notes

- this is the table of contents of this document; each section corresponds to a specific part of the course

Il luogo delle radici

notes

-

Contents map

developed content units	taxonomy levels
luogo delle radici	u1, e1

prerequisite content units	taxonomy levels
controllo in catena chiusa	u1, e1

notes

-

Main ILO of sub-module "Il luogo delle radici"

Descrivere la definizione formale del luogo delle radici in termini matematici

Spiegare il significato fisico del luogo delle radici in relazione allo spostamento dei poli in catena chiusa al variare di K e al suo impatto sul transitorio

Applicare le regole del luogo delle radici per tracciare qualitativamente il luogo in casi semplici

Identificare punti doppi e punti di attraversamento dell'asse immaginario

Determinare il valore critico K_{max} per la stabilità mediante l'analisi del luogo delle radici

notes

- Alla fine di questo modulo, dovreste essere in grado di fare tutte queste cose
- In particolare, dovreste saper tracciare qualitativamente il luogo delle radici anche senza calcolatore
- E soprattutto capire cosa ci dice il luogo delle radici sul comportamento del sistema

Roadmap

- perche' serve questo strumento
- esempi fatti dal computer
- come fare a mano
- considerazioni sulla sua validita'

notes

- Seguiremo questo percorso logico per capire il luogo delle radici
- Prima vi mostrerò perché è uno strumento potente per il controllo
- Poi vedremo alcuni esempi generati al computer
- Infine impareremo a disegnarlo approssimativamente a mano
- Vi avverto già che il tracciamento manuale è approssimato, ma ci dà informazioni preziose

Cosa impariamo ora?

come usare il *luogo delle radici*, uno strumento molto utile per progettare controllori proporzionali

`https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLDraw.html`

notes

- Oggi impareremo uno degli strumenti più potenti per il progetto di controllori
- Il luogo delle radici ci permette di vedere come si spostano i poli al variare del guadagno
- Vi consiglio vivamente di provare il simulatore online che vedete nel riquadro
- È uno strumento interattivo che vi aiuterà a capire meglio il concetto

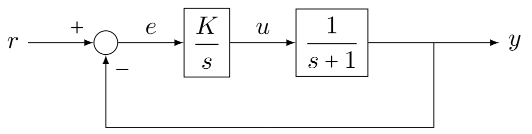
A che domanda stiamo rispondendo?

come si spostano i poli del sistema in catena chiusa al variare di un parametro?
Importanza = saper prevedere (tramite l'approsimazione coi poli dominanti) come sara' il transitorio

notes

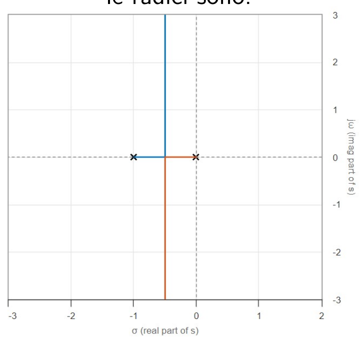
- Ricordate che nel capitolo precedente abbiamo visto come la retroazione modifichi i poli del sistema
- Questo cambiamento influenza direttamente il transitorio della risposta al gradino
- Il luogo delle radici ci dà proprio questa informazione: come si muovono i poli quando variamo il guadagno K
- È come avere una mappa che ci mostra tutte le possibili posizioni dei poli al variare di K

Esempio



$$\Longrightarrow W_{ry}(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

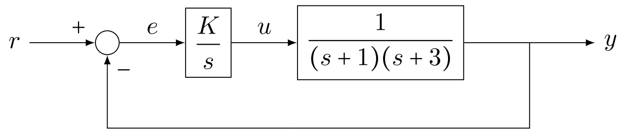
$\Longrightarrow$ al variare di K
le radici sono:



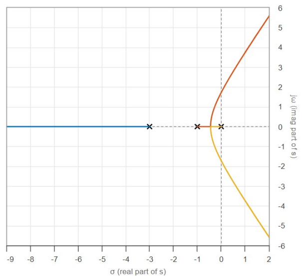
notes

- Guardate questo esempio semplice: un integratore e un polo reale in retroazione
- Facendo i conti (che vi mostro qui) otteniamo una FdT del secondo ordine
- A destra vedete proprio il luogo delle radici: come si muovono i poli al variare di K
- Notate che per K piccolo i poli sono reali, poi diventano complessi coniugati
- Questo ci dice che per K piccolo avremo una risposta aperiodica, per K maggiore oscillante

Esempio



$$\Longrightarrow \; W_{ry}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)+K} \; \Longrightarrow$$



notes

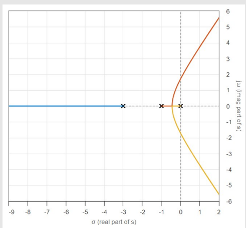
- Ecco un esempio leggermente più complesso con tre poli in catena aperta
- Notate come il luogo delle radici ora abbia tre rami invece di due
- Osservate che per K sufficientemente grande due rami vanno verso l'infinito
- Soprattutto, vedete che per K grandi il sistema diventa instabile
- Questo è un comportamento tipico che impareremo a riconoscere

Definizione

= insieme delle radici del polinomio $D(s) + KN(s)$ al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$ con $D(s)$ e $N(s)$ due polinomi dati

esempio:

$$W_{ry}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)+K}$$



notes

- Formalmente, il luogo delle radici è l'insieme di tutte le radici di questo polinomio al variare di K
- Nella pratica, è la curva che descrive come si muovono i poli del sistema in catena chiusa
- Nell'esempio vedete che corrisponde proprio al grafico che stavamo osservando
- Attenzione: D(s) è il denominatore della fdt in catena aperta, N(s) il numeratore

Working assumptions

1. $D(s)$ e $N(s)$ sono monici
2. $D(s)$ e $N(s)$ sono coprimi
3. $\deg[D(s)] \geq \deg[N(s)]$
4. $K \geq 0$ *(i.e., analizziamo il "luogo positivo")*
5. conosciamo gli zeri di $D(s)$ e $N(s)$, i.e., sappiamo che

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$
$$N(s) = (s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)$$

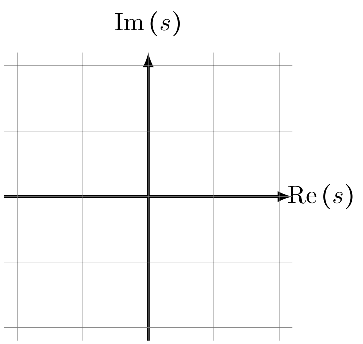
notes

- Per semplificare la trattazione, facciamo alcune ipotesi:
- Monici significa che il coefficiente del termine di grado massimo è 1
- Coprimi significa che non hanno fattori comuni, cioè non condividono gli stessi zeri
- La terza condizione ci assicura che stiamo lavorando con sistemi causali
- Lavoreremo principalmente con K positivo perché è il caso più interessante per la stabilità
- Conoscere gli zeri dei polinomi significa conoscere la posizione di poli e zeri in catena aperta

Definizione, ancora piu' formale

$$\mathcal{R}\big(N(s), D(s)\big) = \{s \in \mathbb{C} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ s.t. } D(s) + KN(s) = 0\}$$

Nota: $D(s) + KN(s) = 0$ e' una equazione complessa in due variabili, una complessa e una reale $\implies \mathcal{R}\big(N(s), D(s)\big)$ e' una curva nel piano complesso



notes

- Questa definizione formale ci dice che stiamo cercando tutti i punti s del piano complesso per cui esiste un K reale che annulla il polinomio
- È un'equazione complessa con due incognite (s complesso e K reale)
- Questo significa che la soluzione sarà una curva nel piano complesso
- Per ogni punto s su questa curva, esiste un K reale che lo rende un polo del sistema in catena chiusa

Che equazioni si risolvono per trovare il luogo delle radici?

step 1: *(definizione alternativa)*

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K}$$

step 2: *(prima equazione)*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{N(s)}{D(s)}\right| = \frac{1}{|K|}$$

step 3: *(seconda equazione)*

$$\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K},\ K \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \angle\left(\frac{N(s)}{D(s)}\right) = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

notes

- Per tracciare il luogo, trasformiamo il problema in queste due equazioni
- La prima riguarda il modulo: ci dice che il rapporto tra N(s) e D(s) deve essere reale e positivo
- La seconda riguarda la fase: la somma delle fasi deve essere un multiplo dispari di
- Queste due condizioni insieme definiscono il luogo delle radici
- Nella pratica, useremo queste condizioni per derivare le regole di tracciamento

Riscrittura della seconda equazione

$$\angle\left(\frac{N(s)}{D(s)}\right) = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

e' riscrivibile come

$$\sum_{i=1}^{m} \angle\,(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle\,(s - p_i) = (2h+1)\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

notes

- Questa riscrittura è fondamentale per il tracciamento manuale
- Significa che per un punto s appartenente al luogo, la somma delle fasi dagli zeri meno la somma delle fasi dai poli deve essere un multiplo dispari di
- In pratica, dovete immaginare di tracciare dei vettori da ogni polo e zero al punto s
- Poi sommare gli angoli di questi vettori secondo questa formula
- Se la condizione è soddisfatta, allora il punto s appartiene al luogo

Quindi disegnare il luogo delle radici = risolvere questo sistema

$$\begin{cases} \left|\dfrac{N(s)}{D(s)}\right| = \dfrac{1}{|K|} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \angle\,(s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle\,(s - p_i) = (2h+1)\pi, \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a mano? no, lo fa il computer! Ma possiamo capire qualitativamente il grafico senza fare tanti conti – come nelle prossime slides

notes

- In teoria, per trovare il luogo dovremmo risolvere questo sistema
- Ma nella pratica non lo faremo direttamente perché sarebbe troppo complesso
- Invece, useremo delle regole pratiche che derivano da queste equazioni
- Queste regole ci permetteranno di tracciare il luogo in modo approssimato ma molto utile
- Il computer lo farà in modo preciso, ma noi dobbiamo capire la logica sottostante

Regole per il tracciamento

notes

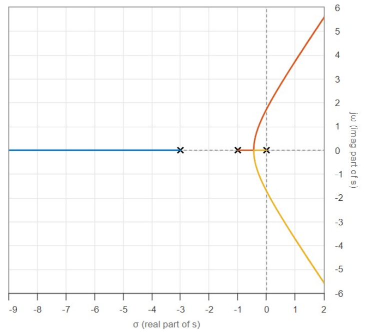
-

Regola 1 (Numero dei rami e simmetria)

notes

-

Quanti rami?

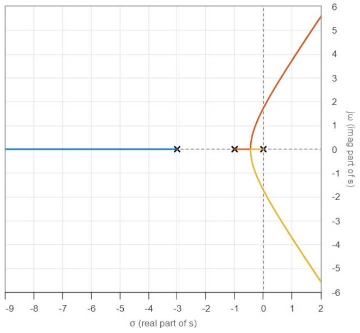


$$\deg\big(D(s) + KN(s)\big) = \deg\big(D(s)\big) = \text{"n. di poli"}$$

notes

- Il numero di rami del luogo è uguale al numero di poli in catena aperta
- Questo perché il grado del polinomio caratteristico è uguale al numero di poli
- Nell'esempio vedete tre rami perché ci sono tre poli in catena aperta
- Ogni ramo rappresenta il movimento di un polo in catena chiusa al variare di K
- Questa è una regola fondamentale da ricordare

Come variano questi rami al variare di K?

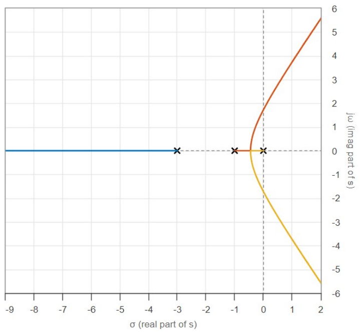


con continuita'

notes

- I rami variano con continuità al variare di K
- Questo significa che i poli non saltano da un punto all'altro, ma si muovono gradualmente
- È una proprietà importante perché ci permette di prevedere il percorso dei poli
- Se un polo è stabile per K piccolo, diventerà instabile solo dopo aver attraversato l'asse immaginario
- La continuità ci garantisce che possiamo seguire l'evoluzione di ogni polo

Si intersecano questi rami al variare di K?

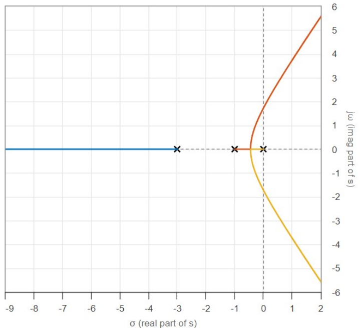


si, ma solo per i valori di K per i quali il polinomio $D(s) + KN(s)$ ha zeri multipli

notes

- I rami possono intersecarsi, ma solo in punti particolari
- L'intersezione avviene quando il polinomio caratteristico ha radici multiple
- Questi punti si chiamano punti doppi (o multipli se si incontrano più rami)
- Sono importanti perché rappresentano valori di K critici per il sistema
- In questi punti il comportamento del sistema cambia qualitativamente

Ci sono simmetrie?



si, rispetto all'asse reale, perche' gli zeri sono o reali o complessi coniugati

notes

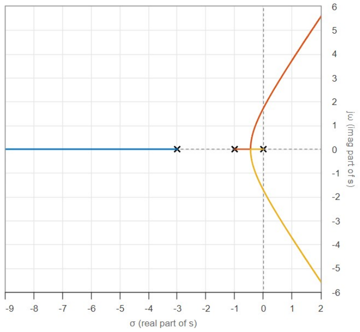
- Il luogo delle radici è sempre simmetrico rispetto all'asse reale
- Questo perché i coefficienti del polinomio sono reali
- Di conseguenza, le radici complesse devono venire in coppie coniugate
- Questa simmetria ci semplifica il lavoro perché possiamo tracciare solo la parte superiore e poi rifletterla
- È una proprietà che useremo spesso nelle nostre analisi

Regola 2 (Comportamento limite e asintoti)

notes

-

Dove partono i rami?



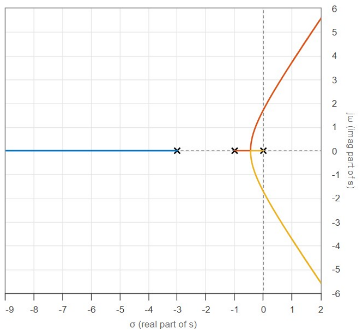
per $K = 0 \quad D(s) + KN(s) = D(s)$

quindi "partono dai poli"

notes

- Per K=0, il polinomio caratteristico si riduce a D(s)
- Quindi i rami partono esattamente dai poli in catena aperta
- Questo ha senso perché per K=0 non c'è retroazione
- È un punto di partenza fondamentale per tracciare il luogo
- Ricordate: ogni ramo parte da un polo per K=0

Dove finiscono i rami?



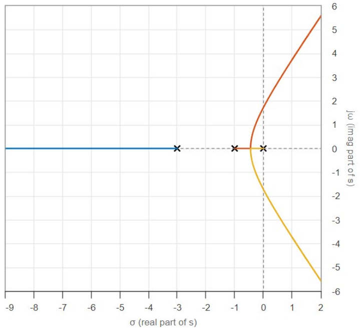
per $K \to +\infty \quad D(s) + KN(s) = 0 \mapsto N(s) = 0$

quindi "finiscono sugli zeri". *Ma cosa succede se ci sono meno zeri di poli?*

notes

- Per K che tende a infinito, il polinomio si riduce a N(s)=0
- Quindi i rami tendono agli zeri in catena aperta
- Ma attenzione: se ci sono meno zeri che poli, alcuni rami devono andare all'infinito
- Nell'esempio vedete che due rami vanno agli zeri (che in questo caso sono all'infinito)
- Questo è un comportamento tipico che analizzeremo meglio

Dove finiscono i rami? Take 2



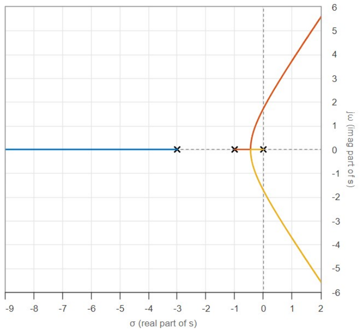
$$\text{per } K \to +\infty \quad D(s) + KN(s) = 0 \mapsto N(s) = 0$$

- "# zeri" rami finiscono sugli zeri,
- "# poli - # zeri" rami finiscono all'infinito

notes

- La regola precisa è questa: tanti rami finiscono sugli zeri quanti sono gli zeri stessi
- I rimanenti rami (poli meno zeri) vanno all'infinito
- Nell'esempio abbiamo 3 poli e nessuno zero, quindi tutti e tre i rami vanno all'infinito
- Questa regola ci permette di prevedere quanti rami andranno verso l'infinito
- È fondamentale per il tracciamento qualitativo del luogo

Come finiscono i "# poli - # zeri" rami all'infinito?



lungo "# poli - # zeri" semirette equidistanti e formanti una stella con centro in

$$\sigma_\star = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n - m} \in \mathbb{R}$$

"ma come e' girata questa stella?"

notes

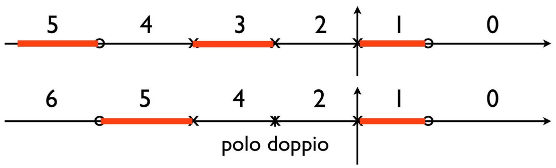
- I rami che vanno all'infinito seguono degli asintoti
- Questi asintoti partono da un punto centrale sull'asse reale
- La formula per calcolare questo punto è importante: è la media dei poli meno la media degli zeri, diviso la differenza nel numero
- Gli asintoti formano angoli uguali tra loro
- Ma come sono orientati? Lo vedremo con la prossima regola

Regola 3 (Porzione dell'asse reale appartenente al luogo)

notes

-

Towards "Come e' girata questa stella?"

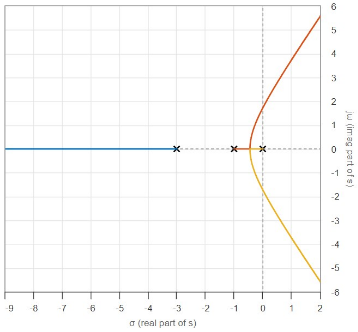


Teorema: "Un punto dell'asse reale $s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di zeri e poli a destra di s, contando anche le molteplicità, è dispari"

notes

- Questa regola è fondamentale per tracciare il luogo sull'asse reale
- Funziona così: per ogni punto sull'asse reale, contate quanti poli e zeri ci sono alla sua destra
- Se il numero totale è dispari, allora quel punto appartiene al luogo
- Nell'esempio vedete che tra -3 e -1 c'è un tratto del luogo perché c'è 1 polo a destra
- A sinistra di -3 non c'è perché ci sono 3 poli a destra (dispari, ma attenzione alla regola completa)

Come e' girata questa stella?



"Un punto dell'asse reale $s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di zeri e poli a destra di s, contando anche le molteplicità, è dispari"

$\implies$ se "# poli - # zeri" e' dispari allora un raggio va a $-\infty$ lungo l'asse reale

notes

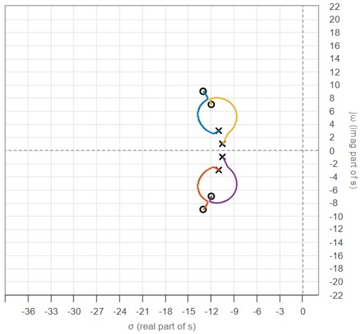
- Combinando questa regola con quella degli asintoti, possiamo determinare l'orientamento
- Se la differenza tra poli e zeri è dispari, uno degli asintoti sarà lungo l'asse reale negativo
- Nell'esempio, 3 poli - 0 zeri = 3 (dispari), quindi un asintoto va a -infinito sull'asse reale
- Gli altri due asintoti formeranno angoli di ś60ř con l'asse reale
- Questa combinazione di regole ci permette di tracciare qualitativamente il luogo

Regola 4 (punti doppi, e in generale punti multipli)

notes

-

Come si fa a capire se i rami si intersecano?



Lemma: un polinomio $f(s)$ ha uno zero di molteplicita' ℓ in $\overline{s} \in \mathbb{C}$ se e solo se

$$f(\overline{s}) = f^{(1)}(\overline{s}) = \cdots = f^{(\ell-1)}(\overline{s}) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(\ell)}(\overline{s}) \neq 0$$

notes

- I punti doppi sono importanti perché rappresentano valori critici di K
- Un punto doppio corrisponde a una radice doppia del polinomio caratteristico
- Il lemma ci dice che per trovare queste radici multiple dobbiamo annullare anche la derivata
- Nell'esempio vedete un punto dove due rami si incontrano e poi divergono
- Questi punti spesso corrispondono a valori ottimali di K per certe specifiche

Come si fa a capire se ci sono punti doppi?

step 1: calcola la derivata di $D(s) + KN(s)$ rispetto a s, i.e.,

$$D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s)$$

step 2: costruisci e risolvi il sistema

$$\begin{cases} D(s) + KN(s) = 0 \\ D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s) = 0 \end{cases}$$

step 3: le soluzioni (se ne esistono!) $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{C}$ sono i punti doppi del luogo

step 4: calcola anche i K_1, K_2, ... a cui corrispondono le soluzioni

step 5: *per questo corso, considera solo le soluzioni corrispondenti ai K_j reali e positivi*

notes

- Ecco come trovare praticamente i punti doppi:
- 1) Deriviamo il polinomio caratteristico rispetto a s
- 2) Mettiamo a sistema l'annullamento del polinomio e della sua derivata
- 3) Le soluzioni di questo sistema sono i punti doppi
- 4) Per ogni punto doppio, calcoliamo il corrispondente valore di K
- 5) Consideriamo solo i K positivi perché sono quelli fisicamente significativi
- Nella pratica, spesso i punti doppi sono sull'asse reale

Come si fa a capire se ci sono punti tripli?

step 1: calcola le derivate prime e seconde di $D(s) + KN(s)$ rispetto a s, i.e.,

$$D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s) \qquad D^{(2)}(s) + KN^{(2)}(s)$$

step 2: costruisci e risolvi il sistema

$$\begin{cases} D(s) + KN(s) = 0 \\ D^{(1)}(s) + KN^{(1)}(s) = 0 D^{(2)}(s) + KN^{(2)}(s) = 0 \end{cases}$$

step 3: le soluzioni (se ne esistono!) $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{C}$ sono i punti tripli del luogo

step 4: calcola anche i K_1, K_2, ... a cui corrispondono le soluzioni

step 5: *per questo corso, considera solo le soluzioni corrispondenti ai K_j reali e positivi*

notes

- Per i punti tripli il procedimento è analogo ma più complesso
- Dobbiamo annullare anche la derivata seconda
- Nella pratica i punti tripli sono molto rari
- Se incontrate un punto triplo, probabilmente c'è qualche simmetria particolare nel sistema
- Per questo corso ci concentreremo principalmente sui punti doppi

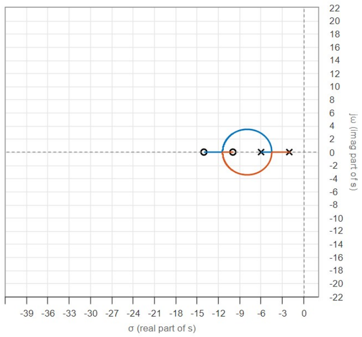
Come si fa a capire se ci sono punti quadrupli?

↦ estensione naturale delle slides precedenti

notes

- Il concetto si estende a punti di ordine superiore
- Ma nella pratica sono casi ancora più rari
- Il metodo è sempre lo stesso: annullare tutte le derivate fino all'ordine necessario
- Per questo corso non ci preoccuperemo di questi casi
- È importante però sapere che esistono per completezza teorica

Caso interessante

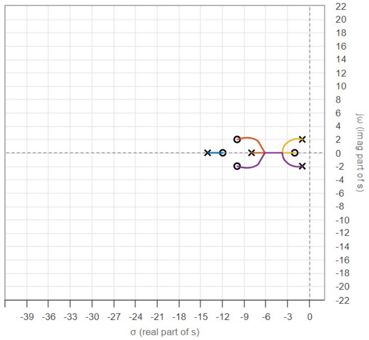


Se un intervallo sull'asse reale tra due poli o tra due zeri appartiene al luogo, allora c'e' almeno un punto doppio (piu' precisamente, c'e' un numero *dispari* di punti doppi)

notes

- Questo è un caso particolarmente interessante
- Se tra due poli (o due zeri) consecutivi c'è una parte del luogo, allora ci deve essere almeno un punto doppio in mezzo
- Anzi, il numero di punti doppi sarà dispari
- Nell'esempio vedete due poli con un punto doppio in mezzo
- Questo ci aiuta a prevedere dove cercare i punti doppi quando tracciamo il luogo

Duale del caso interessante



Se un intervallo sull'asse reale tra un polo ed uno zero appartiene al luogo, allora c'e' un numero *pari* di punti doppi

notes

- Questo è il caso complementare al precedente
- Tra un polo e uno zero, se c'è una parte del luogo, allora ci sarà un numero pari di punti doppi
- Potrebbero essercene zero, due, ecc.
- Questa regola ci aiuta a completare il tracciamento qualitativo del luogo
- Combinata con la precedente, ci dà un quadro completo del comportamento sull'asse reale

Esempi "DIY"

https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLDraw.html

notes

- Vi consiglio vivamente di provare questo simulatore interattivo
- Potete inserire diversi sistemi e vedere come cambia il luogo delle radici
- È un ottimo modo per verificare se avete capito le regole
- Provate a inserire i sistemi degli esempi che abbiamo visto
- Poi sperimentate con altri sistemi per vedere come si comporta il luogo

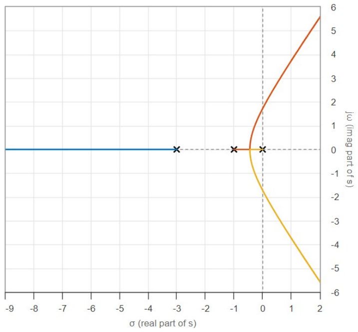
Regola 5 (Attraversamento dell'asse immaginario)

notes

-

Quando si perde stabilita'?

Quantita' molto importante in questo corso: $K_{\max}$ prima di perdere stabilita'



Come calcolarlo? Con Routh!

notes

- Una delle applicazioni più importanti del luogo delle radici è determinare la stabilità
- Vogliamo trovare il valore massimo di K per cui il sistema rimane stabile
- Questo corrisponde al punto in cui i poli attraversano l'asse immaginario
- Per trovarlo, useremo il criterio di Routh che già conoscete
- È un metodo sistematico per determinare i valori critici di K

Esempio di utilizzo di Routh per trovare gli attraversamenti dell'asse immaginario

$$s(s+1)(s+3)+K=0$$

3	1	3
2	4	K
1	$\frac{12-K}{4}$	
0	K	

$\Longrightarrow$ cambio di segno nella prima colonna per $K=12$

notes

- Ecco un esempio concreto di applicazione del criterio di Routh
- Costruiamo la tabella come al solito
- Cerchiamo i valori di K che annullano una riga
- In questo caso, quando K=12 si annulla la riga 1
- Questo è il valore critico oltre il quale il sistema diventa instabile
- Vediamo ora come trovare esattamente dove i poli attraversano l'asse immaginario

Trovato il K critico, come trovo gli attraversamenti?

3	1	3
2	4	K
1	$\frac{12-K}{4}$	
0	K	

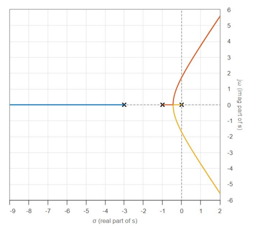
1. sostituisci quel K nella riga precedente alla riga nulla *(in questo caso, la riga "2")*
2. usa quei coefficienti per fare un polinomio *(in questo caso,* $4s^2 + 12$*)*
3. trova le sue radici - ce ne dovrebbero essere un paio di puramente immaginarie *(in questo caso,* $\pm j\sqrt{3}$*)*

notes

- Una volta trovato K critico, possiamo determinare dove i poli attraversano l'asse immaginario
- Prendiamo la riga sopra quella che si annulla e formiamo un polinomio
- Le radici di questo polinomio ci danno i punti di attraversamento
- In questo caso troviamo śj3, che corrispondono alla pulsazione di attraversamento
- Questo ci dice che per K=12 i poli sono su śj3 e poi si spostano nel semipiano destro

Considerazione importante: questo plot mostra solo i poli della FdT in catena chiusa, e non i suoi zeri

(altri suggerimenti pratici anche in `https://lpsa.swarthmore.edu/Root_Locus/RLocusExamples.html`)



> *. . . while the poles of a system are very important in determining the behavior of a system, the zeros can also be important. After performing a root-locus design, it is critical to go back and test the closed loop system to ensure that it behaves as expected.*

notes

- Attenzione: il luogo delle radici mostra solo l'evoluzione dei poli
- Ma gli zeri della fdt in catena chiusa influenzano ugualmente la risposta
- Dopo aver progettato con il luogo delle radici, è sempre bene verificare la risposta completa
- Gli zeri possono causare sovraelongazioni anche quando i poli sono ben smorzati
- Questo è un punto spesso trascurato ma molto importante nella pratica

Dimostrazione della Regola 3 (materiale addizionale sulla regola della porzione dell'asse reale)

notes

-

"$s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo iff il numero di zeri e poli a destra di s è dispari"

1. formula di partenza:

$$\sum_{i=1}^{m} \angle (s - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle (s - p_i) = (2h+1)\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

2. se s è reale, z_i e' reale, e $z_i < s$ (che significa graficamente che z_i e' a sinistra di s), allora $s - z_i > 0$ e quindi $\angle (s - z_i) = 0$
3. se s è reale, z_i e' reale, e $z_i > s$ (che significa graficamente che z_i e' a destra di s), allora $s - z_i < 0$ e quindi $\angle (s - z_i) = \pi$
4. se s è reale, e z_i e' complesso, allora esiste z_j tale che $z_j = \overline{z}_i$. Inoltre

$$s - z_j = s - \overline{z}_i = \overline{s} - \overline{z}_i = \overline{s - z_i}$$

e

$$\angle (s - z_i) + \angle (s - z_j) = \angle (s - z_i) + \angle \left(\overline{s - z_i}\right) = 0$$

indipendentemente dal fatto che la parte reale di z_i sia a destra o a sinistra di s

notes

- Ecco la dimostrazione della regola 3 che abbiamo usato prima
- Partiamo dalla condizione sulla fase che abbiamo visto
- Se s è reale, per gli zeri reali a sinistra la fase è 0
- Per gli zeri reali a destra la fase è
- Per le coppie complesse coniugate la somma delle fasi è sempre 0
- Quindi solo gli zeri e poli reali a destra contribuiscono alla fase

"$s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo iff il numero di zeri e poli a destra di s è dispari"

e per i poli p_i? Stesse considerazioni sulla fase degli zeri z_i:

1. se s è reale, p_i e' reale, e $p_i < s$ (che significa graficamente che p_i e' a sinistra di s), allora $s - p_i > 0$ e quindi $\angle(s - p_i) = 0$
2. se s è reale, p_i e' reale, e $p_i > s$ (che significa graficamente che p_i e' a destra di s), allora $s - p_i < 0$ e quindi $\angle(s - p_i) = \pi$
3. se s è reale, e p_i e' complesso, allora esiste p_j tale che $p_j = \overline{p}_i$. Inoltre

$$s - p_j = s - \overline{p}_i = \overline{s} - \overline{p}_i = \overline{s - p_i}$$

e

$$\angle(s - p_i) + \angle(s - p_j) = \angle(s - p_i) + \angle(\overline{s - p_i}) = 0$$

indipendentemente dal fatto che la parte reale di p_i sia a destra o a sinistra di s

notes

- Per i poli vale un discorso analogo ma con segno opposto
- Poli reali a sinistra: fase 0
- Poli reali a destra: fase (ma con segno meno nella formula originale)
- Coppie complesse coniugate: somma delle fasi nulla
- Quindi nella somma totale, solo poli e zeri reali a destra contribuiscono
- E il loro contributo netto deve essere un multiplo dispari di

"Un punto dell'asse reale $s \in \mathbb{R}$ appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di zeri e poli a destra di s, contando anche le molteplicità, è dispari"

$$\sum_{\substack{\text{zeri reali} \\ \text{a destra di } s}} \pi - \sum_{\substack{\text{poli reali} \\ \text{a destra di } s}} \pi =$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{numero di zeri} \\ \text{reali a destra di } s\end{array} - \begin{array}{c}\text{numero di poli} \\ \text{reali a destra di } s\end{array} \right) \pi = (2h+1)\pi$$

notes

- Mettendo tutto insieme, otteniamo questa condizione
- La somma delle fasi è uguale alla differenza tra numero di zeri e poli a destra, per
- Questa differenza deve essere dispari per soddisfare la condizione originale
- Ecco dimostrata la regola 3 che abbiamo usato prima
- Questa dimostrazione vi aiuta a capire perché la regola funziona

Most important python code for this sub-module

notes

-

Root locus via python

Purpose	`Library`	**Installation Command**
Control systems analysis	`control`	pip install control
Plotting	`matplotlib`	pip install matplotlib
Numerical math	`numpy`	pip install numpy
Interactive widgets	`ipywidgets`	pip install ipywidgets

Note: The `control` library (formerly `python-control`) is the primary tool for root locus

notes

- Per chi vuole sperimentare con Python, ecco le librerie principali
- La libreria 'control' è l'equivalente di Matlab per l'analisi dei sistemi
- matplotlib e numpy sono essenziali per i grafici e i calcoli
- ipywidgets è utile per creare interfacce interattive
- Vi consiglio di installare queste librerie e provare a generare alcuni luoghi delle radici

Question 1

stabilità Cosa rappresenta il luogo delle radici nei sistemi di controllo?

1. Il percorso degli zeri del sistema in anello chiuso al variare del guadagno
2. **(correct)** La traiettoria dei poli del sistema in anello chiuso al variare del guadagno
3. La risposta in frequenza del sistema in anello aperto
4. L'errore a regime del sistema per diversi ingressi
5. Non lo so

Solution 1: *Il luogo delle radici mostra come i poli del sistema in anello chiuso si muovono nel piano complesso al variare del guadagno K da 0 a infinito. È uno strumento potente per analizzare la stabilità e la risposta transitoria.*

Question 2

asintoti Come si calcola il centro degli asintoti ($\sigma_\star$) per il luogo delle radici?

1. Somma dei poli meno somma degli zeri divisa per il numero di poli
2. Media delle parti reali di tutti i poli e zeri
3. **(correct)** (Somma dei poli meno somma degli zeri) divisa per (numero di poli meno numero di zeri)
4. Somma dei poli divisa per il numero di poli
5. Non lo so

Solution 1: *La formula corretta è $\sigma_\star = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$. Questo dà il punto sull'asse reale da cui si irradiano gli asintoti quando il numero di poli supera quello degli zeri.*

Question 3

asse reale Quale porzione dell'asse reale appartiene al luogo delle radici?

1. I segmenti in cui il numero di poli e zeri a destra è pari
2. **(correct)** I segmenti in cui il numero di poli e zeri a destra è dispari
3. Tutti i segmenti tra due poli o zeri consecutivi
4. Solo i segmenti a sinistra del polo più a sinistra
5. Non lo so

Solution 1: *Un punto sull'asse reale appartiene al luogo delle radici se e solo se il numero totale di poli e zeri alla sua destra è dispari. Questo è una conseguenza diretta della condizione di angolo.*

Question 4

punti di diramazione Cosa rappresenta un punto di diramazione sul luogo delle radici?

1. Il punto in cui il sistema diventa instabile
2. Il punto in cui il guadagno K raggiunge il suo valore massimo
3. **(correct)** Un punto in cui più rami del luogo delle radici si incontrano e si separano (radice doppia/multipla)
4. Il punto in cui il coefficiente di smorzamento è massimo
5. Non lo so

Solution 1: *Un punto di diramazione si verifica quando l'equazione caratteristica ha una radice multipla, cioè due o più rami del luogo delle radici si uniscono e poi si separano. Questo corrisponde a un valore critico del guadagno in cui la risposta del sistema cambia qualitativamente.*

Question 5

analisi di stabilità Come si può determinare il valore di K a cui il sistema diventa instabile usando il luogo delle radici?

1. Trovare il guadagno in cui il luogo delle radici interseca l'asse reale
2. **(correct)** Usare il criterio di Routh-Hurwitz per trovare quando i poli attraversano l'asse immaginario
3. Calcolare il guadagno nel punto di diramazione
4. Trovare il valore minimo di K per cui tutti i poli sono reali
5. Non lo so

Solution 1: *Il criterio di Routh-Hurwitz è il metodo più affidabile per determinare il guadagno critico in cui i poli attraversano l'asse immaginario. Il luogo delle radici mostra visivamente l'intersezione, ma Routh fornisce il valore esatto.*

Question 6

angoli di uscita Cosa succede ai rami del luogo delle radici quando il numero di poli supera quello degli zeri di 3?

1. Tutti i rami terminano in zeri finiti
2. Due rami vanno all'infinito lungo asintoti verticali
3. **(correct)** Tre rami vanno all'infinito con angoli di 60ř, 180ř e 300ř
4. I rami formano un cerchio nel piano complesso
5. Non lo so

Solution 1: *Quando ci sono 3 poli in più rispetto agli zeri, tre rami andranno all'infinito. I loro asintoti formano angoli separati di 180ř/3 = 60ř, a partire da 180ř/(numero di poli in eccesso) = 60ř.*

Recap of module "Il luogo delle radici"

1. il luogo delle radici e' uno strumento fondamentale per la progettazione dei sistemi di controllo
2. anche se non e' essenziale ricordare tutte le regole per disegnarlo a mano, alcune regole sono importanti perche' danno informazioni strutturali (e.g., "se ho tre poli e nessuno zero allora per K sufficientemente grande sicuramente ho instabilita'")

notes

- Ricordate questi punti chiave:
- 1) Il luogo delle radici è uno strumento potente per il progetto del controllo
- 2) Anche senza tracciarlo precisamente, le regole principali ci danno informazioni preziose
- In particolare, la relazione tra numero di poli, zeri e stabilità è fondamentale
- Nella pratica, userete software per tracciarlo, ma queste regole vi aiuteranno a interpretarlo
- Soprattutto, vi aiuteranno a capire se avete commesso errori nei vostri progetti