) = \bar{u}_1 = 1.5, \quad u_2(t) = \begin{cases} \bar{u}_{21} = 5 & 0 \leq t \leq 12 \\ \bar{u}_{22} = 0 & 12 < t \leq 24 \end{cases}$$

Calcoliamo innanzitutto la risposta libera. Gli autovalori e gli autovettori della matrice A sono:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = -0.25, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 0$$

e quindi

$$c_1 = 25, \quad c_2 = 40$$

da cui segue che:

$$x_l\,(t) = \begin{pmatrix} 25e^{-0.25t} \\ 40 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la risposta forzata si può preliminarmente scrivere $x_f(t) = x'_f(t) + x''_f(t)$ dove $x'_f(t)$ è la risposta forzata corrispondente alla variabile indipendente $u_1(t)$ e $x''_f(t)$ è quella corrispondente alla variabile indipendente $u_2(t)$. Per calcolare $x'_f(t)$ si può procedere come descritto nel paragrafo 5.3.1 (pag. 162) e cioè

$$x'_f(t) = \left(\int_0^t e^{A\xi} [B]_1 d\xi \right) \bar{u}_1 = 1.5 \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5t \end{pmatrix}$$

Per calcolare $x''_f(t)$ per $0 \leq t \leq 12$ si scrive

$$x''_f\,(t) = \left(\int_0^t e^{A\xi} [B]_2 d\xi \right) \bar{u}_{21} = 5 \int_0^t \begin{pmatrix} 0.35e^{-0.25\tau} \\ 0.65 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} -7e^{-0.25t} + 7 \\ 3.25t \end{pmatrix}$$

pertanto, l'andamento dello stato per $0 \leq t \leq 12$ sarà pari a:

$$x(t) = x_l\,(t) + x'_f\,(t) + x''_f\,(t) = \begin{pmatrix} 18e^{-0.25t} + 7 \\ 1.75t + 40 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'andamento dello stato per $12 \leq t \leq 24$, dovremo tener conto del fatto che la variabile indipendente $u_2(t)$ è nulla su tale intervallo. Il nuovo stato iniziale da considerare, cioè quello relativo al tempo $t = 12$ sarà quindi

$$x(0) = \begin{pmatrix} 18e^{-0.25\times 12} + 7 \\ 1.75 \times 12 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.8962 \\ 61 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera per tale stato iniziale è:

$$x_l\,(t) = \begin{pmatrix} 7.8962e^{-0.25t} \\ 61 \end{pmatrix}$$

e la risposta forzata rispetto alla variabile indipendente u_1 è già stata precedentemente calcolata. Pertanto, per $12 \leq t \leq 24$ l'andamento dello stato sarà

$$x(t) = x_l\,(t) + x_f'\,(t) = \begin{pmatrix} 7.8962e^{-0.25t} \\ 61 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.8962e^{-0.25t} \\ 61 - 1.5t \end{pmatrix}$$

In conclusione

$$x(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 18e^{-0.25t} + 7 \\ 1.75t + 40 \end{pmatrix} & \text{per } 0 \leq t \leq 12 \\ \begin{pmatrix} 7.8962e^{-0.25(t-12)} \\ 61 - 1.5(t-12) \end{pmatrix} & \text{per } 12 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

L'andamento temporale delle variabili di stato è disegnato in Figura 1.

10. $x_1(t) = 60e^{-0.8t} - \frac{160}{0.8}(e^{-08t} - 1) = 200 - 140e^{-0.8t}$

11. $x_l(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $x_l(2) = x_l(3) = ... = 0$

12. $x_l(k) = \begin{pmatrix} \cos(k\frac{\pi}{2}) + \sin(k\frac{\pi}{2}) \\ \cos(k\frac{\pi}{2}) - \sin(k\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

13. $x_l(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(k\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(k\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$; $x_f(1) = 0$; $x_f(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $x_f(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-3} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

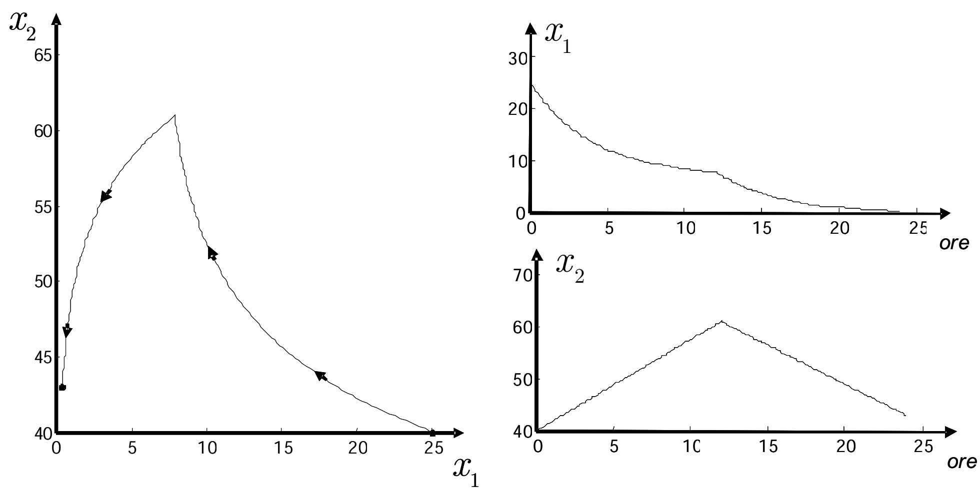

Figura 1: Andamento delle variabili di stato nello spazio di stato (sinistra) e le corrispondenti leggi temporali (destra) nel modello di un impianto di smaltimento dei rifiuti.

14. $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $x_l(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k \\ \frac{9}{8} + \frac{3}{16}(-1)^k - \frac{21}{16}\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k \end{pmatrix}$

16. $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; non esistono evoluzioni libere divergenti; $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

18. $x(0) = c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19. $x_l(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, ...$

20. $x_f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$; $x_f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} \end{pmatrix}$

21. $x_f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} \end{pmatrix}$ per $t < 1$; $x_f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2(t-1)} \end{pmatrix}$ per $t \geq 1$

22. $x_f(t) = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos(t) \\ e^{-t} - 2 + \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$

23. $x_f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{3}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{3}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{3}{5}e^{-2t} \end{pmatrix}$

24. $x_f(k) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, ...$

25. $x_f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $x_f(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$; $x_f(k) = \begin{pmatrix} 24\left(\frac{1}{2}\right)^k - 80\left(\frac{1}{4}\right)^k \\ 20\left(\frac{1}{4}\right)^k \end{pmatrix}$, $k = 3, 4, ...$

26. $x_f(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\theta k) - \frac{5}{6}\sin(\theta(k-1))\right) \\ \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\theta k) + \frac{5}{2}\sin(\theta(k-1))\right) \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, ...$ con $\theta = \arccos\left(1/\sqrt{5}\right)$

27. $x_e = -\frac{2}{3}u_e$

28. $e^{At} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & -e^{-t} + e^{-3t} \\ -e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$; $A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^k + (-3)^k & -(-1)^k + (-3)^k \\ -(-1)^k + (-3)^k & (-1)^k + (-3)^k \end{pmatrix}$

29. no

30. si

31. no

32. si

33. no

34. no

35. Lo stato iniziale del sistema è:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione dello stato a partire da $x(0)$ dopo il blocco di produzione equivale a calcolare, da quel momento in poi l'evoluzione libera del sistema. La matrice A possiede autovalori in zero di molteplicità pari a 4 e pertanto non è possibile utilizzare le formule fornite nel testo per il calcolo dell'evoluzione libera in modo esplicito sulla base di autovalori e autovettori. In questo caso, però, è richiesto il solo valore alla fine del terzo mese e cioè $x_l(3)$ che può essere calcolata ricorsivamente:

$$x(1) = Ax(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(2) = Ax(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(3) = Ax(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

36.

$$x(k) = \begin{pmatrix} 100000\,(1.02 \times 1.03^2)^{k/3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ per } k = 0, 3, 6, ...$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100000 \times 1.03\,(1.02 \times 1.03^2)^{(k-1)/3} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ per } k = 1, 4, 7, ...$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100000 \times 1.03^2\,(1.02 \times 1.03^2)^{(k-2)/3} \end{pmatrix}, \text{ per } k = 2, 5, 8, ...$$

37.

$$x(0) = \begin{pmatrix} 100000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 104000 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 108160\,(1.015)^{k-2} \end{pmatrix} \text{ per } k \geq 2$$

38. Gli autovalori e gli autovettori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5} \leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e lo stato iniziale si scrive come

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto l'evoluzione libera è:

$$x_l\,(k) = 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.2 \left(\frac{3}{5}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 - 0.2\left(\frac{3}{5}\right)^k \\ 0.5 + 0.2\left(\frac{3}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

39. Gli autovalori e gli autovettori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = 1 \leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5} \leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{5} \leftrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e lo stato iniziale si scrive come

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.25 \\ 0.45 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{4}{15}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto l'evoluzione libera è:

$$x_l(k) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{4}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

40. Calcolando la risposta forzata del circuito si ottiene che la corrente nell'induttore ha un andamento oscillante, con frequenza di circa 5 KHz, convergente a zero con una legge esponenziale pari a $e^{-500\,t}$. L'andamento è riportato in Figura 2.

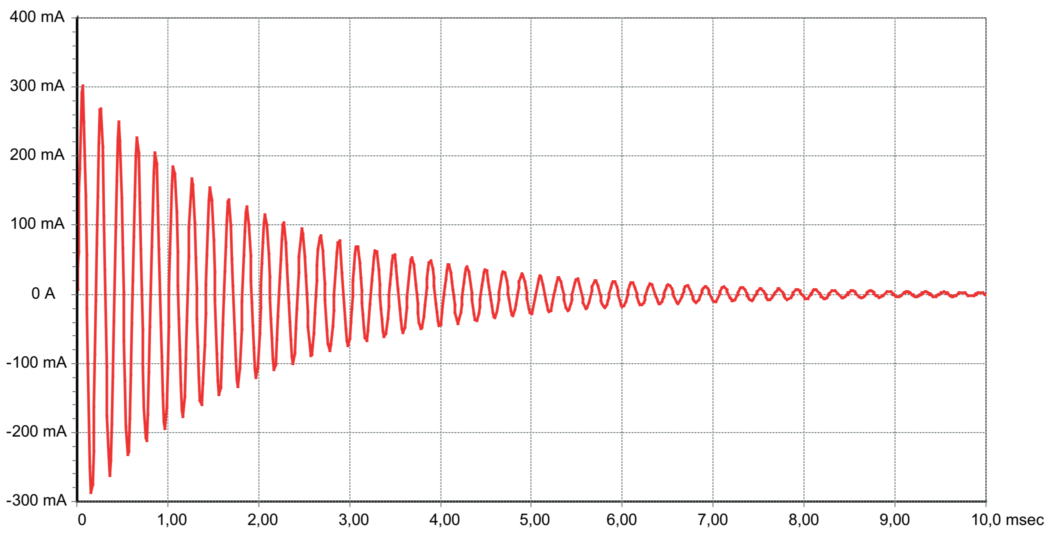

Figura 2: Corrente nell'induttore per $V_g(t) = 10$ V.

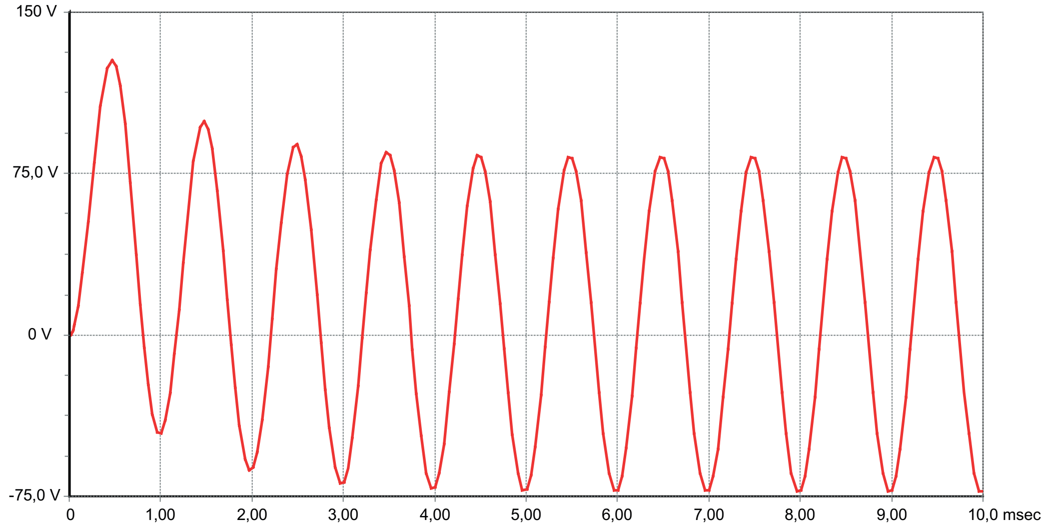

Figura 3: Tensione sul condensatore quando $V_g(t) = 10$ V e $I_g(t) = sin(2\pi f t)$ A.

41. Calcolando la risposta forzata del circuito dovuta ai generatori indipendenti di tensione e corrente si ottiene l'andamento di Figura 3. Si noti come, nel lungo periodo, l'andamento di $V_C(t)$ sia di tipo periodico con frequenza pari a 1 KHz ed oscilla intorno ad un valore pari a 5 V. Per completezza si è riporta l'andamento della tensione ai capi del condensatore nel caso in cui sia presente solo il generatore indipendente di tensione (Figura 4), e solo quello di corrente (Figura 5). Nel primo caso si ottiene un andamento che tende nel lungo periodo al valore di 5 V con una legge esponenziale, dovuta al modo dominante, del tipo $5\,(1 - e^{-1000\,t})$. Nel secondo caso si ottiene nel lungo periodo un andamento oscillatorio costante di frequenza pari a 1 KHz. Si può inoltre apprezzare la validità del principio di sovrapposizione degli effetti in base al quale la risposta forzata in corrispondenza all'azione contemporanea dei due generatori indipendenti sia pari alla somma delle risposte forzate ottenute all'azione singola di ciascuno di essi.

42. Il sistema è certamente asintoticamente stabile in base al criterio di stabilità per modelli di trasferimento senza generazione di risorsa. Comunque, l'asintotica stabilità del sistema è del tutto ovvia se si pensa al fatto che, se il magazzino non riceve nuovo prodotto, esso si svuota certamente dopo quattro mesi. Lo stato d'equilibrio si può calcolare nel modo

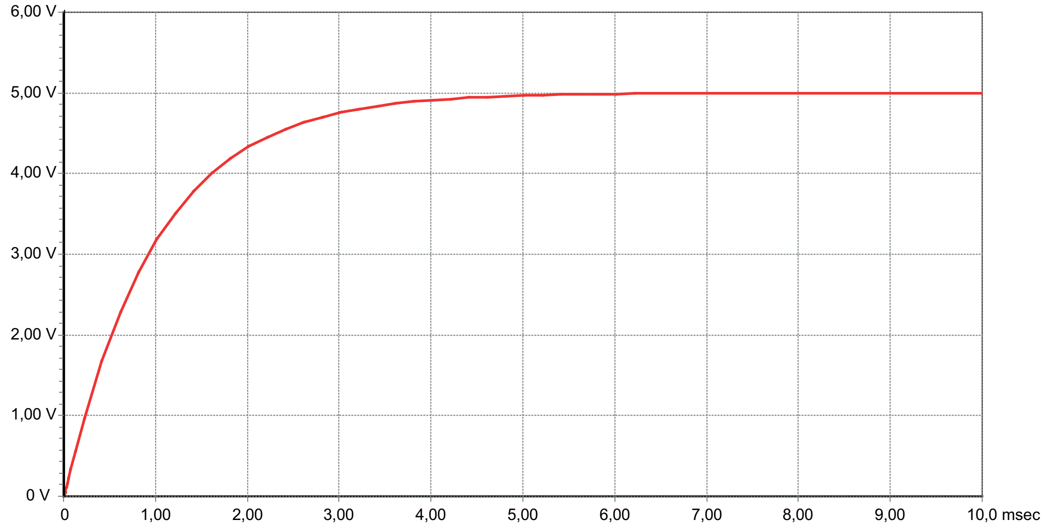

Figura 4: Tensione sul condensatore quando $V_g(t) = 10$ V e $I_g(t) = 0$ A.

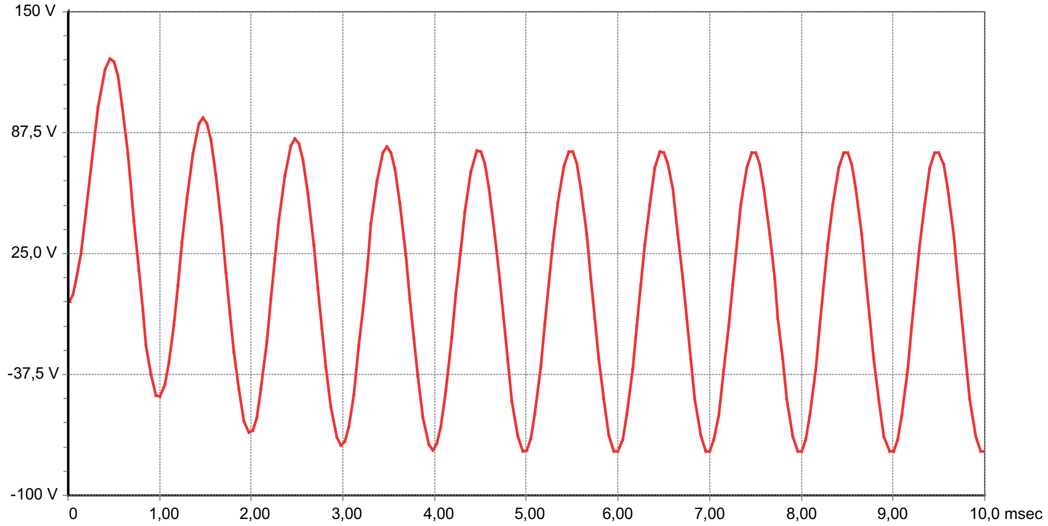

Figura 5: Tensione sul condensatore quando $V_g(t) = 0$ V e $I_g(t) = sin(2\pi f t)$ A.

seguente:

$$x_e = (I - A)^{-1} B u_e = 800 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 160 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix}$$

e, per l'asintotica stabilità, x_e coincide con la risposta sul lungo periodo. Alternativamente, la risposta sul lungo periodo si può calcolare mediante la risposta forzata a fronte di u_e:

$$
\begin{aligned}
x_f(1) &= Ax(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e = \begin{pmatrix} u_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x_f(2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e \\
x_f(3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.06 \\ 0 \end{pmatrix} u_e \\
x_f(4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.06 \\ 0 \end{pmatrix} u_e + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.06 \\ 0.03 \end{pmatrix} u_e
\end{aligned}
$$

Quindi, dopo $k = 4$ transizioni si arriva nello stato

$$
x_f(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.06 \\ 0.03 \end{pmatrix} 800 = \begin{pmatrix} 800 \\ 160 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix}
$$

e poichè

$$
x_f(5) = Ax_f(4) = x_f(4)
$$

ne segue che la risposta sul lungo periodo è pari a $x_f(4) = x_e$.

43. Sul lungo periodo sono in funzione 4 corsie.

44. L'andamento dello stato è

$$x(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 60\frac{1}{-3}\left(e^{-3t}-1\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-t} - 19e^{-3t} + 20 \\ -e^{-t} - 19e^{-3t} + 20 \end{pmatrix}$$

Esiste una sola coppia di equilibrio:

$$\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}, 30\right]$$

ed essa è asintoticamente stabile.

45. Ponendo $p_{11} = 0.8$ e $p_{21} = 0.7$, ne segue

$$A = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.25 & 0.75 \\ 0.56 & 0.75 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

La matrice A proviene da un modello di transizione e quindi l'origine è uno stato di equilibrio marginalmente stabile. In effetti gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.373$, $\lambda_3 = 0.0067$ e, sul lungo periodo, lo stato tende all'autovettore dominante scelto in modo che la somma delle sue componenti sia uguale a 1 e cioè

$$\bar{x}_e = \begin{pmatrix} 0.301 \\ 0.675 \\ 0.024 \end{pmatrix}$$

46. Il premio atteso P è

$$P = \begin{pmatrix} 500 & 800 & 1200 \end{pmatrix}\bar{x}_e = \begin{pmatrix} 500 & 800 & 1200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.620 \\ 0.266 \\ 0.114 \end{pmatrix} = 659.6$$

47. Il PageRank è pari a: $\begin{pmatrix} 0.1905 \\ 0.3333 \\ 0.3810 \\ 0.0952 \end{pmatrix}$.

48. Il PageRank è pari a: $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$. La rete è caratterizzata da una pagina, la seconda, che contiene link a tutte le altre pagine compresa se stessa. Tale pagina potrebbe quindi essere una autorità.

49. Il PageRank è pari a: $\begin{pmatrix} 0.2062 \\ 0.3814 \\ 0.2062 \\ 0.2062 \end{pmatrix}$.

50. Il PageRank è pari a: $\begin{pmatrix} 0.2174 \\ 0.3478 \\ 0.2174 \\ 0.2174 \end{pmatrix}$.