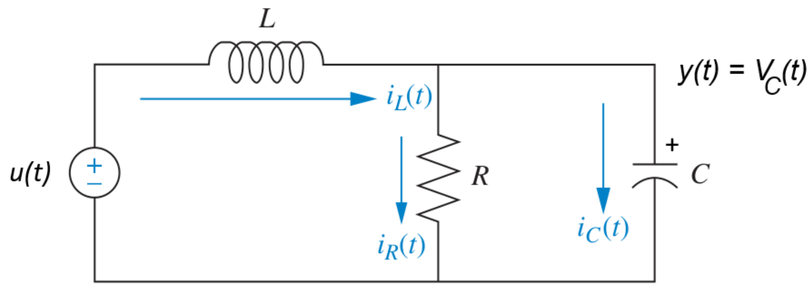
Domanda 1

Si consideri il circuito di figura con $R = C = L = 1$:

i) Trovare una rappresentazione del circuito in forma di stato con in uscita la tensione ai capi del condensatore.

ii) Analizzare la stabilità asintotica e la stabilità BIBS (bounded input bounded state) e BIBO (bounded input bounded output).

iii) Se $u(t) = \sin(10\pi t)$, quanto vale a regime il periodo della tensione sinusoidale ai capi del condensatore?



Soluzione 1:

i)

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C(t) \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

ii) La matrice

$$\begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha autovalori

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

con parte reale negativa quindi il sistema è asintoticamente stabile e di conseguenza anche BIBS (e BIBO).
iii) Il periodo del segnale di uscita è lo stesso del segnale di ingresso dato che si tratta di un sistema LTI e, dato che, $\omega = 2\pi/T$, allora $T = 0.2$ secondi.

Domanda 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto, $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) \\ w(k) &= x_1(k) + x_2(k) \end{aligned}$$

i) Calcolare l'evoluzione libera del sistema a partire dalla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$ e analizzarne i modi.

ii) Calcolare $\lim_{k\to\infty} \dfrac{w(k+1)}{w(k)}$.

Soluzione 1:

i)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A risultano:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Glia autovettori risultano:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -\lambda_1 x + y = 0 \Rightarrow y = \lambda_1 x, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -\lambda_2 x + y = 0 \Rightarrow y = \lambda_2 x, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} x \\ \lambda_2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + c2 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow c_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}, \quad c_1 = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}, \quad |\lambda_1| \approx 1.618 > 1, \quad |\lambda_2| \approx 0.618 < 1$$

$$x_l(k) = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_1^k \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_2^k \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$x_{1l}(k) = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_1^k + \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_2^k, \qquad x_{2l}(k) = \frac{-\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_1^{k+1} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_2^{k+1}$$

$$\lambda_1^k : \text{modo divergente}, \qquad \lambda_2^k : \text{modo alternante convergente}$$

Si possono ottenere i medesimi risultati anche applicando la trasformata $\mathcal{Z}$.

ii) Il termine con λ_1^k domina per $k \to \infty$; pertanto

$$\lim_{k \to \infty} \frac{w(k+1)}{w(k)} = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Domanda 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo, $t \geq 0$:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad \text{con } u(t) = \sin t.$$

i) Calcolare la risposta forzata del sistema. Si ricordi che $\mathcal{L}\{\sin t\} = 1/(s^2+1)$.

ii) Determinare la componente della risposta forzata di regime (a transitorio esaurito).

Soluzione 1:

i)

$$A = 1, \qquad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s+1}$$

$$X_f(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$x_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_f(s)\} = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right)$$

ii)

$$x_{f,r}(t) = \frac{1}{2}\left(\sin t - \cos t\right)$$

Domanda 4

Dato il sistema dinamico a tempo discreto, $k \geq 0$:

$$x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + x_2(k),$$
$$x_2(k+1) = 0.25x_2(k) + u(k).$$

i) calcolare l'evoluzione libera per $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$. Si tenga presente che, in generale, $\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0)$.

ii) calcolare la risposta forzata in corrispondenza di $u(k) = 1, k \geq 0$.

iii) Determinare la risposta complessiva a partire dalle assegnate condizioni iniziali e ingresso.

Soluzione 1:

i) Componente $x_2(k)$

$$z\big[X_2(z) - x_2(0)\big] = 0.25\,X_2(z) \quad \Longrightarrow \quad X_2(z) = 0 \Longrightarrow x_2(k) = 0\ \forall k.$$

Componente $x_1(k)$

$$z\big[X_1(z) - x_1(0)\big] = 0.5\,X_1(z), \qquad x_1(0) = 1$$
$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{z}{z-0.5} \Longrightarrow x_1(k) = 0.5^k.$$

$$x_{1,l}(k) = 0.5^k, \qquad x_{2,l}(k) = 0, \quad k \geq 0.$$

ii) Calcolo di $x_{2,f}(k)$

$$zX_2(z) = 0.25\,X_2(z) + U(z)$$

$$X_2(z) = \frac{U(z)}{z-0.25} = \frac{z}{(z-1)(z-0.25)} = \frac{4}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{4}{3}\frac{z}{z-0.25}$$
$$x_{2,f}(k) = \frac{4}{3}\big[1 - (0.25)^k\big], \quad k \geq 0.$$

Calcolo di $x_{1,f}(k)$

$$zX_1(z) = 0.5\,X_1(z) + X_2(z) \quad \Longrightarrow \quad X_1(z) = \frac{X_2(z)}{z-0.5} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)(z-0.25)}.$$

Ponendo

$$X_1(z) = A\frac{z}{z-1} + B\frac{z}{z-0.5} + C\frac{z}{z-0.25},$$

si ottengono

$$A = \frac{8}{3}, \qquad B = -8, \qquad C = \frac{16}{3},$$

da cui

$$x_{1,f}(k) = \frac{8}{3} - 8\,(0.5)^k + \frac{16}{3}\,(0.25)^k, \quad k \geq 0.$$

iii) La risposta complessiva è data dalla somma delle corrispondenti evoluzioni libere e forzate.

Domanda 5

Data la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante:

$$G(s) = K\frac{s}{[(s+1)(s+2)]^2},$$

i) si tracci il luogo delle radici positivo ($K \geq 0$), determinando punti doppi (valori approssimati), asintoti, e intersezioni con l'asse immaginario.

ii) Si ricavi per quali valori di $K \geq 0$ il sistema a retroazione unitaria corrispondente è BIBO stabile.

Soluzione 1:

i) Il polinomio caratteristico risulta

$$p_K(s) = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + (12 + K)s + 4.$$

L'equazione dei punti doppi conduce facilmente a

$$(s + 1)(s + 2)(3s^2 + 3s - 2) = 0,$$

da cui, oltre alle soluzioni banali $s = -1$ e $s = -2$ (per $K = 0$), si hanno le due soluzioni reali

$$s = -\frac{3 + \sqrt{33}}{6} \simeq -1.4574, \quad s = -\frac{3 - \sqrt{33}}{6} \simeq 0.4574.$$

Poichè l'unico tratto dell'asse reale che appartiene al luogo positivo è banalmente il semiasse reale negativo, solo il primo punto doppio determinato appartiene al luogo positivo. Poiché $n = 4$ e $m = 1$, $n - m = 3$ e quindi tre dei rami vanno al punto improprio secondo le direzioni $\pi/3, \pi$ e $-\pi/3$. Il baricentro della stella dei asintoti si trova sull'asse reale ed ha coordinata

$$x_B = \frac{-2 - 2 - 1 - 1 - 0}{4 - 1} = -2.$$

Per determinare le intersezioni con l'asse immaginario basta imporre

$$(j\omega + 1)^2(j\omega + 2)^2 + Kj\omega = 0,$$

da cui si deduce

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2)(4 - \omega^2) - 8\omega^2 &= 0, \\ \omega[12 + K - 6\omega^2] &= 0. \end{aligned}$$

La prima equazione si riscrive nella forma

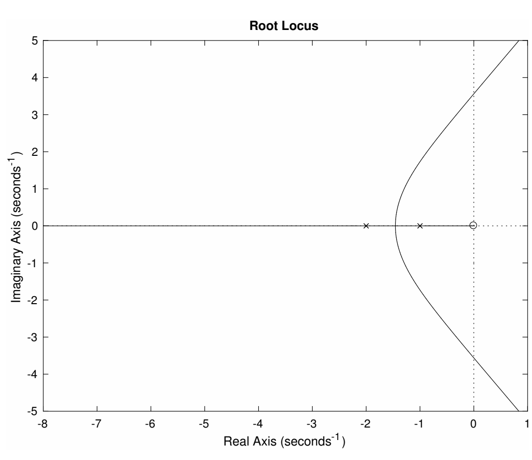
$$\omega^4 - 13\omega^2 + 4 = 0$$

ed ha soluzioni

$$\omega_1 = \sqrt{12.6847}, \quad \omega_2 = -\sqrt{12.6847}, \quad \omega_3 = \sqrt{0.3153}, \quad \omega_4 = -\sqrt{0.3153}.$$

Se le sostiuisco nella seconda equazione scopro che le prime due corrispondono a $K = 64.1082$ mentre le altre due a $K = -10.1082$. Pertanto solo le prime due soluzioni sono le intersezioni del luogo positivo con l'asse immaginario che stavamo cercando. Si può giungere alle medesime conclusioni anche a partire dalla tabella di Routh relativa a $p_K(s)$:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 6 & (K+12) & \\ 2 & 11 - \dfrac{K}{6} & 4 & \\ 1 & \dfrac{K^2 - 54K - 648}{K - 66} & & \\ 0 & 4 & & \end{array}$$



ii) Il sistema è BIBO stabile per $K < 64.1082$.

Domanda 6

Sia consideri la fdt

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

i) Facendo riferimento a un'architettura di controllo in retroazione unitaria negativa, progettare un controllore puramente integrale per $G(s)$ che assicuri le seguenti prestazioni:

- errore a regime nullo per un riferimento pari al gradino unitario;
- sovraelongazione massima inferiore al 5%;
- tempo si assestamento inferiore a 30 secondi.

ii) Se si utilizzasse un controllore proporzionale-derivativo si potrebbero assicurare comunque le specifiche? Motivare la risposta.

Soluzione 1:

i) La fdt può essere scritta come:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Il controllore integrale assicurta che il sistema diventi di tipo 1 soddisfacendo la specifica sull'errore a regime.

$$C(s) = \frac{k_i}{s},$$

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{k_i}{s(s+1)(s+2)}.$$

$$p_{k_i}(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k_i.$$

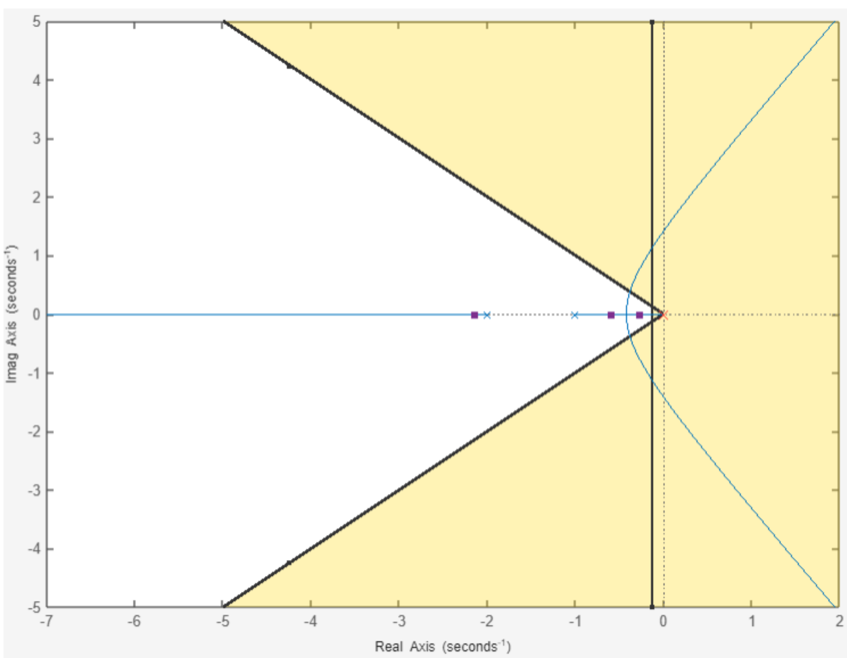
Per soddisfare le specifiche in termini di massima sovrelongazione e tempo di assestamento $\sigma \leq -3/T_s = -0.1$ e $0.707 \leq \xi \leq 1$. Coerentemente si fissa il polo dominante del sistema, ad esempio, in -0.25:

$$p_{k_i}(-0.25) = (-0.25)^3 + 3(-0.25)^2 + 2(-0.5) + k_i = -0.3281 + k_i = 0,$$

da cui si evince

$$k_i = 0.3281,$$

$$C(s) = \frac{0.3281}{s}.$$



ii) No, la specifica sull'errore a regime non sarebbe soddisfatta.