notes

- this is the table of contents of this document; each section corresponds to a specific part of the course

Effetti della retroazione sulla sensibilita' alle variazioni dei parametri

notes

Contents map

developed content units	taxonomy levels
sensibilita’	u1, e1

prerequisite content units	taxonomy levels
funzione di trasferimento	u1, e1

notes

Roadmap

- sensibilita’
- effetti della retroazione sulla sensibilita’

notes

- Oggi affronteremo un concetto fondamentale nell’ingegneria dei controlli: la sensibilità di un sistema e come questa viene modificata dalla retroazione. Questo argomento è cruciale per comprendere la robustezza dei sistemi di controllo, cioè la loro capacità di funzionare correttamente anche in presenza di incertezze e variazioni.
- Vedremo prima cosa si intende per sensibilità di un sistema, e poi analizzeremo come la retroazione modifichi questa sensibilità, un aspetto che rappresenta uno dei vantaggi principali del controllo in retroazione.

Are we sure this is exactly 10 Ohms?

essential message: all the models are uncertain

notes

- I parametri che caratterizzano il modello (ad esempio la resistenza in un circuito, la costante di attrito in un sistema meccanico) sono noti a meno di errori. Ad esempio quando si acquista una resistenza, questa ha un valore nominale in ohm, con una tolleranza ad esempio del 10%.
- Questo è un concetto che dovete interiorizzare: nella realtà, tutti i modelli sono incerti. Non esiste un resistore che sia esattamente 10 Ohm, così come non esiste un pendolo con una lunghezza esattamente di 1 metro.
- L'incertezza nei parametri è una caratteristica intrinseca dei sistemi fisici e dobbiamo progettare i nostri sistemi di controllo tenendone conto. Un buon sistema di controllo deve essere robusto rispetto a queste incertezze.

Underlying problem

testing the robustness of the final results in the presence of uncertainty in the ingredients

notes

- Quello che vogliamo fare è testare la robustezza dei risultati finali in presenza di incertezze nei parametri del sistema.
- Pensate a quando cucinate seguendo una ricetta: se aggiungete un po' più di sale o un po' meno di farina, quanto cambierà il sapore finale del piatto? In alcuni casi, piccole variazioni negli ingredienti portano a grandi cambiamenti nel risultato, mentre in altri casi il risultato rimane pressoché invariato.
- Nei sistemi di controllo ci poniamo una domanda simile: se il mio modello ha un'incertezza del 5

Cosa impariamo ora?

Risposta alla domanda "se ho un sistema con livello di incertezza X sui suoi parametri, e lo metto in feedback, quanto grande e' il livello di incertezza sulle performance della catena chiusa?"

notes

- Questa incertezza nei parametri causa una incertezza nel modello e in particolare nella funzione di trasferimento e quindi nel modo in cui il sistema reagisce all'ingresso.
- Vogliamo quantificare la sensibilita' di una funzione di trasferimento rispetto a un parametro e capire come il controllo in retroazione modifica tale sensibilita'.
- È una domanda cruciale nella pratica ingegneristica: se so che il mio motore ha una massa che può variare del 5
- Vedrete che uno dei grandi vantaggi della retroazione è proprio la riduzione della sensibilità del sistema rispetto alle variazioni parametriche, rendendo il sistema più robusto.

Questo modulo in a nutshell

- quantificazione della sensibilita' di una funzione di trasferimento rispetto a un parametro
- quantificazione di come il controllo in retroazione modifichi tale sensibilita'

notes

- In questa lezione vedremo prima come si può quantificare matematicamente la sensibilità di una funzione di trasferimento rispetto alle variazioni di un parametro.
- Successivamente, analizzeremo come la retroazione modifichi questa sensibilità, generalmente riducendola e rendendo il sistema più robusto.
- Questi concetti sono fondamentali non solo dal punto di vista teorico ma anche pratico: vi aiuteranno a progettare sistemi di controllo che funzionano bene anche quando le condizioni reali si discostano da quelle ideali.

Concetto piu' generale di questo corso: sensibilita' assoluta

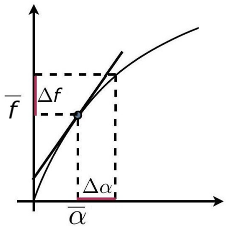
Motivating example:

$$W(s,\alpha) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha^2)(s+\alpha^3)}$$

con valore nominale $\overline{\alpha} = 2$. Parametro di nostro interesse = guadagno di Bode:

$$f(\alpha) = W(0,\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \text{valore nominale } \overline{f} = f(\overline{\alpha}) = \frac{1}{16}$$

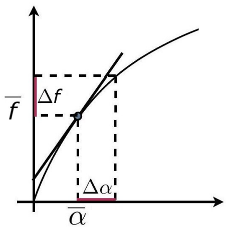
Graficamente:



notes

- Iniziamo con un esempio concreto per comprendere il concetto di sensibilità assoluta. Abbiamo una funzione di trasferimento W che dipende da un parametro .
- Supponiamo che il valore nominale di sia 2. Siamo interessati a capire come varia il guadagno di Bode (cioè il valore della funzione di trasferimento a frequenza zero) al variare di .
- Il valore nominale del guadagno di Bode è 1/16, come potete verificare sostituendo = 2 e s = 0 nella funzione di trasferimento.
- Nel grafico vedete come varia f() al variare di . La pendenza della curva nel punto nominale ci dà un'idea della sensibilità: più la curva è ripida, più il valore di f() cambierà significativamente per piccole variazioni di .
- Questa è l'essenza della sensibilità assoluta: quanto cambia in termini assoluti il valore della funzione quando varia il parametro.

Quanto varia $\overline{G}$ se $\overline{\alpha}$ varia?



$$f - \overline{f} \simeq f'(\overline{\alpha})(\alpha - \overline{\alpha})$$

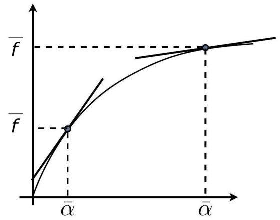
Notazione piu' leggibile:

$$\Delta f \simeq f'(\overline{\alpha})\Delta\alpha$$

notes

- Per quantificare questa variazione, usiamo l'approssimazione lineare data dalla derivata prima. Se la variazione di è piccola, possiamo approssimare la variazione di f con l'espressione che vedete.
- In termini più leggibili, f f'() , dove f'() è la derivata di f valutata nel punto nominale.
- Questa è l'essenza della sensibilità assoluta: la derivata f'() ci dice quanto cambia f in termini assoluti per una piccola variazione di .
- Ad esempio, se f'() = 2 e = 0.1, allora la variazione attesa di f sarà circa f 2 Œ 0.1 = 0.2.
- Notate che questa è un'approssimazione al primo ordine, valida solo per piccole variazioni di . Per variazioni più grandi, l'errore dell'approssimazione diventa significativo.

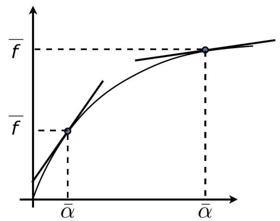
Il valore della sensibilita' assoluta dipende da dove si valuta la funzione



notes

- Un aspetto importante da sottolineare è che la sensibilità assoluta dipende dal punto in cui stiamo valutando la funzione.
- Come potete vedere dal grafico, la pendenza della curva (che rappresenta la sensibilità assoluta) varia considerevolmente a seconda del punto.
- In alcuni punti, la funzione è molto ripida, indicando un'alta sensibilità alle variazioni del parametro. In altri punti, la funzione è quasi piatta, indicando una bassa sensibilità.
- Questo crea un problema: come possiamo confrontare la sensibilità di funzioni diverse o la sensibilità in punti diversi quando i valori assoluti possono essere molto differenti?
- Per esempio, se una funzione varia da 1000 a 1001 per una variazione di di 0.1, mentre un'altra varia da 0.001 a 0.002 per la stessa variazione di , quale delle due è più sensibile? In termini assoluti, la prima varia di più (1 contro 0.001), ma in termini relativi, la seconda raddoppia il suo valore mentre la prima varia solo dello 0.1
- Questo ci porta al concetto di sensibilità relativa, che vedremo a breve.

Introduzione alla sensibilita' relativa



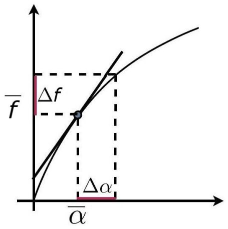
conviene ragionare in termini di percentuali, e quindi trovare una espressione del tipo

$$\overline{\alpha} \text{ incerta al X\%} \implies \overline{f} \text{ incerta al Y\%}$$

notes

- Il concetto effettivamente usato nel mondo del lavoro è la sensibilità relativa, non assoluta – quindi fate attenzione a comprendere bene questo concetto.
- La sensibilità relativa ci permette di ragionare in termini di percentuali, che è spesso più intuitivo e utile nella pratica.
- Vogliamo trovare una relazione del tipo: "se il parametro ha un'incertezza del X
- Questo ci permette di confrontare direttamente l'effetto relativo delle variazioni, indipendentemente dalla scala dei valori assoluti.
- Per esempio, sapere che un errore del 5
- Vedremo ora come quantificare matematicamente questa sensibilità relativa.

Quantita' ancillari



Variazione relativa di α:

$$\frac{\alpha - \overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} = \frac{\Delta\alpha}{\overline{\alpha}}$$

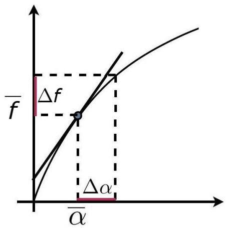
Variazione relativa di f:

$$\frac{f - \overline{f}}{\overline{f}} = \frac{\Delta f}{\overline{f}}$$

notes

- Per definire la sensibilità relativa, introduciamo prima due quantità ausiliarie.
- La prima è la variazione relativa di , definita come il rapporto tra la variazione assoluta e il valore nominale . Questa rappresenta la variazione percentuale di rispetto al suo valore nominale.
- La seconda è la variazione relativa di f, definita in modo analogo come il rapporto tra f e f. Questa rappresenta la variazione percentuale di f rispetto al suo valore nominale.
- Ad esempio, se varia da 2 a 2.1, la variazione relativa è (2.1-2)/2 = 0.05, o 5
- Queste quantità ci permetteranno di definire la sensibilità relativa come il rapporto tra la variazione percentuale dell'output e la variazione percentuale dell'input.

Dalla sensibilita' assoluta alla sensibilita' relativa



Propagazione dell'incertezza in termini assoluti:

$$\Delta f \simeq f'(\overline{\alpha})\Delta\alpha$$

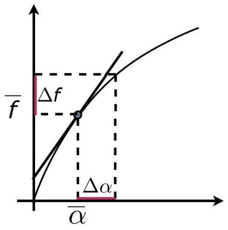
Propagazione dell'incertezza in termini relativi:

$$\frac{\Delta f}{\overline{f}} \simeq f'(\overline{\alpha})\frac{\overline{\alpha}}{\overline{f}}\frac{\Delta\alpha}{\overline{\alpha}} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{sensibilita' relativa: } S_{\alpha}^{f}(\alpha) = f'(\alpha)\frac{\alpha}{f(\alpha)}$$

notes

- Partiamo dalla formula della sensibilità assoluta che abbiamo visto prima: f f'() .
- Per ottenere la variazione relativa di f, dividiamo entrambi i membri per il valore nominale f: f/f f'() /f.
- Ora inseriamo strategicamente il termine / (che è uguale a 1): f/f f'() (/f) (/).
- Il termine / è la variazione relativa di che abbiamo definito prima.
- Il termine f'() (/f()) rappresenta la sensibilità relativa di f rispetto ad , che indichiamo con S^f(). *Questaformulacidicechelavariazionepercentualedif approssimativamenteugualeallasensibilitrelativamoltiplic*
- Si usa la notazione S() quando è chiaro di che sensibilità si sta parlando.

Implicazioni della sensibilita' relativa



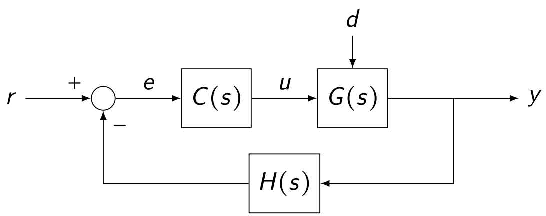
sensibilita' relativa: $S(\alpha) = f'(\alpha)\dfrac{\alpha}{f(\alpha)}$

- $|S(\overline{\alpha})|$ grande $\implies$ $\overline{f}$ molto sensibile
- $|S(\overline{\alpha})|$ piccolo $\implies$ $\overline{f}$ poco sensibile

notes

- Interpretiamo ora il significato della sensibilità relativa.
- Se |S()| è grande, significa che f è molto sensibile alle variazioni di . Una piccola variazione percentuale di causerà una grande variazione percentuale di f.
- Ad esempio, se S() = 5, una variazione dell'1
- Al contrario, se |S()| è piccolo, f è poco sensibile. Anche grandi variazioni percentuali di causeranno solo piccole variazioni percentuali di f.
- Se S() = 0.1, una variazione del 10
- Il segno di S() indica se f aumenta (segno positivo) o diminuisce (segno negativo) all'aumentare di .
- In pratica, nella progettazione di sistemi di controllo, cerchiamo di minimizzare la sensibilità relativa per rendere il sistema più robusto rispetto alle incertezze parametriche.

Problema pratico



La FdT del sistema dipende da un parametro, e.g., m:

$$G(s;m) = \frac{1}{ms+b}$$

Possiamo calcolare esplicitamente la sensibilità di $G(s;\alpha)$ rispetto ad un valore nominale di α,

$$S_\alpha^G = \frac{\alpha}{G(s;\alpha)}\frac{\partial G(s;\alpha)}{\partial\alpha}$$

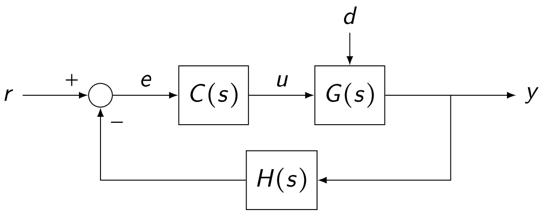
Se retroazioniamo G con C, e W e' il sistema in catena chiusa, quanto sara' S_α^W?

notes

- Passiamo ora ad un problema pratico: vogliamo confrontare la sensibilità della funzione di trasferimento di un componente con la sensibilità della funzione di trasferimento a catena chiusa.
- Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento G che dipende da un parametro (che potrebbe essere, ad esempio, la massa m di un veicolo).
- La FdT di questo sistema è G(s; m) = 1/(ms + b), dove m è la massa e b è il coefficiente di attrito.
- Possiamo calcolare la sensibilità di G rispetto ad usando la formula che abbiamo visto: S^G = $(/G)(G/)$.*Oraladomandafondamentale* : *semettiamoquestosistemainretroazioneconuncontrolloreC*, *quantosarlasensibilit* S^W *delsistemaincatenachiusa*?
- Questa è una domanda cruciale perché ci dirà se la retroazione migliora o peggiora la robustezza del sistema rispetto alle variazioni parametriche.

Quanto e' S_α^W?

Conti



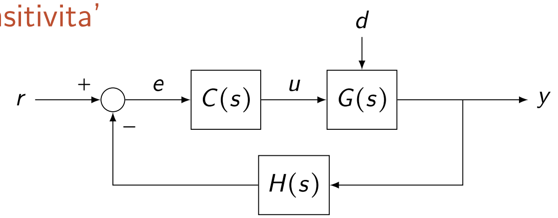
$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$\begin{aligned} S_\alpha^W &= \frac{\alpha}{W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\alpha}{W}\frac{\partial W}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial \alpha} \\ &= \alpha \frac{1 + HCG}{CG}\frac{C(1 + HCG) - CGHC}{(1 + HCG)^2}\frac{\partial G}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_\alpha^G(s) \end{aligned}$$

notes

- Vediamo ora come calcolare la sensibilità del sistema in catena chiusa. Il calcolo è un po' laborioso, ma il risultato è sorprendentemente semplice ed elegante.
- Partiamo dalla funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa: W(s) = C(s)G(s)/(1 + C(s)H(s)G(s)).
- Applicando la definizione di sensibilità relativa: S^W = $(/W)(W/). Possiamousarelaregoladellacatenaperesprimere W/ interminidi W/GeG/.$
- Dopo alcuni passaggi algebrici (che vi invito a verificare per esercizio), arriviamo a un risultato sorprendente: S^W = $S^G/(1 + H(s)C(s)G(s)). Questounrisultatomoltoimportantechecidicechelasensibilit delsistemaincatenachiusaugualeallasensibil$ $H(s)C(s)G(s)), cheilterminediretroazione.$

Sensibilita' e sensitivita'



- $$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

$$S_\alpha^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_\alpha^G(s) = S(s) S_\alpha^G(s)$$

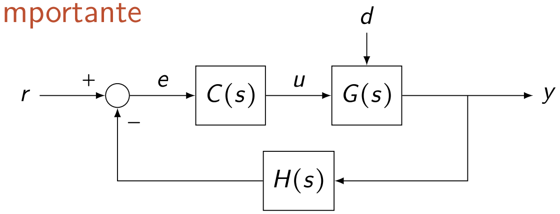
con

$$S(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} \quad \text{funzione di sensitivita'}$$

notes

- Il termine 1/(1 + H(s)C(s)G(s)) che compare nella formula della sensibilità del sistema in catena chiusa è così importante che ha un nome proprio: è chiamato "funzione di sensitività" e si indica con S(s).
- Quindi possiamo riscrivere $S^W(s) = S(s)S^G(s). Lafunzionedisensitivit S(s) giocaunruolofondamentalenellateoriadelcon$
- Il fatto che $S^W(s) siaproporzionalea S(s) significacheprogettandoopportunamenteilcontrollore C(s) permodificare S(s), p$

Considerazione importante



$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

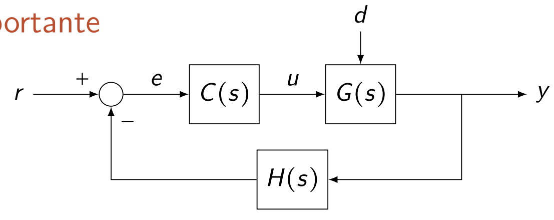
$$S_\alpha^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_\alpha^G(s) = S(s)S_\alpha^G(s)$$

$\Longrightarrow$ sensibilita' del sistema retroazionato < sensibilita' dell'anello aperto se $C(s)$ e' "grande"

notes

- Ecco una considerazione fondamentale: la sensibilità del sistema retroazionato è minore della sensibilità del sistema in anello aperto se il guadagno del controllore C(s) è "grande".
- Infatti, se C(s) è grande, allora 1 + H(s)C(s)G(s) è grande, quindi S(s) = 1/(1 + H(s)C(s)G(s)) è piccolo.
- Questo è uno dei principali vantaggi del controllo in retroazione: la riduzione della sensibilità alle variazioni parametriche.
- In pratica, significa che un sistema controllato in retroazione è più robusto rispetto alle incertezze e alle variazioni dei parametri rispetto allo stesso sistema in catena aperta.
- Però, come vedremo più avanti, aumentare troppo C(s) può portare a problemi di stabilità o a una maggiore sensibilità ai rumori di misura. Ci sarà quindi un compromesso da trovare nella progettazione del controllore.

Precisazione importante



sensibilita' e sensitivita' del sistema retroazionato W *dipendono da dove si trova* α

i.e.,

$$G = G(s;\alpha) \quad \Longrightarrow \quad S_\alpha^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s;\alpha)} S_\alpha^G(s) = S(s)S_\alpha^G(s)$$

$$C = C(s;\alpha) \quad \Longrightarrow \quad S_\alpha^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s;\alpha)G(s)} S_\alpha^C(s) = S(s)S_\alpha^C(s)$$

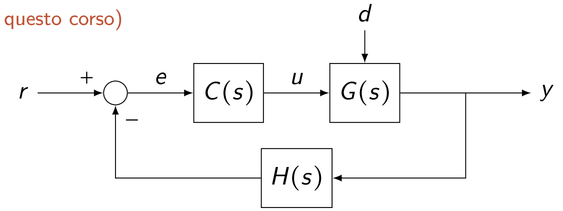
$$H = H(s;\alpha) \quad \Longrightarrow \quad S_\alpha^W(s) = \frac{H(s;\alpha)C(s)G(s)}{1 + H(s;\alpha)C(s)G(s)} S_\alpha^H(s) = T(s)S_\alpha^H(s)$$

notes

- Una precisazione importante: la sensibilità e la sensitività del sistema retroazionato W dipendono da dove si trova il parametro nel sistema.
- Se è un parametro di G, allora la sensitività influisce sulla sensibilità come abbiamo visto prima: $S^W = S(s)S^G.SeunparametrodelcontrolloreC, otteniamounaformulasimile : S^W = S(s)S^C$.
- Ma se è un parametro del sistema di retroazione H (tipicamente il sensore), otteniamo un risultato diverso: $S^W = T(s)S^H, doveT(s) = HCG/(1 + HCG) chiamatafunzionedisensitivitcomplementare.Questounrisultatoimportanteperchcidicechediversicomponent$
- Nella pratica, questo ci aiuta a capire quali componenti del sistema sono più critici in termini di sensibilità e dove dovremmo concentrare gli sforzi per migliorare la robustezza.

Una complementarieta' con implicazioni profonde

(ma che non vediamo in questo corso)



$$\begin{cases} G = G(s;\alpha_1) \\ H = H(s;\alpha_1) \end{cases} \implies \begin{cases} S^W_{\alpha_1}(s) = \dfrac{1}{1 + H(s;\alpha_2)C(s)G(s;\alpha_1)} S^H_{\alpha_1}(s) = S(s)S^H_{\alpha_1}(s) \\ S^W_{\alpha_2}(s) = \dfrac{H(s;\alpha_2)C(s)G(s;\alpha_1)}{1 + H(s;\alpha_1)C(s)G(s;\alpha_1)} S^H_{\alpha_2}(s) = T(s)S^H_{\alpha_2}(s) \end{cases}$$

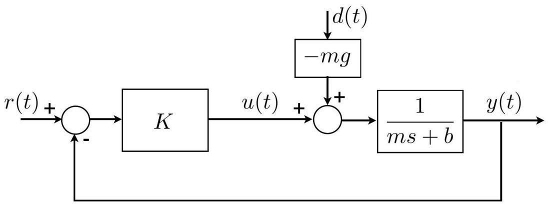
$$\implies \quad S(s) + T(s) = 1 \quad \forall s$$

(che implica prendere azioni per migliorare S peggiorera' T e viceversa)

notes

- $T(s)$ funzione sensitivita complementare

Esempio: controllo della velocita' di un'auto con un controllore P



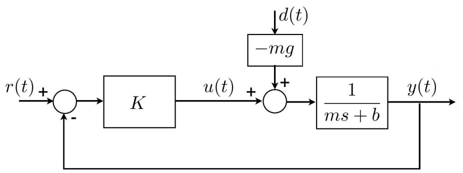
$$G(s) = \frac{1}{ms + b} \qquad W(s) = W_{ry}(s) = \frac{K}{ms + b + K}$$

$$S^W_\alpha(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S^G_\alpha(s) = \frac{ms + b}{ms + b + K} \frac{-b}{ms + b} = \frac{-b}{ms + b + K}$$

notes

- esempio 1

Esempio: controllo della velocita' di un'auto con un controllore P



$$S_{\alpha}^{W}(s) = \frac{-b}{ms + b + K} \qquad S_{\alpha}^{W}(0) = \frac{-b}{b + K}$$

$$\left|\frac{\Delta W(0)}{W(0)}\right| \simeq \left|\frac{-b}{b+K}\right| \left|\frac{\Delta b}{b}\right|$$

$\implies$ se $K \to \infty$ allora $\left|\frac{\Delta W(0)}{W(0)}\right| \to 0$

attenzione che queste quantita' sono stime, perche'
derivate da modelli e quindi per natura incerte

notes

- esempio 2

Recap of the module "Effetti della retroazione sulla sensibilita' alle variazioni dei parametri"

- la sensibilita' e' un concetto importante
- con un po' di conti possiamo trovare numeri che ci permettono di stimare gli effetti di variazioni

notes

- the most important remarks from this module are these ones