Il luogo delle radici

Contents map

developed content units	taxonomy levels
luogo delle radici	u1, e1

prerequisite content units	taxonomy levels
controllo in catena chiusa	u1, e1

Main ILO of sub-module "Il luogo delle radici"

Descrivere la definizione formale del luogo delle radici in termini matematici

Spiegare il significato fisico del luogo delle radici in relazione allo spostamento dei poli in catena chiusa al variare di K e al suo impatto sul transitorio

Applicare le regole del luogo delle radici per tracciare qualitativamente il luogo in casi semplici

Identificare punti doppi e punti di attraversamento dell'asse immaginario

Determinare il valore critico $K_{\max}$ per la stabilità mediante l'analisi del luogo delle radici

Roadmap

- perche' serve questo strumento
- esempi fatti dal computer
- come fare a mano
- considerazioni sulla sua validita'

Cosa impariamo ora?

come usare il *luogo delle radici*, uno strumento molto utile per progettare controllori proporzionali

`https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLDraw.html`

A che domanda stiamo rispondendo?

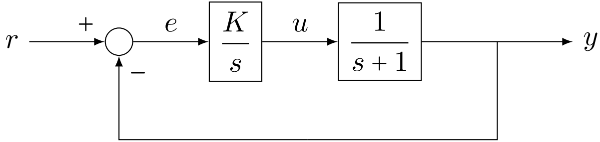
come si spostano i poli del sistema in catena chiusa al variare di un parametro?

A che domanda stiamo rispondendo?

come si spostano i poli del sistema in catena chiusa al variare di un parametro?

Importanza = saper prevedere (tramite l'approsimazione coi poli dominanti) come sara' il transitorio

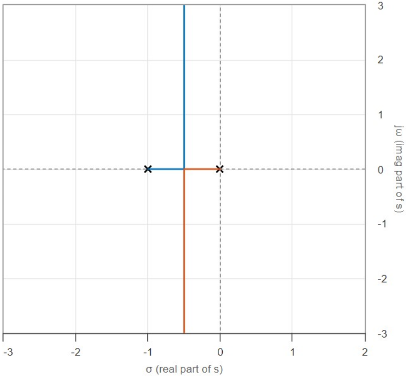
Esempio



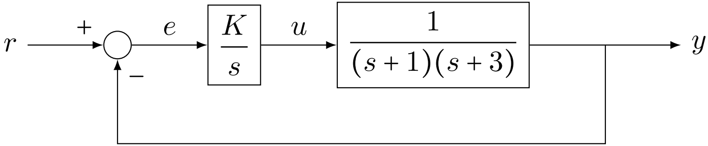
$$\Longrightarrow \quad W_{ry}(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

$\Longrightarrow$ al variare di K

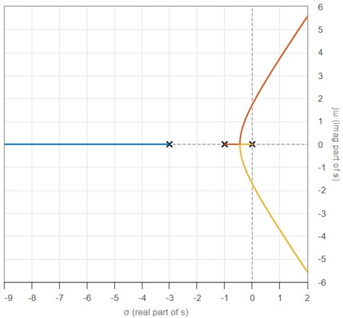
le radici sono:



Esempio



$$\Longrightarrow \quad W_{ry}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)+K} \quad \Longrightarrow$$

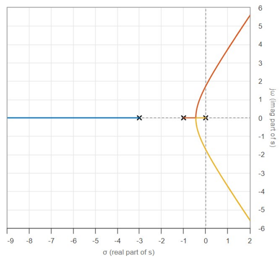


Definizione

$=$ insieme delle radici del polinomio $D(s) + KN(s)$ al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$ con $D(s)$ e $N(s)$ due polinomi dati

esempio:

$$W_{ry}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)+K}$$



Working assumptions

1. $D(s)$ e $N(s)$ sono monici
2. $D(s)$ e $N(s)$ sono coprimi
3. $\deg[D(s)] \geq \deg[N(s)]$
4. $K \geq 0$ *(i.e., analizziamo il "luogo positivo")*
5. conosciamo gli zeri di $D(s)$ e $N(s)$, i.e., sappiamo che

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$
$$N(s) = (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)$$

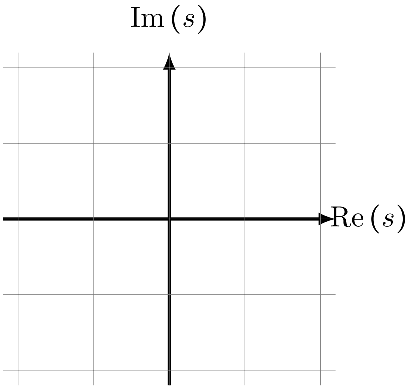
Definizione, ancora piu' formale

$$\mathcal{R}\big(N(s), D(s)\big) = \{s \in \mathbb{C} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ s.t. } D(s) + KN(s) = 0\}$$

Definizione, ancora piu' formale

$$\mathcal{R}\big(N(s), D(s)\big) = \{s \in \mathbb{C} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ s.t. } D(s) + KN(s) = 0\}$$

Nota: $D(s) + KN(s) = 0$ e' una equazione complessa in due variabili, una complessa e una reale $\implies \mathcal{R}\big(N(s), D(s)\big)$ e' una curva nel piano complesso



Che equazioni si risolvono per trovare il luogo delle radici?

step 1: *(definizione alternativa)*

$$D(s) + KN(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K}$$

Che equazioni si risolvono per trovare il luogo delle radici?

step 1: *(definizione alternativa)*

$$D(s) + KN(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K}$$

step 2: *(prima equazione)*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{N(s)}{D(s)}\right| = \frac{1}{|K|}$$

step 3: *(seconda equazione)*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K},\ K \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \angle\left(\frac{N(s)}{D(s)}\right) = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$$

Riscrittura della seconda equazione

$$\angle\left(\frac{N(s)}{D(s)}\right) = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

e' riscrivibile come

$$\sum_{i=1}^{m} \angle\,(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle\,(s - p_i) = (2h+1)\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Quindi disegnare il luogo delle radici = risolvere questo sistema

$$\begin{cases} \left|\dfrac{N(s)}{D(s)}\right| = \dfrac{1}{|K|} \\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \angle\,(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle\,(s - p_i) = (2h+1)\pi, \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

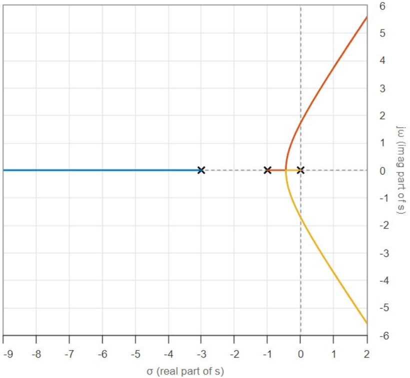
a mano? no, lo fa il computer! Ma possiamo capire qualitativamente il grafico senza fare tanti conti – come nelle prossime slides

?

Regole per il tracciamento

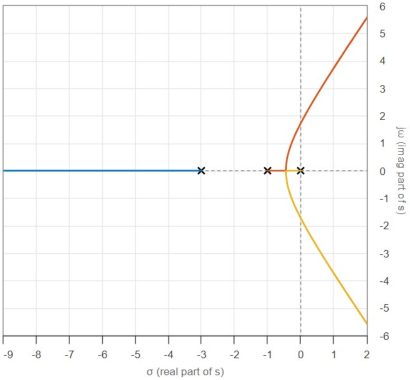
Regola 1 (Numero dei rami e simmetria)

Quanti rami?



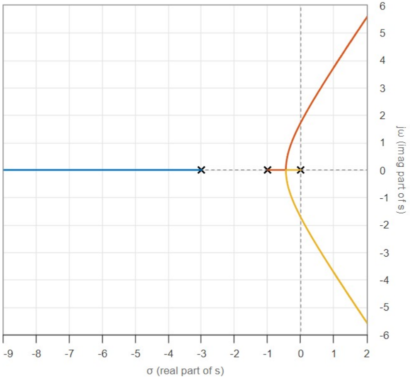
$$\deg\big(D(s) + KN(s)\big) = \deg\big(D(s)\big) = \text{"n. di poli"}$$

Come variano questi rami al variare di K?



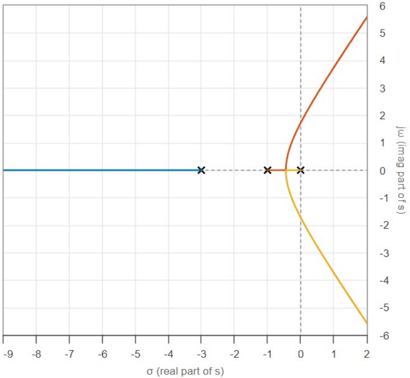
con continuita'

Si intersecano questi rami al variare di K?



si, ma solo per i valori di K per i quali il polinomio $D(s) + KN(s)$ ha zeri multipli

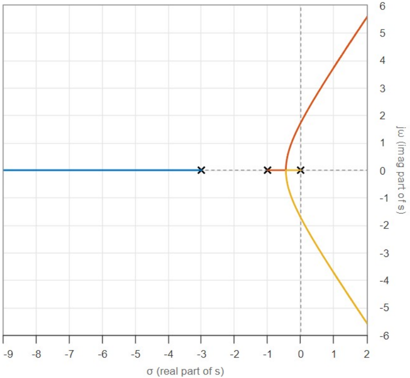
Ci sono simmetrie?



si, rispetto all'asse reale, perche' gli zeri sono o reali o complessi coniugati

Regola 2 (Comportamento limite e asintoti)

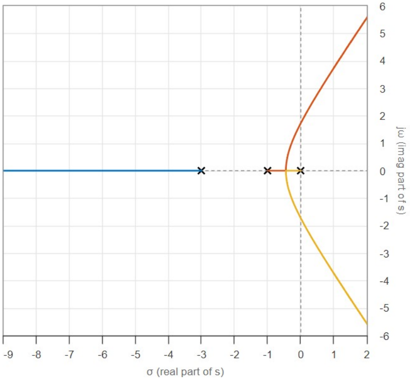
Dove partono i rami?



per $K = 0 \quad D(s) + KN(s) = D(s)$

quindi "partono dai poli"

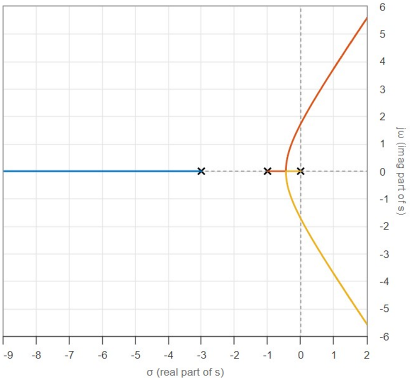
Dove finiscono i rami?



per $K \to +\infty \quad D(s) + KN(s) = 0 \mapsto N(s) = 0$

quindi "finiscono sugli zeri". *Ma cosa succede se ci sono meno zeri di poli?*

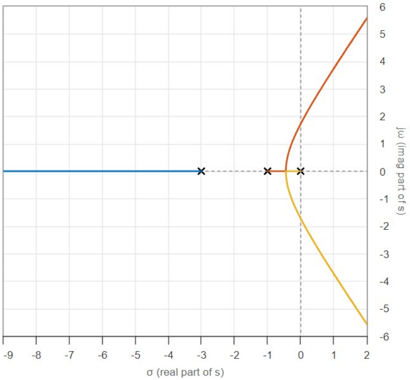
Dove finiscono i rami? Take 2



per $K \to +\infty \quad D(s) + KN(s) = 0 \mapsto N(s) = 0$

- "# zeri" rami finiscono sugli zeri,
- "# poli - # zeri" rami finiscono all'infinito

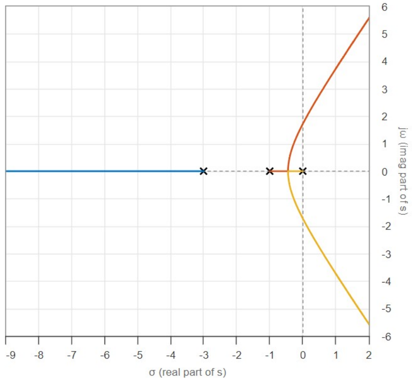
Come finiscono i "# poli - # zeri" rami all'infinito?



lungo "# poli - # zeri" semirette equidistanti e formanti una stella con centro in

$$\sigma_\star = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n - m} \in \mathbb{R}$$

Come finiscono i "# poli - # zeri" rami all'infinito?



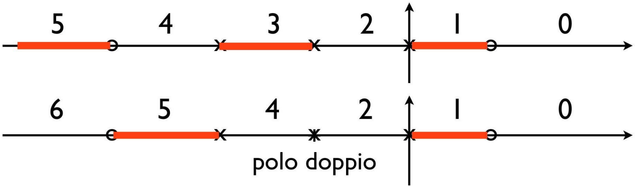
lungo "# poli - # zeri" semirette equidistanti e formanti una stella con centro in

$$\sigma_\star = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n - m} \in \mathbb{R}$$

"ma come e' girata questa stella?"

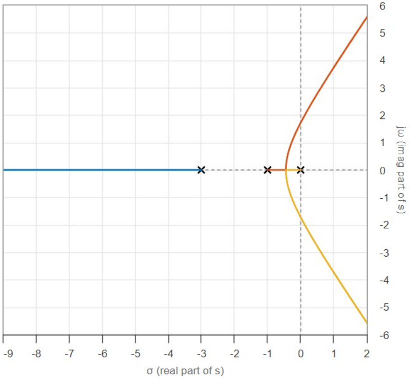
Regola 3 (Porzione dell'asse reale appartenente al luogo)

Towards "Come e' girata questa stella?"



Teorema: <u>"Un punto dell'asse reale $s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di zeri e poli a destra di s, contando anche le molteplicità, è dispari"</u>

Come e' girata questa stella?

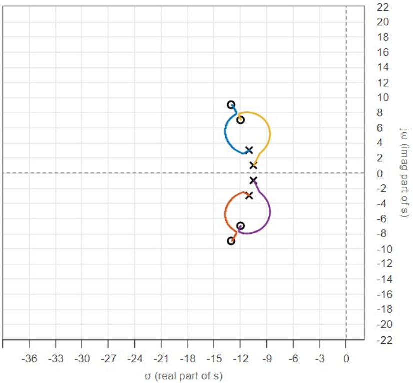


"Un punto dell'asse reale $s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di zeri e poli a destra di s, contando anche le molteplicità, è dispari"

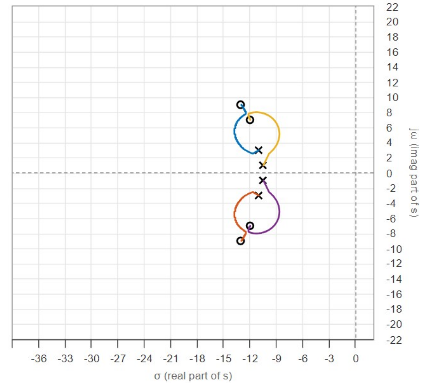
$\Longrightarrow$ se "# poli - # zeri" e' dispari allora un raggio va a $-\infty$ lungo l'asse reale

Regola 4 (punti doppi, e in generale punti multipli)

Come si fa a capire se i rami si intersecano?



Come si fa a capire se i rami si intersecano?



Lemma: un polinomio $f(s)$ ha uno zero di molteplicita' ℓ in $\overline{s} \in \mathbb{C}$ se e solo se

$$f(\overline{s}) = f^{(1)}(\overline{s}) = \cdots = f^{(\ell-1)}(\overline{s}) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(\ell)}(\overline{s}) \neq 0$$

Come si fa a capire se ci sono punti doppi?

step 1: calcola la derivata di $D(s) + KN(s)$ rispetto a s, i.e.,

$$D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s)$$

step 2: costruisci e risolvi il sistema

$$\begin{cases} D(s) + KN(s) = 0 \\ D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s) = 0 \end{cases}$$

step 3: le soluzioni (se ne esistono!) $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{C}$ sono i punti doppi del luogo

step 4: calcola anche i K_1, K_2, ... a cui corrispondono le soluzioni

step 5: *per questo corso, considera solo le soluzioni corrispondenti ai K_j reali e positivi*

Come si fa a capire se ci sono punti tripli?

step 1: calcola le derivate prime e seconde di $D(s) + KN(s)$ rispetto a s, i.e.,

$$D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s) \qquad D^{(2)}(s) + KN^{(2)}(s)$$

step 2: costruisci e risolvi il sistema

$$\begin{cases} D(s) + KN(s) = 0 \\ D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s) = 0 D^{(2)}(s) + KN^{(2)}(s) = 0 \end{cases}$$

step 3: le soluzioni (se ne esistono!) $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{C}$ sono i punti tripli del luogo

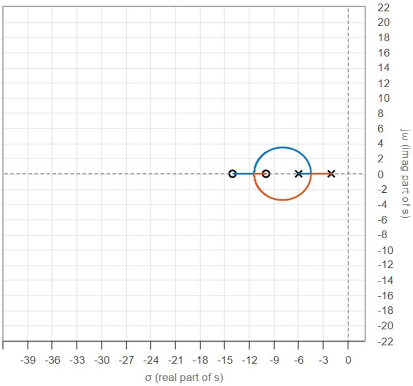
step 4: calcola anche i K_1, K_2, $\ldots$ a cui corrispondono le soluzioni

step 5: *per questo corso, considera solo le soluzioni corrispondenti ai K_j reali e positivi*

Come si fa a capire se ci sono punti quadrupli?

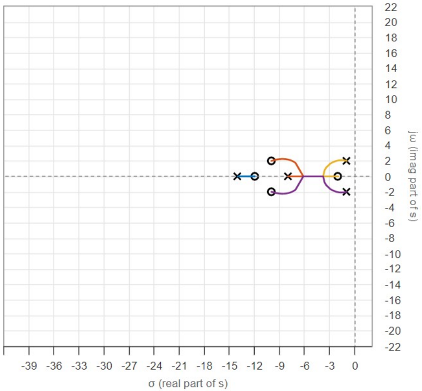
$\mapsto$ estensione naturale delle slides precedenti

Caso interessante



Se un intervallo sull'asse reale tra due poli o tra due zeri appartiene al luogo, allora c'e' almeno un punto doppio (piu' precisamente, c'e' un numero *dispari* di punti doppi)

Duale del caso interessante



Se un intervallo sull'asse reale tra un polo ed uno zero appartiene al luogo, allora c'e' un numero *pari* di punti doppi

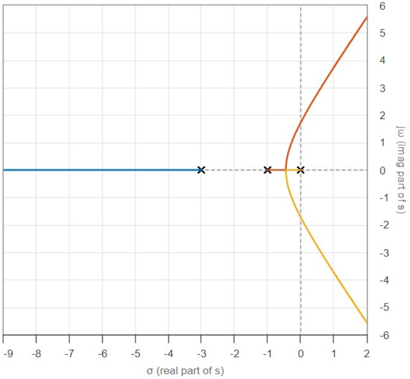
Esempi "DIY"

`https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLDraw.html`

Regola 5 (Attraversamento dell'asse immaginario)

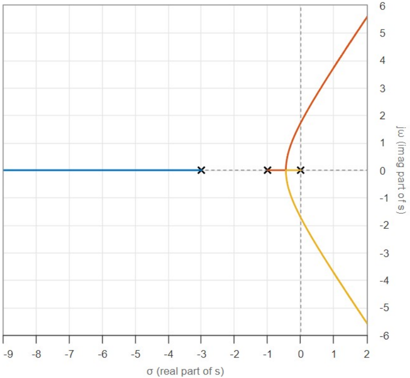
Quando si perde stabilita'?

Quantita' molto importante in questo corso: $K_{\max}$ prima di perdere stabilita'



Quando si perde stabilita'?

Quantita' molto importante in questo corso: $K_{\max}$ prima di perdere stabilita'



Come calcolarlo? Con Routh!

Esempio di utilizzo di Routh per trovare gli attraversamenti dell'asse immaginario

$$s(s+1)(s+3)+K=0$$

3	1	3
2	4	K
1	$\frac{12-K}{4}$	
0	K	

$\Longrightarrow$ cambio di segno nella prima colonna per $K=12$

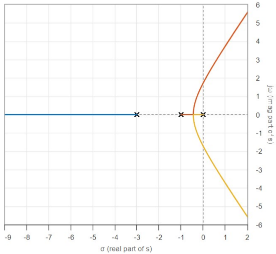
Trovato il K critico, come trovo gli attraversamenti?

3	1	3
2	4	K
1	$\frac{12-K}{4}$	
0	K	

1. sostituisci quel K nella riga precedente alla riga nulla *(in questo caso, la riga "2")*
2. usa quei coefficienti per fare un polinomio *(in questo caso, $4s^2 + 12$)*
3. trova le sue radici - ce ne dovrebbero essere un paio di puramente immaginarie *(in questo caso, $\pm j\sqrt{3}$)*

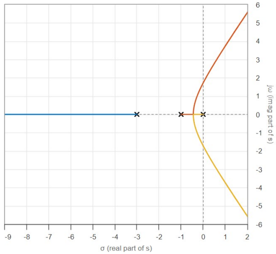
Considerazione importante: questo plot mostra solo i poli della FdT in catena chiusa, e non i suoi zeri

(altri suggerimenti pratici anche in `https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLocusExamples.html`)



Considerazione importante: questo plot mostra solo i poli della FdT in catena chiusa, e non i suoi zeri

(altri suggerimenti pratici anche in `https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLocusExamples.html`)



. . . while the poles of a system are very important in determining the behavior of a system, the zeros can also be important. After performing a root-locus design, it is critical to go back and test the closed loop system to ensure that it behaves as expected.

Dimostrazione della Regola 3 (materiale addizionale sulla regola della porzione dell'asse reale)

"$s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo iff il numero di zeri e poli a destra di s è dispari"

1. formula di partenza:

$$\sum_{i=1}^{m} \angle (s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle (s - p_i) = (2h+1)\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

2. se s è reale, z_i e' reale, e $z_i < s$ (che significa graficamente che z_i e' a sinistra di s), allora $s - z_i > 0$ e quindi $\angle (s - z_i) = 0$
3. se s è reale, z_i e' reale, e $z_i > s$ (che significa graficamente che z_i e' a destra di s), allora $s - z_i < 0$ e quindi $\angle (s - z_i) = \pi$
4. se s è reale, e z_i e' complesso, allora esiste z_j tale che $z_j = \overline{z}_i$. Inoltre

$$s - z_j = s - \overline{z}_i = \overline{s} - \overline{z}_i = \overline{s - z_i}$$

e

$$\angle (s - z_i) + \angle (s - z_j) = \angle (s - z_i) + \angle (\overline{s - z_i}) = 0$$

indipendentemente dal fatto che la parte reale di z_i sia a destra o a sinistra di s

"$s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo iff il numero di zeri e poli a destra di s è dispari"

e per i poli p_i? Stesse considerazioni sulla fase degli zeri z_i:

1. se s è reale, p_i e' reale, e $p_i < s$ (che significa graficamente che p_i e' a sinistra di s), allora $s - p_i > 0$ e quindi $\angle\,(s - p_i) = 0$
2. se s è reale, p_i e' reale, e $p_i > s$ (che significa graficamente che p_i e' a destra di s), allora $s - p_i < 0$ e quindi $\angle\,(s - p_i) = \pi$
3. se s è reale, e p_i e' complesso, allora esiste p_j tale che $p_j = \overline{p}_i$. Inoltre

$$s - p_j = s - \overline{p}_i = \overline{s} - \overline{p}_i = \overline{s - p_i}$$

e

$$\angle\,(s - p_i) + \angle\,(s - p_j) = \angle\,(s - p_i) + \angle\,(\overline{s - p_i}) = 0$$

indipendentemente dal fatto che la parte reale di p_i sia a destra o a sinistra di s

"Un punto dell'asse reale $s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di zeri e poli a destra di s, contando anche le molteplicità, è dispari"

$$\sum_{\substack{\text{zeri reali}\\ \text{a destra di } s}} \pi - \sum_{\substack{\text{poli reali}\\ \text{a destra di } s}} \pi =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{numero di zeri} \\ \text{reali a destra di } s \end{array} - \begin{array}{c} \text{numero di poli} \\ \text{reali a destra di } s \end{array} \right) \pi = (2h+1)\pi$$

Most important python code for this sub-module

Root locus via python

Purpose	**Library**	**Installation Command**
Control systems analysis	`control`	pip install control
Plotting	`matplotlib`	pip install matplotlib
Numerical math	`numpy`	pip install numpy
Interactive widgets	`ipywidgets`	pip install ipywidgets

Note: The `control` library (formerly `python-control`) is the primary tool for root locus

Question 1

stabilità Cosa rappresenta il luogo delle radici nei sistemi di controllo?

1. Il percorso degli zeri del sistema in anello chiuso al variare del guadagno
2. La traiettoria dei poli del sistema in anello chiuso al variare del guadagno
3. La risposta in frequenza del sistema in anello aperto
4. L'errore a regime del sistema per diversi ingressi
5. Non lo so

Solution 1: *Il luogo delle radici mostra come i poli del sistema in anello chiuso si muovono nel piano complesso al variare del guadagno K da 0 a infinito. È uno strumento potente per analizzare la stabilità e la risposta transitoria.*

Question 2

asintoti Come si calcola il centro degli asintoti ($\sigma_\star$) per il luogo delle radici?

1. Somma dei poli meno somma degli zeri divisa per il numero di poli
2. Media delle parti reali di tutti i poli e zeri
3. (Somma dei poli meno somma degli zeri) divisa per (numero di poli meno numero di zeri)
4. Somma dei poli divisa per il numero di poli
5. Non lo so

Solution 1: *La formula corretta è* $\sigma_\star = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$. *Questo dà il punto sull'asse reale da cui si irradiano gli asintoti quando il numero di poli supera quello degli zeri.*

Question 3

asse reale Quale porzione dell'asse reale appartiene al luogo delle radici?

1. I segmenti in cui il numero di poli e zeri a destra è pari
2. I segmenti in cui il numero di poli e zeri a destra è dispari
3. Tutti i segmenti tra due poli o zeri consecutivi
4. Solo i segmenti a sinistra del polo più a sinistra
5. Non lo so

Solution 1: *Un punto sull'asse reale appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di poli e zeri alla sua destra è dispari. Questo è una conseguenza diretta della condizione di angolo.*

Question 4

punti di diramazione Cosa rappresenta un punto di diramazione sul luogo delle radici?

1. Il punto in cui il sistema diventa instabile
2. Il punto in cui il guadagno K raggiunge il suo valore massimo
3. Un punto in cui più rami del luogo delle radici si incontrano e si separano (radice doppia/multipla)
4. Il punto in cui il coefficiente di smorzamento è massimo
5. Non lo so

Solution 1: *Un punto di diramazione si verifica quando l'equazione caratteristica ha una radice multipla, cioè due o più rami del luogo delle radici si uniscono e poi si separano. Questo corrisponde a un valore critico del guadagno in cui la risposta del sistema cambia qualitativamente.*

Question 5

analisi di stabilità Come si può determinare il valore di K a cui il sistema diventa instabile usando il luogo delle radici?

1. Trovare il guadagno in cui il luogo delle radici interseca l'asse reale
2. Usare il criterio di Routh-Hurwitz per trovare quando i poli attraversano l'asse immaginario
3. Calcolare il guadagno nel punto di diramazione
4. Trovare il valore minimo di K per cui tutti i poli sono reali
5. Non lo so

Solution 1: *Il criterio di Routh-Hurwitz è il metodo più affidabile per determinare il guadagno critico in cui i poli attraversano l'asse immaginario. Il luogo delle radici mostra visivamente l'intersezione, ma Routh fornisce il valore esatto.*

Question 6

angoli di uscita Cosa succede ai rami del luogo delle radici quando il numero di poli supera quello degli zeri di 3?

1. Tutti i rami terminano in zeri finiti
2. Due rami vanno all'infinito lungo asintoti verticali
3. Tre rami vanno all'infinito con angoli di 60ř, 180ř e 300ř
4. I rami formano un cerchio nel piano complesso
5. Non lo so

Solution 1: *Quando ci sono 3 poli in più rispetto agli zeri, tre rami andranno all'infinito. I loro asintoti formano angoli separati di 180ř/3 = 60ř, a partire da 180ř/(numero di poli in eccesso) = 60ř.*

Recap of module "Il luogo delle radici"

1. il luogo delle radici e' uno strumento fondamentale per la progettazione dei sistemi di controllo
2. anche se non e' essenziale ricordare tutte le regole per disegnarlo a mano, alcune regole sono importanti perche' danno informazioni strutturali (e.g., "se ho tre poli e nessuno zero allora per K sufficientemente grande sicuramente ho instabilita'")