Risposta a regime

Contents map

developed content units	taxonomy levels
risposta a regime	u1, e1
risposta in frequenza	u1, e1
guadagno di Bode	u1, e1

prerequisite content units	taxonomy levels
sistemi LTI	u1, e1
funzioni di trasferimento	u1, e1

Main ILO of sub-module "Risposta a regime"

define and distinguish between transient and steady-state responses in LTI systems subjected to canonical inputs

distinguish between resonance and beating phenomena in frequency-domain analysis

analyze and compute steady-state responses using transfer functions

analyze the role of pole-zero configurations and system type (e.g., number of integrators) on steady-state error and response

evaluate and interpret DC gain, Bode gain, and input-output structure to predict system performance

Roadmap

- definizioni ed assunzioni
- risposta in frequenza
- risposta alle rampe generalizzate

Cosa stiamo imparando ora?

A rispondere alla domanda:

dato il sistema $W(s)$ *e l'ingresso* $U(s)$, *come sara'* $y_f(t)$ *"per* t *grandi"?*

Cosa stiamo imparando ora?

A rispondere alla domanda:

dato il sistema $W(s)$ e l'ingresso $U(s)$, come sara' $y_f(t)$ "per t grandi"?

Esempi pratici:

- come gira il mio motore a regime?
- quanto produce il mio impianto a regime?

Strumento per risolvere le domande di prima:

- risposta a regime ai segnali canonici = risposta forzata di un sistema alimentato da segnali canonici
- segnali canonici = sinusoide, gradino, rampa, rampa parabolica, etc.

Generalizzando:

Risposta a segnali canonici $=$ unione di

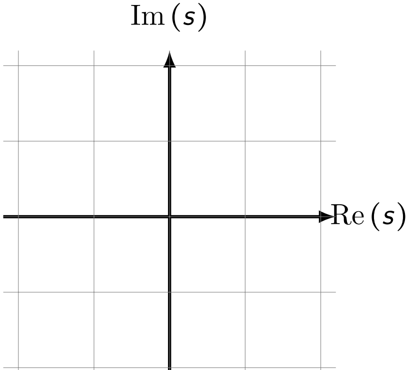
- risposta a regime ai segnali canonici
- risposta nel transitorio (cioe' per tempi piccoli)

Questo modulo:

Risposta a regime ai segnali canonici per sistemi BIBO stabili

Come si fa, in breve?

- $W(s)$ BIBO stabile $\Longrightarrow$ "poli di W strettamente nel semipiano sinistro"
- $U(s)$ "segnale canonico" $\Longrightarrow$ "poli di U sull'asse immaginario"
- $Y_f(s) = W(s)U(s)$ $\Longrightarrow$ "poli di Y_f = unione dei poli di W e U"
- i poli di Y_f asint. stabili per $t \to +\infty$ spariscono, rimangono quelli marg. stabili
- quindi resta una $Y_{f,\mathrm{regime}}(s)$ che ha gli stessi poli di U ma residui diversi



?

Risposta a regime per il caso gradino

$$u(t) = 1, t \geq 0 \implies U(s) = \frac{1}{s} \implies Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s}$$

Risposta a regime per il caso gradino

$$u(t) = 1, t \geq 0 \implies U(s) = \frac{1}{s} \implies Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s}$$

$W(s)$ propria e $U(s)$ strettamente propria $\implies$ $Y_f(s)$ strettamente propria

Risposta a regime per il caso gradino

$$Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \sum_{i,k} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

con p_i poli di $W(s)$ asintoticamente stabili

Risposta a regime per il caso gradino

$$Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \sum_{i,k} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

con p_i poli di $W(s)$ asintoticamente stabili

$$A = sY_f(s)\big|_{s=0} = W(0)$$

$$y_f(t) = W(0) + \text{vanishing terms}$$

Risposta a regime per il caso gradino

quindi

$$y_f(t) = W(0) + \text{vanishing terms}$$

cioe' gradino di ampiezza $W(0)$

Risposta a regime per il caso gradino

quindi

$$y_f(t) = W(0) + \text{vanishing terms}$$

cioe' gradino di ampiezza $W(0)$ $W(0)$ $=$ *guadagno in continua o guadagno statico*

?

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \text{propria e BIBO stabile}$$

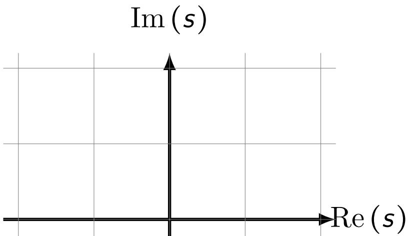
$$u(t) = \cos(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$\begin{aligned}
U(s) &= \mathcal{L}[\cos(\omega t + \varphi)](s) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}\right](s) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\varphi}}{2}e^{j\omega t} + \frac{e^{-j\varphi}}{2}e^{-j\omega t}\right](s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{s-j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s+j\omega}\right)
\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right](s) = \frac{1}{s-\alpha}$$



Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = W(s)U(s)$$

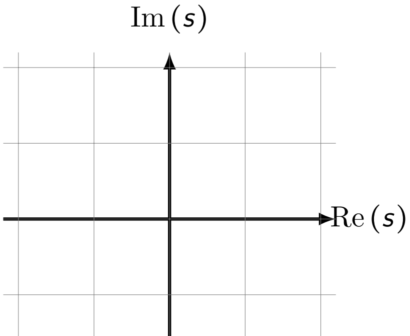
se $W(s)$ propria e $U(s)$ strettamente propria allora $Y_f(s)$ strettamente propria

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = W(s)U(s)$$

se $W(s)$ propria e $U(s)$ strettamente propria allora $Y_f(s)$ strettamente propria

$$Y_f(s) = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k}$$



Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

$$\begin{aligned}
A &= (s - j\omega) Y_f(s)\Big|_{s=j\omega} \\
&= (s - j\omega)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s + j\omega}\right) W(s)\Bigg|_{s=j\omega} = \\
&= \frac{1}{2}e^{j\varphi} W(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\frac{s - j\omega}{s + j\omega} W(s)\Big|_{s=j\omega} = \\
&= \frac{1}{2}e^{j\varphi} W(j\omega).
\end{aligned}$$

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

$$B = \frac{1}{2} e^{-j\varphi} W(-j\omega).$$

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

Poiché $a(s)$ e $b(s)$ sono polinomi a coefficienti reali, allora

$$W(-j\omega) = \frac{b(-j\omega)}{a(-j\omega)} = \frac{\overline{b(j\omega)}}{\overline{a(j\omega)}} = \overline{W(j\omega)},$$

da cui segue che

$$B = \frac{1}{2}e^{-j\varphi}W(-j\omega) = \frac{1}{2}\overline{e^{j\varphi}W(j\omega)} = \bar{A}$$

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k} \qquad A = \frac{e^{j\varphi}}{2} W(j\omega)$$

con $|W(s)|$ e $\angle W(j\omega)$ il modulo e la fase di $W(j\omega)$

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}.$$

$$y_f(t) = Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t} + \underbrace{\sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t}}_{\text{termini } \to 0}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[Ae^{j\omega t}\right] + (\text{ termini } \longrightarrow 0)$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{j\varphi}|W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}e^{j\omega}\right] + (\text{ termini } \longrightarrow 0)$$

$$= |W(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)) + (\text{ termini } \longrightarrow 0).$$

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

risultato *importantissimo*:

se

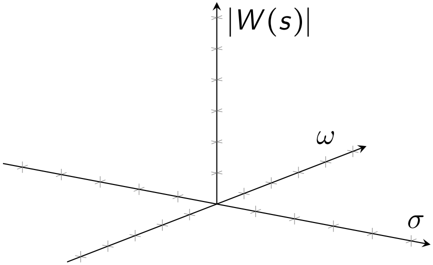
$$u(t) = \cos(\omega t + \varphi) \qquad t \geq 0$$

allora

$$y_f(t) = |W(j\omega)| \cos\left(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)\right) + \text{vanishing terms}$$

"Risposta in frequenza" di un sistema LTI $W(s)$ - definizione e interpretazione grafica

$$u(t) = \cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{forzata a regime}}(t) = \left|W(j\omega)\right| \cos\left(\omega t + \angle W(j\omega)\right)$$



?

Risposta in frequenza: caso sistema non BIBO

Per sistemi instabili i calcoli fatti in precedenza restano validi. L'unica ipotesi che deve restare e che $j\omega$ non sia uno zero di $a(s)$. Alla fine si ottiene una risposta dove i termini tra parentesi non sono più trascurabili asintoticamente ma possono divergere. In questo caso la componente sinusoidale e' dominata dai modi divergenti.

Risposta in frequenza: caso sistema non BIBO ma semplicemente stabile

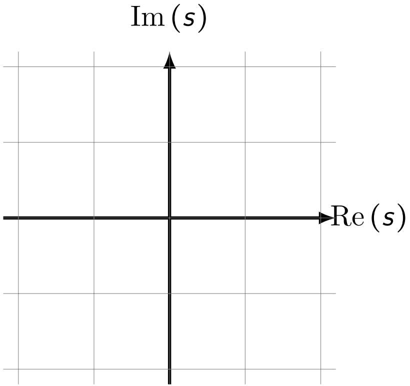
(esempio di W con poli semplici in $\pm j\omega$ e rimanenti poli asintoticamente stabili)

due casi

- $u(t)$ e' seno con la stessa frequenza ω
- $u(t)$ e' seno con una frequenza $\overline{\omega} \neq \omega$

Risposta in frequenza con W con poli semplici in $\pm j\omega$, rimanenti poli asintoticamente stabili, e $u(t)$ seno con la stessa frequenza ω

$$y_{f,\mathrm{regime}}(t) = R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 t \cos(\omega t + \varphi_2)$$

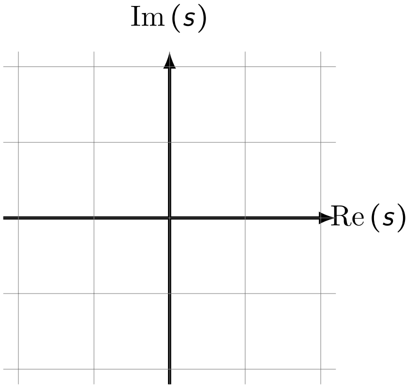


Risposta in frequenza con W con poli semplici in $\pm j\omega$, rimanenti poli asintoticamente stabili, e $u(t)$ seno con una diversa frequenza $\overline{\omega}$

$$y_{f,\mathrm{regime}}(t) = R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 \cos(\overline{\omega} t + \varphi_2)$$

Risposta in frequenza con W con poli semplici in $\pm j\omega$, rimanenti poli asintoticamente stabili, e $u(t)$ seno con una diversa frequenza $\overline{\omega}$

$$y_{f,\mathrm{regime}}(t) = R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 \cos(\overline{\omega} t + \varphi_2) \quad \overline{\omega} \simeq \omega \implies \text{"battimenti"!}$$

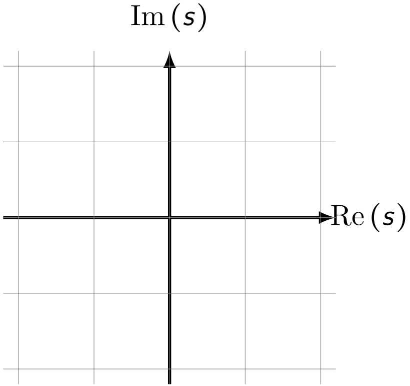


?

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc

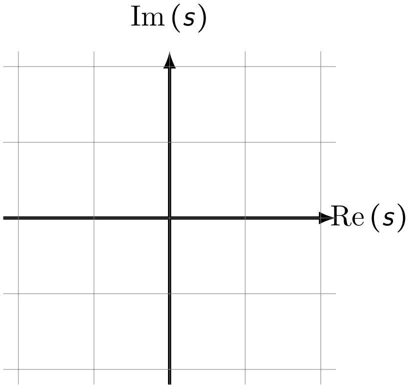
ingressi considerati in questo caso:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[\delta^{(-k)}\right](s) = \frac{1}{s^k}$$



Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc

Ipotesi: $W(s)$ FDT razionale propria con tutti i poli asintoticamente stabili tranne *potenziale* un polo nell'origine con molteplicità ℓ



Forma di Bode

$$W(s) = \frac{K_B}{s^\ell} \frac{\prod_k (sT_k + 1)}{\prod_k \left(s\overline{T}_k + 1\right)} = \frac{K_B}{s^\ell} \overline{W}(s)$$

Forma di Bode

$$W(s) = \frac{K_B}{s^\ell} \frac{\prod_k (sT_k + 1)}{\prod_k \left(s\overline{T}_k + 1\right)} = \frac{K_B}{s^\ell}\overline{W}(s)$$

Note:

- $\overline{W}(s)$ = BIBO stabile
- $\overline{W}(0) = 1$
- K_B e' chiamato *guadagno di Bode*

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{K_B}{s^{\ell+k}}\overline{W}(s)$$

con Y_f strettamente propria $\Longrightarrow$ termine piu' significativo

$$y_{f,\mathrm{regime}}(t) = K_B \delta^{(-\ell-k)}(t)$$

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc - conti precisi

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = W(s)\frac{1}{s^k} = \frac{K_B}{s^{l+k}}\overline{W}(s)$$

$$Y_f(s) = \sum_{j=1}^{l+k} \alpha_j \frac{1}{s^j} + \sum_{ij} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

dove p_i sono i poli di $\overline{W}(s)$ e hanno $\mathrm{Re}[p_i] < 0$

$$y_f(t) = \sum_{j=1}^{l+k} \frac{\alpha_j}{(j-1)!} t^{j-1} + \text{vanishing terms}$$

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc - conti precisi

termine più significativo:

$$y_f(t) \simeq \frac{\alpha_{l+k}}{(l+k-1)!} t^{l+k-1} \qquad \alpha_{l+k} = s^{l+k} Y_f(s)\Big|_{s=0} = K_B$$

$$y_f(t) \simeq \frac{K_B}{(l+k-1)!} t^{l+k-1} = K_B \delta^{(-k-l)}(t)$$

La risposta e' dello stesso tipo dell'ingresso con ordine aumentato di l (tipo del sistema) e amplificata di K_B. Se $k + l \leq 0$, allora $Y_f(s)$ non ha poli nell'origine e quindi la sua antitrasformata contiene solo modi convergenti a zero.

Self-assessment material

Question 1

Un sistema LTI BIBO stabile ha funzione di trasferimento $W(s)$. Se all'ingresso viene applicato un segnale sinusoidale $u(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, quale sarà la risposta forzata a regime?

Potential answers:

I: $|W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi)$

II: $|W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$

III: $W(0) \cos(\omega t + \varphi)$

IV: $\cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$

V: I do not know

Question 2

Un sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ BIBO stabile riceve in ingresso un gradino unitario $u(t) = 1$ per $t \geq 0$. Qual è la risposta forzata a regime?

Potential answers:

I: $\lim_{t \to \infty} W(t)$

II: $W(1)$

III: $W(0)$

IV: $\lim_{s \to 0} sW(s)$

V: I do not know

Question 3

Considerando un sistema marginalmente stabile con poli semplici in $\pm j\omega_0$ e rimanenti poli asintoticamente stabili, cosa accade quando si applica un ingresso sinusoidale $u(t) = \cos(\omega_0 t)$ alla stessa frequenza dei poli marginalmente stabili?

Potential answers:

- I: L'uscita è una sinusoide alla frequenza ω_0 con ampiezza costante
- II: L'uscita diverge esponenzialmente
- III: L'uscita è una somma di sinusoidi a frequenze ω_0 e $2\omega_0$
- IV: L'uscita contiene un termine proporzionale a $t\cos(\omega_0 t + \varphi)$
- V: I do not know

Question 4

Un sistema ha funzione di trasferimento nella forma di Bode $W(s) = \dfrac{K_B}{s^\ell}\overline{W}(s)$ dove $\overline{W}(s)$ è BIBO stabile con $\overline{W}(0) = 1$. Se tale sistema riceve in ingresso una rampa $u(t) = t$ per $t \geq 0$, quale sarà la risposta forzata a regime?

Potential answers:

I: $K_B \cdot t$

II: $K_B \cdot t^\ell$

III: $K_B \cdot \dfrac{t^{\ell+1}}{\ell!}$

IV: $\dfrac{K_B}{\ell+1} \cdot t^{\ell+1}$

V: I do not know

Question 5

Un sistema ha una funzione di trasferimento con poli semplici in $\pm j\omega_0$ e rimanenti poli asintoticamente stabili. Se si applica un ingresso sinusoidale $u(t) = \cos(\bar{\omega}t)$ con $\bar{\omega} \approx \omega_0$ ma $\bar{\omega} \neq \omega_0$, quale fenomeno si osserva nella risposta a regime?

Potential answers:

I: Battimenti, dovuti alla sovrapposizione di sinusoidi con frequenze vicine
II: Risonanza, con divergenza lineare dell'ampiezza nel tempo
III: Attenuazione progressiva dell'ampiezza del segnale in uscita
IV: Filtraggio completo del segnale in ingresso
V: I do not know

Recap of the module “Risposta a regime”

- la risposta in frequenza e’ il concetto piu’ importante

?