Istruzioni per l'esame di Fondamenti di Controlli Automatici

Restrizioni e cose obbligatorie:

- non è ammesso l'uso di libri, quaderni, o calcolatrici programmabili;
- **consegnare solo la bella copia**. **NON** consegnare ne' il foglio delle domande ne' la brutta copia (a meno che non sia il foglio siglato al momento del controllo dei documenti. Meglio se quello viene usato per la bella quindi);
- scrivere in cima a sinistra cognome, nome e matricola **1) in questo ordine**, **2) in stampatello maiuscolo**, e **3) su tutti i fogli** che si consegnano;
- segnare in basso a destra di ogni pagina di ogni foglio protocollo consegnato **il numero di pagina relativo** (i.e., scrivere al piede di ogni pagina "p. x di y" con x = pagina corrente, y = numero di pagine totali scritte tra i fogli protocollo consegnati);
- **scrivere i primi 4 esercizi su un insieme di fogli protocollo**, e poi **scrivere gli ultimi 3 esercizi su un altro insieme di fogli protocollo**: questo perché poi un insegnante correggerá i primi tre ed un altro insegnante correggerá i secondi tre;
- dedicare, in ognuno dei due plichi che si consegnano, la prima pagina della bella copia ad una tabella che riassume a che pagina si trova ognuno dei vari punti svolti. I.e., prima di consegnare, scrivere una lista tipo

punto	pagine
Q1.1	2 e 3
Q1.2	3 e 4
⋮	⋮

  dove la colonna dei punti é ordinata in senso crescente (quindi **evitare di mescolare i punti**)
- consegnare i due plichi di fogli 'in ordine' (cioé uno dentro all'altro, ma tenendo distinti i due plichi).

Fattori che penalizzano il voto:

- non seguire le richieste sopra o i suggerimenti sotto;
- essere disordinati e poco chiari in genere. Saranno infatti rilevanti per la valutazione anche l'ordine, la chiarezza di esposizione, e la giustificazione dei passaggi fatti per ottenere le soluzioni;
- non scrivere o la propria matricola o il proprio cognome e nome sui fogli protocollo che si consegnano (se mancano sia matricola che cognome e nome su un foglio protocollo, quel foglio protocollo non verrá corretto);
- scrivere la propria matricola o il proprio cognome e nome in modo illeggibile.

Notare che le penalizzazioni sono variabili ed a discrezione dei docenti, a seconda di quanto male organizzati saranno i fogli consegnati.

Suggerimenti:

- segnare con chiarezza l'inizio dello svolgimento di ogni punto di ogni esercizio. Una strategia che é sicuramente apprezzata é: all'inizio di ogni punto scrivere "Qx.y" con x = esercizio, y = punto dell'esercizio, e cerchiare questo Qx.y con due cerchi concentrici o con un evidenziatore. Alla fine di ogni punto, tirare una riga orizzontale lunga tutta la pagina. Se si sta aggiungendo un pezzo di soluzione da un'altra parte del foglio, scrivere "Continuazione di Qx.y". Notare che anche altre strategie vanno bene - l'importante é che sia chiaro dove sono le soluzioni e di cosa per chi corregge il compito;
- far partire ogni esercizio (l'x di Qx.y) in una pagina nuova;
- segnare con chiarezza le risposte finali ai vari quesiti. Strategia suggerita: cerchiare il risultato finale e scrivere "*risultato per Qx.y:*" dentro a questa cerchiatura;
- portate un 3 / 4 pennarelli o evidenziatori di colori diversi (**non** di colore rosso peró; verde, blu, marrone e giallo scuro sono ottimali). Usateli specialmente nei grafici (esempio classico: nel luogo delle radici), mentre nel testo usateli con parsimonia.

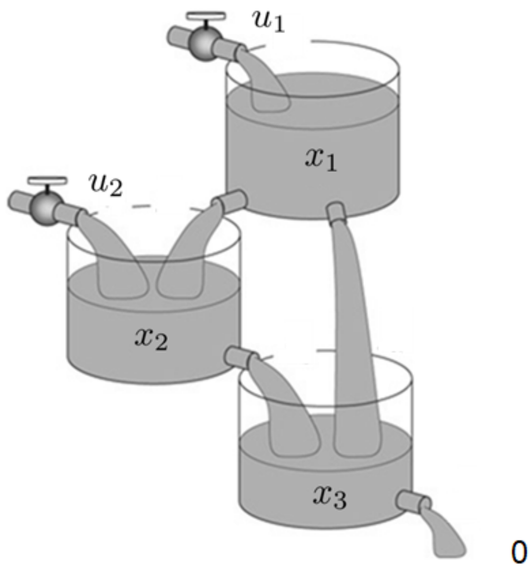
Domanda 1

Si consideri la rete di 3 serbatoi dove:

- $u_1(t), u_2(t)$ sono flussi di liquido $[m^3 s^{-1}]$ in ingresso;
- $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, sono i volumi di liquido $[m^3]$ contenuti nei serbatoi;
- si assuma che il flusso di liquido uscente dal sebatoio i-*esimo* sia proporzionale secondo il coefficiente α_{ij} $[s^{-1}]$ al volume di liquido in esso contenuto.

i) Scrivere il modello dinamico della rete in forma di stato.

ii) Date le condizioni iniziali $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 25$, determinare il valore di regime dei volumi di liquido nei serbatoi, a transitorio esaurito, nel caso in cui $u_1(t) = u_2(t) = 0$, $\alpha_{30} = 0$ e i rimanenti $\alpha_{ij} = 0.1[s^{-1}]$.



Soluzione 1:

i)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) =& -\alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{13}x_1(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) =& \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{23}x_2(t) + u_2(t)\\ \dot{x}_3(t) =& \alpha_{13}x_1(t) + \alpha_{23}x_2(t) - \alpha_{30}x_3(t)\end{aligned}$$

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -(\alpha_{12}+\alpha_{13}) & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & -\alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & -\alpha_{30} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) Gli ingressi sono a zero quindi e il flusso del serbatoio tre verso l'esterno è bloccato. Vale il principio di conservazione della massa. A partire dalle condizioni iniziali assegnate accade che il serbatoio uno si svuoterà completamente con il liquido che travasa nei serbatoi due e tre; il serbatoio due si svuoterà completamente trasferendo il liquido nel serbatoio tre. A transitorio esaurito il serbatoio tre conterrà la somma dei tre volumi di liquido iniziali. Quindi: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 75$.
A conferma di ciò, la matrice risulta:

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori di A, risolvendo il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Poiché A è una matrice triangolare superiore per blocchi, il determinante è il prodotto degli elementi diagonali:

$$\det(A - \lambda I) = (-0.2 - \lambda)(-0.1 - \lambda)(-\lambda)$$

Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_1 = -0.2, \quad \lambda_2 = -0.1, \quad \lambda_3 = 0$$

Dal segno degli autovalori possiamo concludere che:

- Due autovalori (λ_1 e λ_2) hanno parte reale negativa.
- Uno (λ_3) è nullo.

Il valore di regime dipende quindi solo dalla componente di $x(0)$ lungo la direzione dell'autovalore $\lambda_3 = 0$.

Si può osservare che la derivata della somma delle componenti del vettore di stato è:

$$\frac{d}{dt}(x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{1}^\top x(t)\right) = \mathbf{1}^\top \frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{1}^\top Ax(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) = 0.$$

Segue che

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = \text{costante}$$

Dato che la somma iniziale è:

$$x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 25 + 25 + 25 = 75$$

e che il sistema converge lungo la direzione associata all'autovalore nullo (ossia $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$), il valore di regime sarà:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

Domanda 2

Si consideri la rete di pagine web

Pagina 1
Links
#2
#3

Pagina 2
Links
#1
#3

Pagina 3
Links
#1

i) Determinare una rappresentazione in forma di stato della dinamica delle pagine visitate nella rete.

ii) Calcolare il RageRank (stato di equilibrio); si ricordi che si tratta di un vettore di probabilità.

Soluzione 1:

$$x(k+1) = Ax(k), \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Il PageRank corrisponde all'equilibrio $\bar{x} = A\bar{x}$, cioè $(A - I_3)\bar{x} = 0$. La soluzione, normalizzata dato che si tratta di un vettore di probabilità, risulta:

$$\bar{x} = \frac{1}{4.5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.444 \\ 0.222 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

Domanda 3

Si consideri una massa $m = 1[kg]$ libera di muoversi orizzontalmente e senza attrito sotto l'azione di una forza $u(t)$ applicata sempre orizzontalmente alla massa stessa. Sia $y(t)$ la posizione della massa.

i) Scrivere una rappresentazione in forma di stato della dinamica del sistema che includa posizione e velocità della massa.

ii) A partire dalle condizioni iniziali $y(0) = 1[m]$ e $\dot{y}(0) = 1[ms^{-1}]$ e considerando una forza di ingresso pari al gradino unitario, $u(t) = \delta_{-1}(t)$, calcolare la risposta complessiva del sistema.

iii) Valutare la stabilità asintotica dell'origine, la stabilità BIBS (bounded input bounded state) e BIBO (bounded input bounded output). Se il sistema è instabile, allora trovare un ingresso *bounded* che corrisponda ad uno stato (o uscita, a seconda del caso BIBS o BIBO) *unbounded*.

Soluzione 1:

i) Il sistema in forma di stato risulta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

ii) Evoluzione libera:

$$X_l(s) = (sI - A)^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} x(0) = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \rightarrow x_l(t) = \mathcal{L}^{-1}X_l(s) = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Evoluzione forzata:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \rightarrow x_f(t) = \mathcal{L}^{-1}X_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Risposta complessiva:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ 1+t \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

iii) Gli autovalori della matrice A, soluzioni di $\det(sI - A) = s^2 = 0$, sono $\lambda_{1,2} = \{0, 0\}$. L'autovalore in zero ha molteplicità pari a due e quindi, il sistema non è asintoticamente stabile ma è instabile (debolente). Non essendoci autovalori a parte reale negativa, il sistema non è BIBS stabile. Il sistema non è BIBO stabile tra $u(t)$ e $y(t)$.

Domanda 4

Si consideri il modello non lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = f(x, u) = [1 - 0.1x(t)]x(t) + u(t).$$

i) Calcolare gli eventuali punti di equilibrio del tipo $(\bar{x}, \bar{u})$, con $\bar{u} = 0$.

ii) Linearizzare il sistema nell'intorno di tali punti di equilibrio, e valutare la stabilità (del sistema linearizzato).

Soluzione 1:

i) Si cercano soluzioni costanti del tipo $x(t) = \bar{x}$, $\bar{u} = 0$:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 = (1 - 0.1\bar{x})\bar{x} + 0, \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \{0, 10\}.$$

ii) Linearizzando si ottiene:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\bar{x},0} = -0.1x + (1 - 0.1x)\Big|_{\bar{x},0} = 1 - 0.2\bar{x}, \qquad b = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\bar{x},0} = 1$$

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \bar{x}, \quad \tilde{u}(t) := u(t) - 0$$

Per $\bar{x} = 0$ allora $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$, che ha autovlore pari a $1 > 0$ e quindi il punto di equilibrio è instabile.
Per $\bar{x} = 10$ allora $\dot{\tilde{x}}(t) = -\tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$ che ha autovalore pari a $-1 < 0$ e quindi il punto di equilibrio è stabile.

Domanda 5

Sia
$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s - 1)}$$
la fdt nella catena diretta di un anello di retroazione unitaria negativa. Si tracci il luogo delle radici per $K \geq 0$ determinando in particolare la posizione di eventuali asintoti, punti multipli, punti di attraversamento dell'asse immaginario e i relativi valori di K.

Soluzione 1:

$G(s)$ ha tre poli $\{+1, -1 \pm j\}$. I punti dell'asse reale a sinistra di +1 appartengono al luogo delle radici. Il luogo ha 3 rami che formano una stella con inclinazione

$$\varphi_\ell = \frac{(2\ell+1)\pi}{n-m} \qquad \ell = 0, 1, \dots, n-m-1 \qquad \Rightarrow \varphi_{1,2,3} = \frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3},$$

e centrata in

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i - \sum_{i=0}^{m} z_i}{n-m} = \frac{(1-1+j-1-j)}{3} = -\frac{1}{3}\,.$$

Per il calcolo degli eventuali punti doppi, si può utilizzare l'equazione

$$a(s)\frac{db(s)}{ds} = b(s)\frac{da(s)}{ds},$$

che porta all'equazione

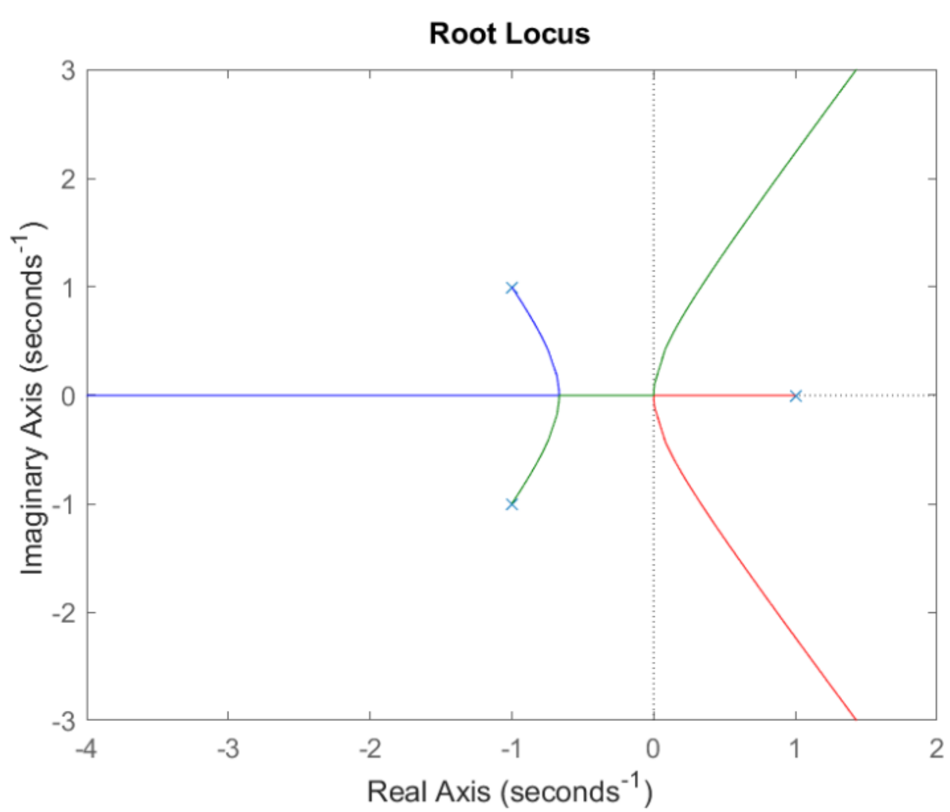
$$3s^2 + 2s = s(3s+2) = 0$$

che ha come soluzioni $s_{1,2} = -\frac{2}{3}, 0$; entrambi questi punti appartenono al luogo. I corrispondenti valori di K si possono determinare utilizzando l'equazione del luogo valutata in $s_{1,2}$:

$$p_K(s)|_{s=-2/3} = s^3 + s^2 + k - 2\big|_{s=-2/3} = 0, \quad \Rightarrow \quad K = \frac{50}{27},$$

$$p_K(s)|_{s=0} = s^3 + s^2 + k - 2\big|_{s=0} = 0, \quad \Rightarrow \quad K = 2.$$

Data la forma del luogo delle radici, si evince che esso attraversa l'asse immaginario per $s = 0$ in corrispondenza di $K = 2$.



Domanda 6

Dato il polinomio

$$p_k(s) = s^3 + s^2 + K - 2$$

se ne studi la stabilità applicando il criterio di Routh.

Soluzione 1:

Applicando il Criterio di Routh al polinomio

$$p_K(s) = s^3 + s^2 + K - 2\,,$$

la tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & K-2 \\ 1 & -(K-2) & \\ 0 & K-2 & \end{array}$$

da cui si evince che il sistema è instabile per $K > 0$ (variazioni di segno tra gli elementi della prima colonna della tabella, e quindi ci sono radici a parte reale positiva in $p_K(s)$). Non esistono valori di $K > 0$ per cui il sistema a catena chiusa è stabile (si noti che per $K = 2$ si ha una radice in $s = 0$ con molteplicità 2)

Domanda 7

Sia consideri la fdt

$$G(s) = \frac{2}{2s^2 + 24s + 40}.$$

Facendo riferimento a un'architettura di controllo in retroazione unitaria negativa, progettare un controllore $C(s)$ per $G(s)$ che assicuri le seguenti prestazioni:

- errore a regime nullo per un riferimento pari al gradino unitario;
- sovraelongazione massima inferiore al 5%;
- tempo si assestamento inferiore a 10 secondi.

Soluzione 1:

La fdt può essere scritta come:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}.$$

Per soddisfare la specifica sullerrore nullo a regime (per un gradino di riferimento) si può utilizzare un controllore PI per introdurre un polo nellorigine, così il sistema diventa di tipo 1.

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} = k_p \frac{s + k_i/k_p}{s} = k_p \frac{s+z_1}{s},$$

$$L(s) = C(s)G(s) = k_p(s+z_1)\frac{1}{s(s+2)(s+10)}.$$

Si può utilizzare il Luogo delle Radici per la progettazione del controllore. Si può pensare di allocare come ragionevole compromesso lo zero del PI in -1 (cioè $s = -z_1 = -1$ e quindi $1 = \frac{k_i}{k_p}$). Si ottiene perciò:

$$L(s) = k_p \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+10)}.$$

$$p_{k_p}(s) = s^3 + 12s^2 + (20 + k_p)s + k_p.$$

Per soddisfare le specifiche in termini di massima sovrelongazione e tempo di assestamento si opta per $T_s = 6 < 10$. di conseguenza $\sigma \leq -3/T_s = -0.5$ e $0.707 \leq \xi \leq 1$. Coerentemente si fisssa il polo dominante del sistema, ad esempio, in -0.5:

$$p_{k_p}(-0.5) = (-0.5)^3 + 12(-0.5)^2 + (20 + k_p)(-0.5) + k_p = -7.125 + 0.5k_p = 0,$$

da cui si evince

$$k_p = \frac{7.125}{0.5} = 14.25,$$

$$\frac{k_i}{k_p} = 1, \quad \Rightarrow \quad k_i = k_p = 14.25,$$

$$C(s) = 14.25 + \frac{14.25}{s}.$$