- Self-assessment material

notes

- this is the table of contents of this document; each section corresponds to a specific part of the course

Cosa implica fare delle approssimazioni ai poli dominanti

notes

Contents map

developed content units	taxonomy levels
risposta al gradino	u1, e1
approssimazione ai poli dominanti	u1, e1

prerequisite content units	taxonomy levels
funzione di trasferimento	u1, e1

notes

-

Main ILO of sub-module "Cosa implica fare delle approssimazioni ai poli dominanti"

Discuss how the step response of a system may change when applying dominant pole approximation to a transfer function with multiple poles and zeros

notes

- by the end of this module you shall be able to do this

Roadmap

- cosa succede se ignoriamo un polo?
- cosa succede se ignoriamo un polo ed uno zero?

notes

- Oggi esploreremo insieme due aspetti fondamentali dell'approssimazione ai poli dominanti
- Capiremo quando possiamo permetterci di trascurare alcuni poli e quali conseguenze ha questa scelta
- Vedremo anche cosa accade quando nella funzione di trasferimento è presente anche uno zero

Cosa succede se l'approssimazione ai poli dominanti non e' valida?

questo modulo = cosa succede in alcuni casi specifici

notes

- Attenzione: l'approssimazione ai poli dominanti non è sempre valida!
- In questo modulo analizzeremo alcuni casi concreti per capire quando possiamo applicarla e quando invece ci porterebbe a errori significativi
- Tenete a mente che nella pratica ingegneristica, capire questi limiti è fondamentale per progettare sistemi di controllo efficaci

Caso 1: ci sono due poli reali distinti

FdT originale:

$$W(s) = \frac{p}{(s+1)(s+p)} = \frac{1}{(1+s)(1+s\tau)} \qquad \tau = 1/p > 0$$

FdT approssimata:

$$\widehat{W}(s) = \frac{1}{s+1}$$

notes

- Partiamo dal caso più semplice: due poli reali distinti
- Notate che stiamo considerando il polo in -1 come dominante (più lento) e quello in -p come non dominante
- L'approssimazione consiste nel trascurare completamente il polo non dominante
- Ma quanto è grave questa approssimazione? Lo vedremo tra poco con la risposta al gradino

Che errore si introduce ad usare la FdT approssimata invece dell'originale?

caso risposta al gradino

$$Y_f(s) = \frac{p}{(s+1)(s+p)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{p}{p-1}}{s+1} + \frac{\frac{1}{p-1}}{s+p}$$

implica

$$y_f(t) = 1 - \frac{p}{p-1}e^{-t} + \frac{1}{p-1}e^{-pt} \qquad t \geq 0$$

mentre con il solo polo dominante la risposta sarebbe stata

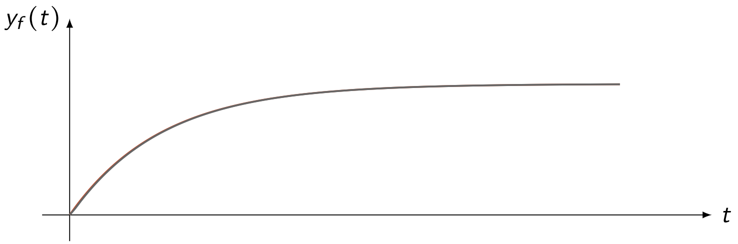
$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \quad \mapsto \quad 1 - e^{-t}$$

notes

- Ecco la risposta completa al gradino: notate i due termini esponenziali
- Il primo esponenziale $(e^{-t})quellochemanterremonell'approssimazioneIlsecondo(e^{-pt})quellochestiamotrascurand$
- Ma quanto pesa realmente questo secondo termine? Dipende da quanto p è grande rispetto a 1

Che errore si introduce ad usare la FdT approssimata invece dell'originale?

caso risposta al gradino



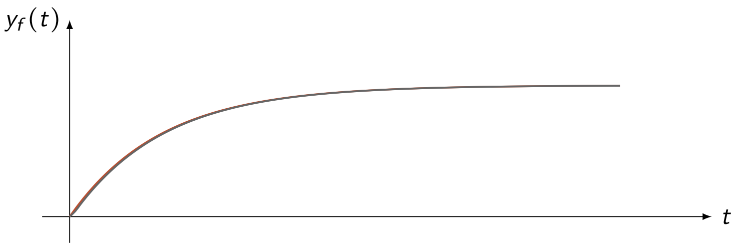
$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \qquad \frac{100}{(s+1)(s+100)}\frac{1}{s}$$

notes

- Qui p=100: il polo non dominante è molto più veloce
- Vedete che le due curve sono praticamente identiche!
- Questo perché il termine $e^{-100t} decadecosrapidamentecheilsuocontributotrascurabileIncasicomequesto, l'approssimazio$

Che errore si introduce ad usare la FdT approssimata invece dell'originale?

caso risposta al gradino



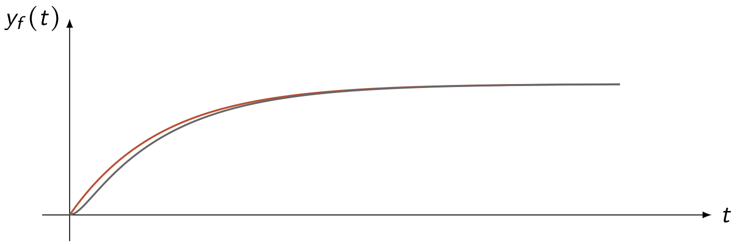
$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \qquad \frac{50}{(s+1)(s+50)}\frac{1}{s}$$

notes

- Ora p=50: il polo non dominante è ancora molto veloce
- Notate una piccolissima differenza iniziale, ma subito dopo le curve coincidono
- L'approssimazione rimane ottima, anche se non perfetta come nel caso precedente
- Questo ci dice che già con un rapporto di 50:1 tra i poli, possiamo tranquillamente trascurare quello più veloce

Che errore si introduce ad usare la FdT approssimata invece dell'originale?

caso risposta al gradino



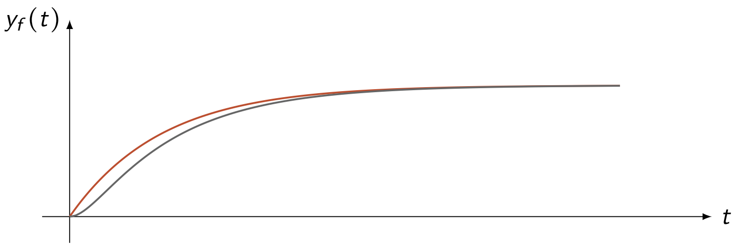
$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \qquad \frac{10}{(s+1)(s+10)}\frac{1}{s}$$

notes

- Con p=10 iniziamo a vedere una differenza più marcata nell'istante iniziale
- La risposta approssimata (blu) parte più lentamente rispetto a quella reale (rosso)
- Tuttavia, dopo pochissimo tempo le due curve si sovrappongono
- Questo è ancora un caso in cui l'approssimazione è accettabile, soprattutto se ci interessa il comportamento a regime

Che errore si introduce ad usare la FdT approssimata invece dell'originale?

caso risposta al gradino



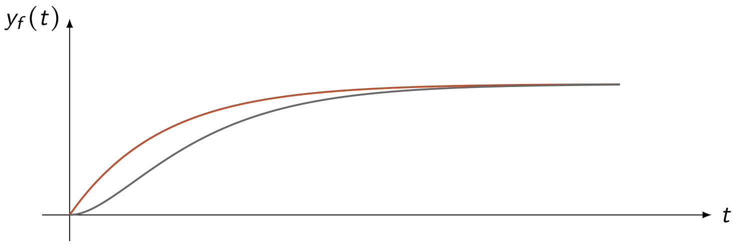
$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \qquad \frac{5}{(s+1)(s+5)}\frac{1}{s}$$

notes

- Ora p=5: la differenza iniziale è evidente
- La risposta reale (rosso) parte più velocemente perché il polo in -5 dà un contributo iniziale significativo
- L'approssimazione comincia a essere grossolana, soprattutto per tempi brevi
- Qui dovremmo già chiederci se possiamo davvero trascurare il secondo polo

Che errore si introduce ad usare la FdT approssimata invece dell'originale?

caso risposta al gradino



$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \qquad \frac{2}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}$$

notes

- Caso estremo: p=2, il polo "non dominante" è solo due volte più veloce
- Qui l'approssimazione è chiaramente inaccettabile!
- Le due risposte sono completamente diverse, soprattutto nella fase iniziale
- Questo ci dimostra che la regola empirica di considerare dominanti solo i poli "molto più lenti" ha una sua precisa ragione d'essere

Summarizing, ignorare il polo non dominante significa considerare una risposta anticipata rispetto a quella che si avrebbe

$$\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} \qquad \frac{p}{(s+1)(s+p)}\frac{1}{s}$$

$$1-e^{-t} \qquad 1-\frac{p}{p-1}e^{-t}+\frac{1}{p-1}e^{-pt}$$

notes

- Riassumendo: ignorare un polo significa considerare una risposta più lenta di quella reale
- L'errore che commettiamo dipende fortemente dal rapporto tra i due poli
- Come regola pratica, possiamo trascurare un polo quando è almeno 5-10 volte più veloce del polo dominante
- Ma attenzione: questa è solo una regola empirica! In ogni caso concreto dobbiamo valutare se l'approssimazione è accettabile per i nostri scopi

E se c'e' anche uno zero, ed ignoriamo anche quello?

$$\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s} \qquad \frac{p}{z}\frac{s+z}{(s+1)(s+p)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$1-e^{-t} \qquad 1-\frac{p}{p-1}\frac{z-1}{z}e^{-t}+\frac{1}{p-1}\frac{z-p}{z}e^{-pt}$$

i.e., si modificano i residui

notes

- La situazione si complica quando è presente anche uno zero
- Come vedete dalla formula, lo zero modifica i residui dei poli
- Più lo zero è vicino al polo dominante, più l'approssimazione peggiora
- In particolare, se lo zero è molto vicino al polo dominante, il suo contributo non può essere trascurato
- Questo è un caso in cui la semplice approssimazione ai poli dominanti potrebbe non essere sufficiente

Summarizing

Discuss how the step response of a system may change when applying dominant pole approximation to a transfer function with multiple poles and zeros

notes

- we saw only some specific cases, but you should have gotten the jist of it

Self-assessment material

notes

Question 1

What is a necessary condition for the dominant pole approximation to be valid?

Potential answers:

- I: **(wrong)** The dominant pole must be closer to the origin than any zero.
- II: **(correct)** The non-dominant poles must be significantly faster than the dominant pole.
- III: **(wrong)** The dominant pole must be complex with a small imaginary part.
- IV: **(wrong)** The gain of the system must be normalized to 1.
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The approximation is valid when the non-dominant poles are much faster (i.e., have much larger negative real parts) than the dominant pole, meaning their influence decays quickly and can be neglected in the long-term behavior.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 2

Which effect is typically observed when a non-dominant pole is ignored in a second-order system during a step response analysis?

Potential answers:

I: **(wrong)** The system becomes unstable.
II: **(correct)** The system appears to respond faster than it actually does.
III: **(wrong)** The steady-state value is significantly altered.
IV: **(wrong)** The response becomes oscillatory even if the original system is overdamped.
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

Ignoring a non-dominant (fast) pole leads to an approximation that misses the initial transient component of the response, giving the impression of an earlier rise time or a faster response.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 3

What is the primary modeling error introduced by using a dominant pole approximation for the transfer function $\dfrac{p}{(s+1)(s+p)}$?

Potential answers:

I: **(wrong)** The final value of the response is incorrect.
II: **(correct)** The early-time dynamics (initial transient) are not accurately captured.
III: **(wrong)** The approximation leads to an unstable system.
IV: **(wrong)** The system gain becomes infinite.
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The dominant pole approximation neglects the fast pole, which mainly affects the early part of the response. Thus, the approximation fails to reproduce the initial transient behavior, although the final value remains accurate.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 4

In the transfer function $\frac{p}{(s+1)(s+p)}$, what happens to the response as $p \to \infty$?

Potential answers:

I: **(correct)** The response converges to that of the system with transfer function $\frac{1}{s+1}$.
II: **(wrong)** The response diverges and becomes unstable.
III: **(wrong)** The system behaves like a pure integrator.
IV: **(wrong)** The steady-state value drops to zero.
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

As $p \to \infty$, the pole at $-p$ moves further left in the complex plane and becomes much faster. It decays very quickly, and its influence on the output becomes negligible. The system response then converges to that of $\frac{1}{s+1}$, which corresponds to the dominant pole.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 5

In the Laplace domain, why does the approximation $\frac{p}{(s+1)(s+p)} \approx \frac{1}{s+1}$ become worse for small p?

Potential answers:

I: **(wrong)** Because both poles move closer together and cancel each other out.
II: **(wrong)** Because the gain of the system changes drastically.
III: **(correct)** Because the time constant of the neglected pole becomes comparable to the dominant one.
IV: **(wrong)** Because the numerator introduces a zero near the origin.
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

As p decreases, the non-dominant pole at $-p$ becomes slower and its dynamics overlap more with the dominant pole. This makes the assumption that one pole dominates the response less valid, and the approximation $\frac{1}{\ldots}$ introduces

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Recap of the module
“Cosa implica fare delle approssimazioni ai poli dominanti”

- ignorare un polo significa tipicamente (manon sempre) considerare una risposta piu’ veloce di quella che si avrebbe originariamente
- ignorare uno zero significa fare un ulteriore errore

notes

- Riassumendo i concetti chiave di questo modulo:
- 1) L’approssimazione ai poli dominanti è utile ma va usata con giudizio
- 2) Funziona bene quando i poli non dominanti sono sufficientemente veloci
- 3) La presenza di zeri vicini ai poli dominanti complica la situazione
- 4) Nella pratica, sempre verificare se l’approssimazione è sufficientemente accurata per i nostri scopi
- Questi concetti saranno fondamentali quando affronteremo il progetto dei regolatori!