

Effetti della retroazione sulla sensibilit  alle variazioni dei parametri

Contents map

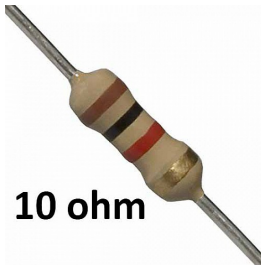
<u>developed content units</u>	<u>taxonomy levels</u>
sensibilita'	u1, e1

<u>prerequisite content units</u>	<u>taxonomy levels</u>
funzione di trasferimento	u1, e1

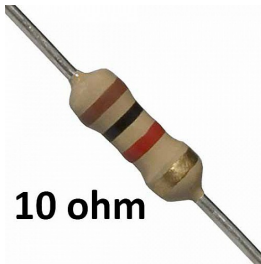
Roadmap

- sensibilita'
- effetti della retroazione sulla sensibilita'

Are we sure this is exactly 10 Ohms?



Are we sure this is exactly 10 Ohms?



essential message: all the models are uncertain

Underlying problem

testing the robustness of the final results in the presence of uncertainty in the ingredients

Cosa impariamo ora?

Risposta alla domanda "se ho un sistema con livello di incertezza X sui suoi parametri, e lo metto in feedback, quanto grande è il livello di incertezza sulle performance della catena chiusa?"

Questo modulo in a nutshell

- quantificazione della sensibilita' di una funzione di trasferimento rispetto a un parametro
- quantificazione di come il controllo in retroazione modifichi tale sensibilita'

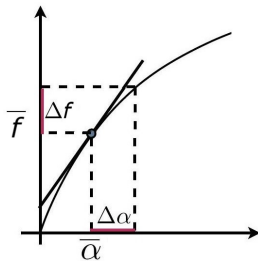
?

Concetto piu' generale di questo corso: sensibilita' assoluta

Motivating example:

$$W(s, \alpha) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha^2)(s + \alpha^3)}$$

con valore nominale $\bar{\alpha} = 2$.



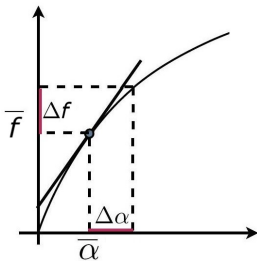
Concetto piu' generale di questo corso: sensibilita' assoluta

Motivating example:

$$W(s, \alpha) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha^2)(s + \alpha^3)}$$

con valore nominale $\bar{\alpha} = 2$. Parametro di nostro interesse = guadagno di Bode:

$$f(\alpha) = W(0, \alpha) \quad \Longrightarrow \quad \text{valore nominale } \bar{f} = f(\bar{\alpha}) = \frac{1}{16}$$



Concetto piu' generale di questo corso: sensibilita' assoluta

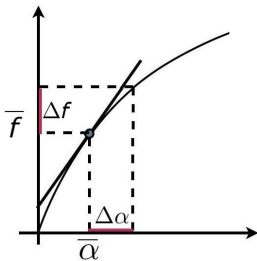
Motivating example:

$$W(s, \alpha) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha^2)(s + \alpha^3)}$$

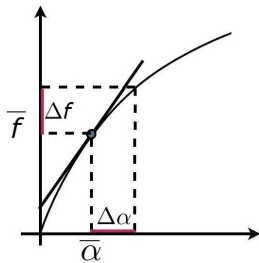
con valore nominale $\bar{\alpha} = 2$. Parametro di nostro interesse = guadagno di Bode:

$$f(\alpha) = W(0, \alpha) \quad \Longrightarrow \quad \text{valore nominale } \bar{f} = f(\bar{\alpha}) = \frac{1}{16}$$

Graficamente:

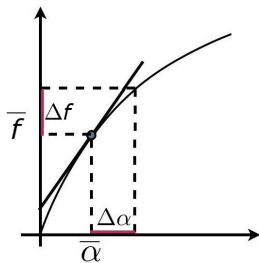


Quanto varia $\bar{G}$ se $\bar{\alpha}$ varia?



$$f - \bar{f} \simeq f'(\bar{\alpha})(\alpha - \bar{\alpha})$$

Quanto varia $\bar{G}$ se $\bar{\alpha}$ varia?

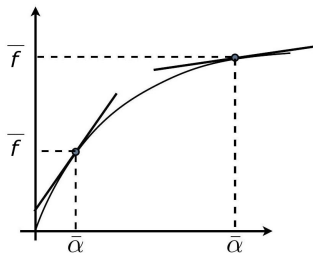


$$f - \bar{f} \simeq f'(\bar{\alpha})(\alpha - \bar{\alpha})$$

Notazione piu' leggibile:

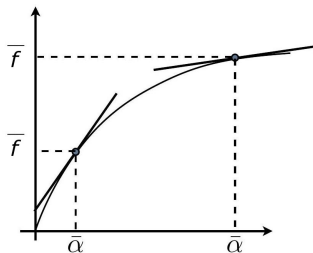
$$\Delta f \simeq f'(\bar{\alpha})\Delta\alpha$$

Il valore della sensibilit  assoluta dipende da dove si valuta la funzione



?

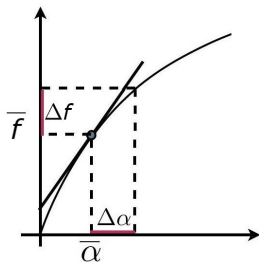
Introduzione alla sensibilit  relativa



conviene ragionare in termini di percentuali, e quindi trovare una espressione del tipo

$$\bar{\alpha} \text{ incerta al } X\% \implies \bar{f} \text{ incerta al } Y\%$$

Quantita' ancillari



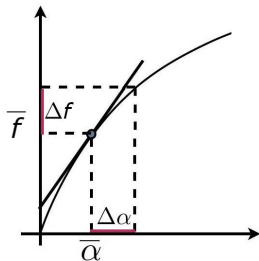
Variazione relativa di α :

$$\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} = \frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}}$$

Variazione relativa di f :

$$\frac{f - \bar{f}}{\bar{f}} = \frac{\Delta f}{\bar{f}}$$

Dalla sensibilita' assoluta alla sensibilita' relativa



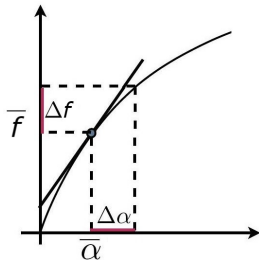
Propagazione dell'incertezza in termini assoluti:

$$\Delta f \simeq f'(\bar{\alpha}) \Delta \alpha$$

Propagazione dell'incertezza in termini relativi:

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} \simeq f'(\bar{\alpha}) \frac{\bar{\alpha}}{\bar{f}} \frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}}$$

Dalla sensibilit  assoluta alla sensibilit  relativa



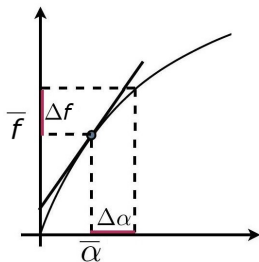
Propagazione dell'incertezza in termini assoluti:

$$\Delta f \simeq f'(\bar{\alpha})\Delta\alpha$$

Propagazione dell'incertezza in termini relativi:

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}} \simeq f'(\bar{\alpha}) \frac{\bar{\alpha}}{\bar{f}} \frac{\Delta\alpha}{\bar{\alpha}} \quad \Longrightarrow \quad \text{sensibilit  relativa: } S_{\alpha}^f(\alpha) = f'(\alpha) \frac{\alpha}{f(\alpha)}$$

Implicazioni della sensibilita' relativa

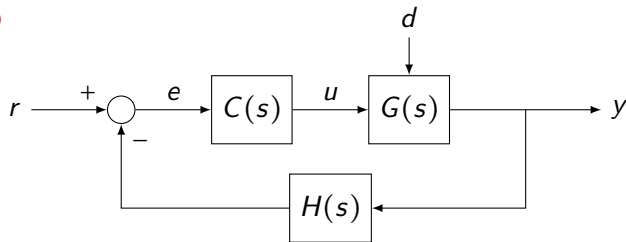


sensibilita' relativa: $S(\alpha) = f'(\alpha) \frac{\alpha}{f(\alpha)}$

- $|S(\bar{\alpha})|$ grande $\implies \bar{f}$ molto sensibile
- $|S(\bar{\alpha})|$ piccolo $\implies \bar{f}$ poco sensibile

?

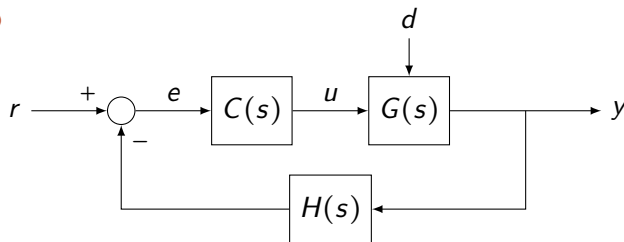
Problema pratico



La FdT del sistema dipende da un parametro, e.g., m :

$$G(s; m) = \frac{1}{ms + b}$$

Problema pratico



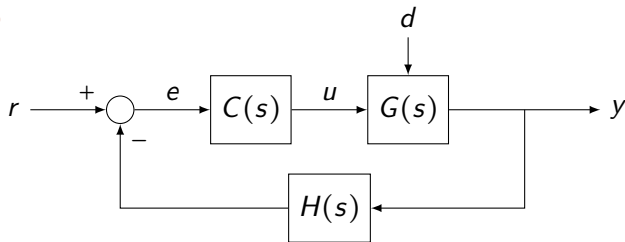
La FdT del sistema dipende da un parametro, e.g., m :

$$G(s; m) = \frac{1}{ms + b}$$

Possiamo calcolare esplicitamente la sensibilità di $G(s; \alpha)$ rispetto ad un valore nominale di α ,

$$S_{\alpha}^G = \frac{\alpha}{G(s; \alpha)} \frac{\partial G(s; \alpha)}{\partial \alpha}$$

Problema pratico



La FdT del sistema dipende da un parametro, e.g., m :

$$G(s; m) = \frac{1}{ms + b}$$

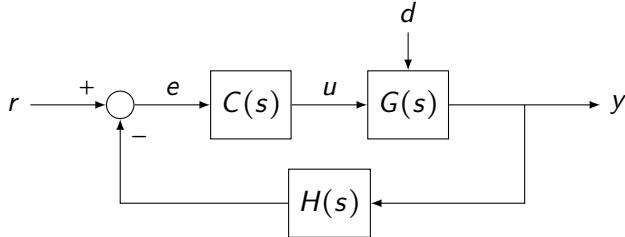
Possiamo calcolare esplicitamente la sensibilità di $G(s; \alpha)$ rispetto ad un valore nominale di α ,

$$S_{\alpha}^G = \frac{\alpha}{G(s; \alpha)} \frac{\partial G(s; \alpha)}{\partial \alpha}$$

Se retroazioniamo G con C , e W e' il sistema in catena chiusa, quanto sara' S_{α}^W ?

Quanto e' S_{α}^W ?

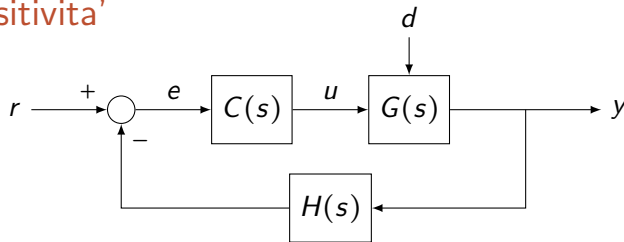
Conti



$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^W &= \frac{\alpha}{W} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\alpha}{W} \frac{\partial W}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \\ &= \alpha \frac{1 + HCG}{CG} \frac{C(1 + HCG) - CGHC}{(1 + HCG)^2} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_{\alpha}^G(s) \end{aligned}$$

Sensibilita' e sensitivita'



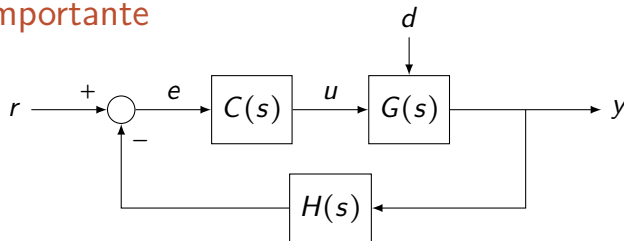
$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_{\alpha}^G(s) = S(s)S_{\alpha}^G(s)$$

con

$$S(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} \text{ funzione di sensitivita'}$$

Considerazione importante



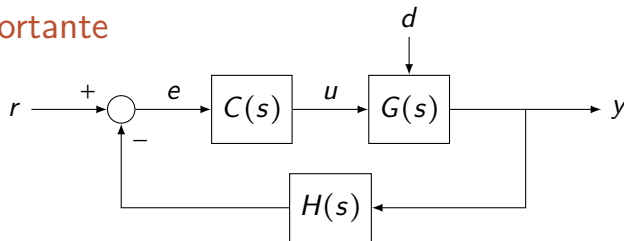
$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_{\alpha}^G(s) = S(s) S_{\alpha}^G(s)$$

$\implies$ sensibilit  del sistema retroazionato < sensibilit  dell'anello aperto se $C(s)$ e' "grande"

?

Precisazione importante



sensibilita' e sensitivita' del sistema retroazionato W dipendono da dove si trova α

i.e.,

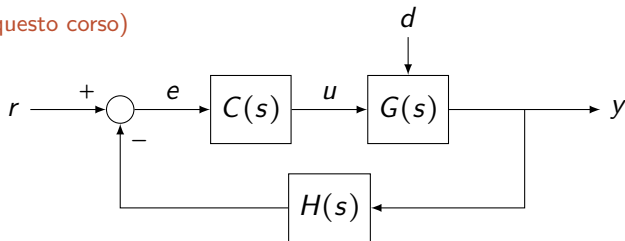
$$G = G(s; \alpha) \quad \Longrightarrow \quad S_{\alpha}^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s; \alpha)} S_{\alpha}^G(s) = S(s)S_{\alpha}^G(s)$$

$$C = C(s; \alpha) \quad \Longrightarrow \quad S_{\alpha}^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s; \alpha)G(s)} S_{\alpha}^C(s) = S(s)S_{\alpha}^C(s)$$

$$H = H(s; \alpha) \quad \Longrightarrow \quad S_{\alpha}^W(s) = \frac{H(s; \alpha)C(s)G(s)}{1 + H(s; \alpha)C(s)G(s)} S_{\alpha}^H(s) = T(s)S_{\alpha}^H(s)$$

Una complementarità con implicazioni profonde

(ma che non vediamo in questo corso)

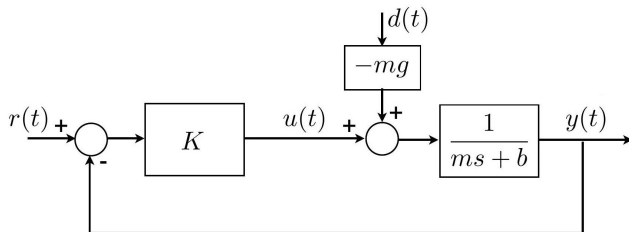


$$\begin{cases} G = G(s; \alpha_1) \\ H = H(s; \alpha_1) \end{cases} \implies \begin{cases} S_{\alpha_1}^W(s) = \frac{1}{1 + H(s; \alpha_2) C(s) G(s; \alpha_1)} & S_{\alpha_1}^H(s) = S(s) S_{\alpha_1}^H(s) \\ S_{\alpha_2}^W(s) = \frac{H(s; \alpha_2) C(s) G(s; \alpha_1)}{1 + H(s; \alpha_1) C(s) G(s; \alpha_1)} & S_{\alpha_2}^H(s) = T(s) S_{\alpha_2}^H(s) \end{cases}$$
$$\implies S(s) + T(s) = 1 \quad \forall s$$

(che implica prendere azioni per migliorare S peggiorerà T e viceversa)

?

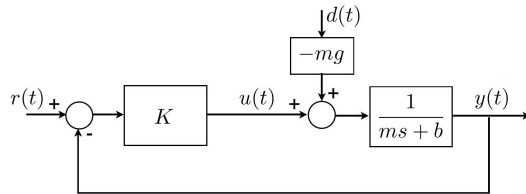
Esempio: controllo della velocità di un'auto con un controllore P



$$G(s) = \frac{1}{ms + b} \quad W(s) = W_{ry}(s) = \frac{K}{ms + b + K}$$

$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} \quad S_{\alpha}^G(s) = \frac{ms + b}{ms + b + K} \frac{-b}{ms + b} = \frac{-b}{ms + b + K}$$

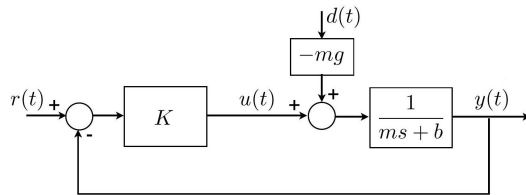
Esempio: controllo della velocità di un'auto con un controllore P



$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{-b}{ms + b + K} \quad S_{\alpha}^W(0) = \frac{-b}{b + K}$$

$$\left| \frac{\Delta W(0)}{W(0)} \right| \simeq \left| \frac{-b}{b + K} \right| \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

Esempio: controllo della velocità di un'auto con un controllore P

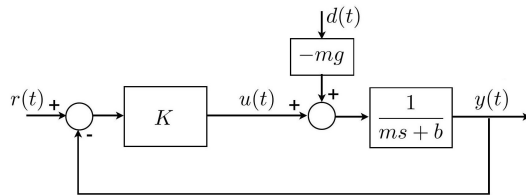


$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{-b}{ms + b + K} \quad S_{\alpha}^W(0) = \frac{-b}{b + K}$$

$$\left| \frac{\Delta W(0)}{W(0)} \right| \simeq \left| \frac{-b}{b + K} \right| \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

$$\implies \text{se } K \rightarrow \infty \text{ allora } \left| \frac{\Delta W(0)}{W(0)} \right| \rightarrow 0$$

Esempio: controllo della velocità di un'auto con un controllore P



$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{-b}{ms + b + K} \quad S_{\alpha}^W(0) = \frac{-b}{b + K}$$

$$\left| \frac{\Delta W(0)}{W(0)} \right| \simeq \left| \frac{-b}{b + K} \right| \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

$$\implies \text{ se } K \rightarrow \infty \text{ allora } \left| \frac{\Delta W(0)}{W(0)} \right| \rightarrow 0$$

attenzione che queste quantità sono stime, perché
derivate da modelli e quindi per natura incerte

Recap of the module

“Effetti della retroazione sulla sensibilita' alle variazioni dei parametri”

- la sensibilita' e' un concetto importante
- con un po' di conti possiamo trovare numeri che ci permettono di stimare gli effetti di variazioni

?