Effetto della retroazione sul comportamento a regime

Contents map

developed content units	**taxonomy levels**
comportamento a regime	u1, e1

prerequisite content units	**taxonomy levels**
controllo in catena chiusa	u1, e1

Roadmap

- cosa succede ai segnali a rampa se mettiamo il sistema in catena chiusa?

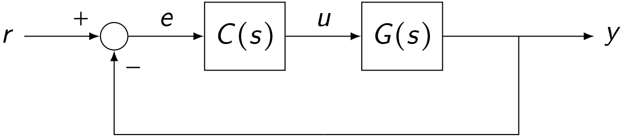
Cosa impariamo ora?

come viene modificato l'andamento a regime se introduco un meccanismo di controllo in catena chiusa?

Specifica molto importante nel progetto del controllore in retroazione

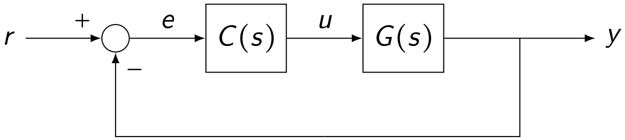
quanto grande e' l'errore a regime nella risposta al gradino, rampa, rampa parabolica etc?

Analisi semplificata dell'andamento a regime



vogliamo $r(t) \simeq y(t)$ a regime, quindi $e(t) = r(t) - y(t) \simeq 0$.

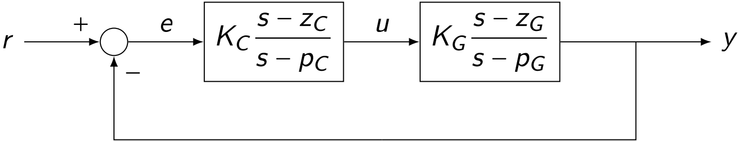
Analisi semplificata dell'andamento a regime



vogliamo $r(t) \simeq y(t)$ a regime, quindi $e(t) = r(t) - y(t) \simeq 0$. Equazione per l'analisi:

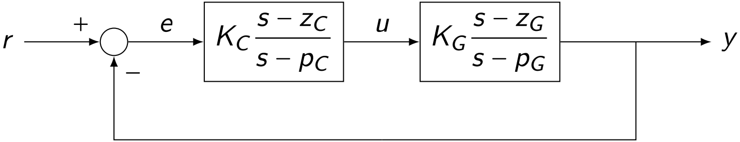
$$E(s) = W_{re}(s)R(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s)$$

Esempio 1



$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(s - p_C)(s - p_G)}{(s - p_C)(s - p_G) + K_C K_G (s - z_C)(s - z_G)}$$

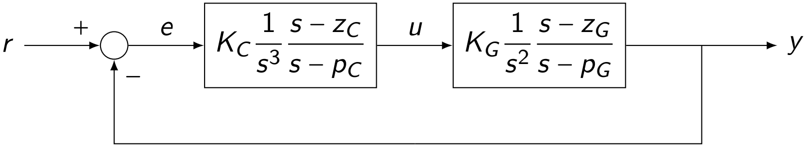
Esempio 1



$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(s - p_C)(s - p_G)}{(s - p_C)(s - p_G) + K_C K_G (s - z_C)(s - z_G)}$$

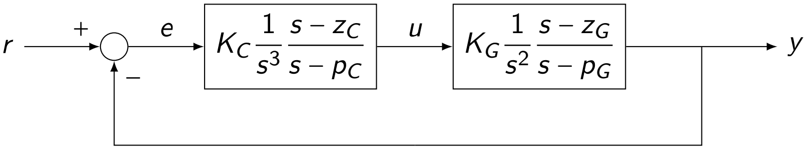
in questa struttura di controllo, i poli originari di C *e* G *diventano zeri di* W_{re}*!*

Esempio 2



$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s^{3+2}(s - p_C)(s - p_G)}{s^{3+2}(s - p_C)(s - p_G) + K_C K_G (s - z_C)(s - z_G)}$$

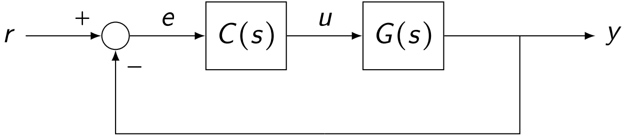
Esempio 2



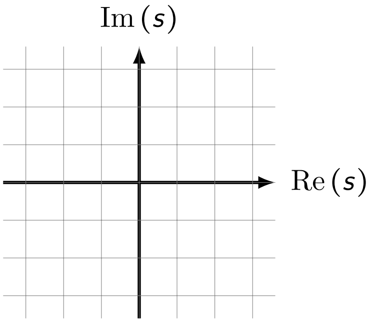
$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s^{3+2}(s - p_C)(s - p_G)}{s^{3+2}(s - p_C)(s - p_G) + K_C K_G (s - z_C)(s - z_G)}$$

in questa struttura di controllo, se C *e* G *hanno in tutto* ℓ *integratori, allora* W_{re} *ha* ℓ *derivatori!*

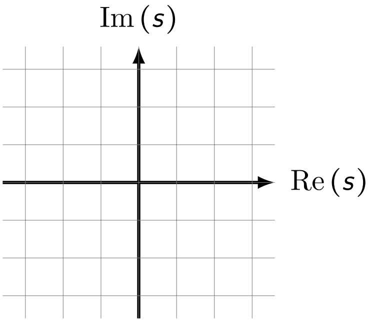
In questo caso il tipo di W_{re} e' l'opposto della somma dei tipi di $C(s)$ e $G(s)$



$C(s)$ e $G(s)$:

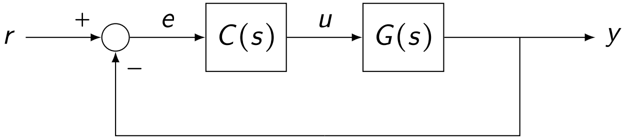


$W_{re}(s)$:



?

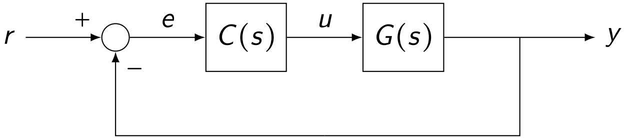
Analisi semplificata dell'andamento a regime



Assunzioni:

- $W_{re}(s)$ in forma di Bode, con guadagno $\overline{K}_B$ e tipo $\bar{\ell}$ (potenzialmente negativo)
- $r(t) = \delta^{(-k)}(t) \implies R(s) = \dfrac{1}{s^k}$

Analisi semplificata dell'andamento a regime



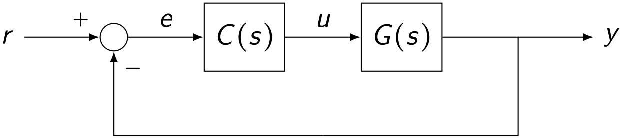
Assunzioni:

- $W_{re}(s)$ in forma di Bode, con guadagno $\overline{K}_B$ e tipo $\bar{\ell}$ (potenzialmente negativo)
- $r(t) = \delta^{(-k)}(t) \implies R(s) = \dfrac{1}{s^k}$

"sommando le crocette e zeri":

$$E(s) = W_{re}(s)R(s) = \left(K_{re} \frac{1}{s^{\bar{\ell}}} \frac{\prod \text{zeri}}{\prod \text{poli stabili}} \right) R(s)$$

Analisi semplificata dell'andamento a regime



Assunzioni:

- $W_{re}(s)$ in forma di Bode, con guadagno $\overline{K}_B$ e tipo $\bar{\ell}$ (potenzialmente negativo)
- $r(t) = \delta^{(-k)}(t) \implies R(s) = \dfrac{1}{s^k}$

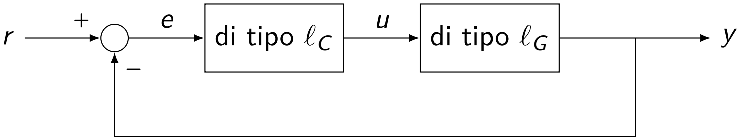
"sommando le crocette e zeri":

$$E(s) = W_{re}(s)R(s) = \left(K_{re}\frac{1}{s^{\bar{\ell}}}\frac{\prod \text{zeri}}{\prod \text{poli stabili}}\right)R(s)$$

quindi

$$E(s) = K_{re}\frac{1}{s^{k+\bar{\ell}}}\frac{\prod \text{zeri}}{\prod \text{poli stabili}}$$

Analisi semplificata dell'andamento a regime



$$E(s) = K_{re} \frac{1}{s^{k+\bar{\ell}}} \frac{\prod \text{zeri}}{\prod \text{poli stabili}}$$

Domanda: per quali k e $\bar{\ell}$ si ha $e(t) \to 0$ per $t \to +\infty$?

Esempi, parte A:

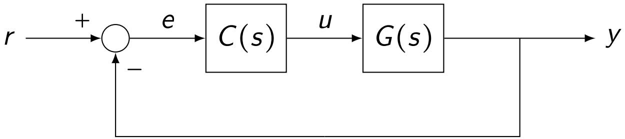
- $r(t)$ = step, C e G non hanno integratori $\Longrightarrow$ $e(t)$ a regime resta uno step
- $r(t)$ = rampa lineare, C e G non hanno integratori $\Longrightarrow$ $e(t)$ a regime resta una rampa lineare

Esempi, parte B:

- $r(t)$ = step, C e G hanno in totale un integratore $\Longrightarrow$ $e(t)$ a regime va a zero
- $r(t)$ = rampa lineare, C e G hanno in totale un integratore $\Longrightarrow$ $e(t)$ a regime diventa uno step

?

Analisi semplificata dell'andamento a regime



$$\begin{cases} W_{re}(s) \text{ di tipo } \bar{\ell} \text{ (potenzialmente negativo)} \\ r(t) = \delta^{(-k)}(t) \end{cases} \implies \quad e(t) \simeq \overline{K}_B \delta^{(-k-\bar{\ell})}(t)$$

Implicazioni:

- se $-k-\bar{\ell} \geq 0 \implies$ errore a regime zero
- se $-k-\bar{\ell} = -1 \implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
- se $-k-\bar{\ell} \leq -2 \implies$ errore a regime infinito

Lettura alternativa delle implicazioni

- se $-k-\overline{\ell} \geq 0 \implies$ errore a regime zero
- se $-k-\overline{\ell} = -1 \implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
- se $-k-\overline{\ell} \leq -2 \implies$ errore a regime infinito

Considerazioni:

- $\ell =$ somma del numero di integratori di C e G
- $\delta(t) = \delta^{(0)}(t) =$ Dirac's delta
- $\delta^{(-1)}(t) =$ integrazione del Dirac's delta $=$ step
- $\delta^{(-2)}(t) =$ integrazione dello step $=$ rampa lineare
- $\delta^{(-3)}(t) =$ integrazione della rampa lineare $=$ rampa quadratica
- $\ldots$

Lettura alternativa delle implicazioni

- se $-k-\overline{\ell} \geq 0 \implies$ errore a regime zero
- se $-k-\overline{\ell} = -1 \implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
- se $-k-\overline{\ell} \leq -2 \implies$ errore a regime infinito

- se C e G non hanno integratori allora
  - $r(t)$ = step $\implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
  - $r(t)$ = rampa $\implies$ errore a regime infinito

Lettura alternativa delle implicazioni

- se $-k - \bar{\ell} \geq 0 \implies$ errore a regime zero
- se $-k - \bar{\ell} = -1 \implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
- se $-k - \bar{\ell} \leq -2 \implies$ errore a regime infinito

- se C e G hanno in totale 1 integratore allora
  - $r(t)$ = step $\implies$ errore a regime nullo
  - $r(t)$ = rampa lineare $\implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
  - $r(t)$ = rampa quadratica (o piu') $\implies$ errore a regime infinito

Lettura alternativa delle implicazioni

- se $-k-\overline{\ell} \geq 0 \implies$ errore a regime zero
- se $-k-\overline{\ell} = -1 \implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
- se $-k-\overline{\ell} \leq -2 \implies$ errore a regime infinito

- se C e G hanno in totale 2 integratori allora
  - $r(t)$ = step o rampa lineare $\implies$ errore a regime nullo
  - $r(t)$ = rampa quadratica $\implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
  - $r(t)$ = rampa cubica (o piu') $\implies$ errore a regime infinito

Lettura alternativa delle implicazioni

- se $-k-\overline{\ell} \geq 0 \implies$ errore a regime zero
- se $-k-\overline{\ell} = -1 \implies$ errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$
- se $-k-\overline{\ell} \leq -2 \implies$ errore a regime infinito

- se C e G hanno in totale ℓ integratori allora
  - ho errore a regime nullo per Dirac's delta integrati fino a ℓ volte
  - ho errore a regime finito e pari a $\overline{K}_B$ per Dirac's delta integrati $\ell+1$ volte
  - ho errore a regime infinito per Dirac's delta integrati piu' di $\ell+1$ volte

?

Come si trova l'errore a regime $\overline{K}_B$ per il caso $r(t) = \delta^{(-\ell-1)}$?

punto di partenza: $\overline{K}_B$ e $\overline{\ell}$ di $W_{re}(s)$ dipendono da guadagno di Bode e tipo di $W(s) = C(s)G(s)$

Come si trova l'errore a regime $\overline{K}_B$ per il caso $r(t) = \delta^{(-\ell-1)}$?

punto di partenza: $\overline{K}_B$ e $\bar{\ell}$ di $W_{re}(s)$ dipendono da guadagno di Bode e tipo di $W(s) = C(s)G(s)$

Conti:

$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} \text{ con guadagno d'anello } W(s) = C(s)G(s)$$

$$W(s) = \frac{K_B}{s^\ell}\overline{W}(s), \quad \overline{W}(0) = 1 \text{ in forma di Bode}$$

$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_B}{s^\ell}\overline{W}(s)} = \frac{s^\ell}{s^\ell + K_B\overline{W}(s)}$$

$$\ell \leq -1 \longrightarrow W_{re}(0) = 1 \longrightarrow \bar{\ell} = 0, \overline{K}_B = 1$$

$$\ell = 0 \longrightarrow W_{re}(0) = \frac{1}{1 + K_B} \longrightarrow \bar{\ell} = 0, \overline{K}_B = \frac{1}{1 + K_B}$$

Caso specifico: $r(t) =$ step

allora

$$\overline{W}(s) = \frac{s^{\ell}}{s^{\ell} + K_B \overline{W}(s)}$$

implica

- errore a regime $= \dfrac{1}{1 + K_B}$ se C e G non hanno integratori
- errore a regime $= 0$ se C e G hanno almeno un integratore

Caso specifico: $r(t)$ = rampa lineare

allora

$$\overline{W}(s) = \frac{s^\ell}{s^\ell + K_B \overline{W}(s)}$$

implica

- errore a regime $=$ infinito se C e G non hanno integratori
- errore a regime $= \dfrac{1}{K_B}$ se C e G hanno un integratore
- errore a regime $= 0$ se C e G hanno piu' di un integratore

Caso specifico: $r(t)$ = rampa quadratica

allora

$$\overline{W}(s) = \frac{s^\ell}{s^\ell + K_B \overline{W}(s)}$$

implica

- errore a regime $=$ infinito se C e G hanno meno di due integratori
- errore a regime $= \dfrac{1}{K_B}$ se C e G hanno due integratori
- errore a regime $= 0$ se C e G hanno piu' di due integratore

Tabella riassuntiva: errore a regime in funzione del tipo del sistema e di ingresso

	r = step	r = rampa lineare	r = rampa quadratica	$\dots$
W di tipo 0	$\dfrac{1}{1+K_B}$	∞	∞	$\dots$
W di tipo 1	0	$\dfrac{1}{K_B}$	∞	$\dots$
W di tipo 2	0	0	$\dfrac{1}{K_B}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$

Esempio: controllo della velocita' di un'auto tramite controllore P

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{K}{ms + b} = \frac{K/b}{1 + ms/b}$$

quindi

$$K_B = \frac{K}{b} \qquad \ell = 0$$

quindi

- errore a regime al gradino (unitario): $e(\infty) = \dfrac{1}{1 + K/b}$
- errore a regime alle rampe: infinito

Esempio: controllo della velocita' di un'auto tramite controllore PI

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{K}{s(ms+b)} = \frac{K/b}{s(1+ms/b)}$$

quindi

$$K_B = \frac{K}{b} \qquad \ell = 1$$

quindi

- errore a regime al gradino: $e(\infty) = 0$
- errore a regime alla rampa lineare (unitaria): $e(\infty) = \dfrac{b}{K}$
- errore a regime alle rampa quadratica (e successive): infinito

Recap of the module
“Effetto della retroazione sul comportamento a regime”

- l’errore a regime dipende dal tipo dell’anello e dal tipo di ingresso
- e’ importante ricordarsi la tabella!

?