

- Self-assessment material

notes

- this is the table of contents of this document; each section corresponds to a specific part of the course

- 1

Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine

notes

Contents map

<u>developed content units</u>	<u>taxonomy levels</u>
risposta al gradino	u1, e1

<u>prerequisite content units</u>	<u>taxonomy levels</u>
sistema LTI del secondo ordine	u1, e1
funzione di trasferimento	u1, e1

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 2

notes

Main ILO of sub-module

“Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine”

- Derive the unit step response of a second-order system with complex conjugate poles using Laplace domain analysis
- Explain the influence of the natural frequency ω_n and damping ratio ξ on the transient response characteristics (e.g., overshoot, settling time, rise time)
- Transform between pole representation and (ω_n, ξ) parametrization for underdamped second-order systems
- Estimate transient response features (overshoot, settling time, rise time) using approximate analytical expressions
- Classify different step responses based on ξ and ω_n using plotted trajectories and analytic expressions

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 3

notes

- by the end of this module you shall be able to do this

Roadmap

- conti
- interpretazioni grafiche
- espressioni approssimate

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 4

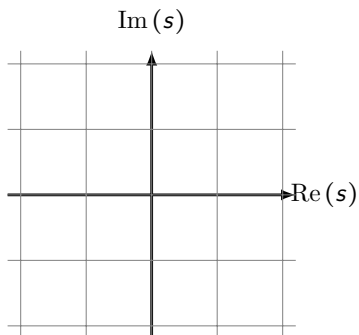
notes

- In questa lezione affronteremo l'analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine, un argomento fondamentale per capire il comportamento dinamico dei sistemi.
- Prima faremo i calcoli analitici necessari per derivare le espressioni della risposta al gradino, poi vedremo come interpretare graficamente questi risultati e infine introdurremo delle espressioni approssimate ma molto utili nella pratica ingegneristica.
- Queste formule semplificate ci permetteranno di fare dei calcoli rapidi ma sufficientemente accurati nella progettazione dei controllori.

Caso piu' complesso: coppia di poli dominanti = singoli e coniugati

$$\Rightarrow \text{ approssimazione di } W(s) = \widehat{W}(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$\text{con } W(0) = \widehat{W}(0)$$



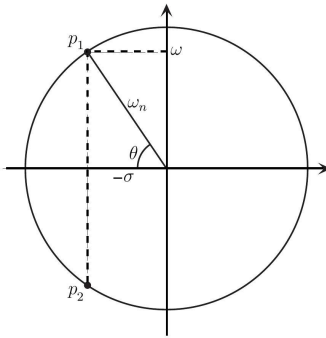
- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 5

notes

- Qui stiamo considerando un caso particolarmente importante: quando la funzione di trasferimento di un sistema può essere approssimata considerando solo i suoi poli dominanti.
- I poli dominanti sono quelli più vicini all'asse immaginario, che influenzano maggiormente la risposta del sistema poiché determinano le componenti della risposta che decadono più lentamente.
- Il valore di K viene scelto in modo che il guadagno statico dell'approssimazione sia uguale a quello del sistema originale, così preserviamo il comportamento a regime.
- Questa approssimazione è molto potente perché ci permette di studiare sistemi di ordine elevato come se fossero del secondo ordine, semplificando notevolmente l'analisi.

FdT di un sistema del secondo ordine

$$W(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{K}{(s - p)(s - \bar{p})}$$

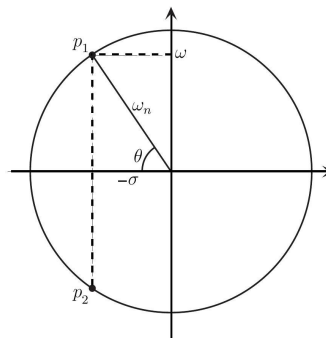


- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 6

notes

- Ecco la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati.
- Notate come ho riscritto p_1 e p_2 come p e $\bar{p}$ per enfatizzare che sono complessi coniugati.
- Nel grafico potete vedere la posizione di questi poli nel piano complesso: sono simmetrici rispetto all'asse reale.
- È importante osservare che la parte reale dei poli deve essere negativa per garantire la stabilità del sistema. Poli con parte reale positiva porterebbero a un sistema instabile.
- La posizione di questi poli determinerà completamente la dinamica del sistema, come vedremo nelle prossime slide.

Sistemi del secondo ordine - notazione alternativa



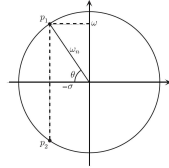
- $\omega_n = |p|$: pulsazione naturale
- $\xi = -\frac{\text{Re}[p]}{|p|} > 0$: coefficiente di smorzamento

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 7

notes

- Questa notazione alternativa è fondamentale nella teoria dei controlli automatici perché ci permette di caratterizzare i sistemi del secondo ordine in modo più intuitivo.
- La pulsazione naturale ω_n rappresenta il modulo del polo e ci dà informazioni sulla velocità di risposta del sistema. Maggiore è ω_n , più veloce sarà la risposta.
- Il coefficiente di smorzamento ξ è un parametro adimensionale che caratterizza il tipo di risposta del sistema. Notate che deve essere positivo per garantire la stabilità.
- Con $\xi < 1$ abbiamo un sistema sottosmorzato con risposta oscillatoria, con $\xi = 1$ abbiamo un sistema criticamente smorzato, e con $\xi > 1$ abbiamo un sistema sovrasmorzato.
- Questi due parametri sono molto più intuitivi da utilizzare nella progettazione rispetto alla posizione esatta dei poli.

Come passare tra le notazioni



$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega \quad \sigma, \omega \geq 0$$

$$\sigma = -\operatorname{Re}[p], \quad \omega = \operatorname{Im}[p]$$

$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

$$\sigma = \xi \omega_n = (\cos \theta) \omega_n$$

$$\omega = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n = (\sin \theta) \omega_n$$

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 8

notes

- Queste formule ci permettono di passare facilmente da una notazione all'altra, e sono molto utili durante i calcoli.
- Partendo dai poli $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$, possiamo calcolare facilmente ω_n e ξ .
- Viceversa, dati ω_n e ξ , possiamo determinare la posizione esatta dei poli.
- Notate l'interpretazione geometrica: θ è l'angolo che il polo forma con il semiasse reale negativo, e ω_n è la distanza dall'origine.
- Quindi $\cos \theta = \xi$ e $\sin \theta = \sqrt{1 - \xi^2}$, il che ci dà una bella interpretazione trigonometrica della posizione dei poli.
- Questa connessione geometrica sarà utile per comprendere intuitivamente come i valori di ξ e ω_n influenzano la risposta del sistema.

Risposta al gradino unitario per sistemi del secondo ordine - conti su come e' la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K}{(s-p)(s-\bar{p})}$$

$$= \frac{K}{s^2 - (p + \bar{p})s + p\bar{p}}$$

$$= \frac{K}{s^2 - 2\operatorname{Re}[p]s + |p|^2}$$

$$= \frac{K}{|p|^2 \left(1 - 2\frac{\operatorname{Re}[p]}{|p|^2}s + \frac{s^2}{|p|^2} \right)}$$

$$= \frac{K_B}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$\omega_n = |p| \quad \xi = -\frac{\operatorname{Re}[p]}{|p|} > 0 \quad K_B = \frac{K}{|p|^2}$$

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 9

notes

- Questi passaggi algebrici ci permettono di riscrivere la funzione di trasferimento in una forma standard che è ampiamente utilizzata in letteratura.
- Partiamo dalla FdT con i poli complessi coniugati e manipoliamo l'espressione passo dopo passo.
- Prima utilizziamo la proprietà che $p + \bar{p} = 2\operatorname{Re}[p]$ e $p \cdot \bar{p} = |p|^2$.
- Poi mettiamo in evidenza $|p|^2$ al denominatore e riscriviamo tutto in termini di ω_n e ξ .
- Arriviamo così alla forma standard $\frac{K_B}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$ che è quella che troverete in tutti i libri di testo.
- Notate che $K_B = \frac{K}{|p|^2}$ è scelto in modo che il guadagno statico sia corretto: $W(0) = K_B$.

Risposta al gradino unitario per sistemi del secondo ordine - conti sulla risposta forzata

$$Y_f(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-p} + \frac{C}{s-\bar{p}}$$

$$A = 1 \quad B = (s-p)Y_f(s)|_{s=p} = \frac{\omega_n^2}{(s-\bar{p})s} \Big|_{s=p} = \frac{p\bar{p}}{(p-\bar{p})p} = \frac{\bar{p}}{2j\omega}$$

$$p = -\omega_n e^{-j\theta} \quad B = \frac{-\omega_n e^{j\theta}}{2j\omega} = \frac{-e^{j\theta}}{2j \sin(\theta)} \quad C = \bar{B} = \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin(\theta)}$$

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 10

notes

- Qui stiamo calcolando la risposta forzata del sistema a un ingresso a gradino unitario.
- Per farlo, utilizziamo il metodo dello sviluppo in fratti semplici, una tecnica fondamentale che ci permette di scomporre la trasformata di Laplace in componenti più semplici.
- Prima scriviamo $Y_f(s)$ come somma di frazioni semplici con denominatori s , $(s-p)$ e $(s-\bar{p})$.
- Il coefficiente $A = 1$ corrisponde al valore a regime, mentre B e C sono i coefficienti associati ai poli complessi coniugati.
- Per calcolare B , usiamo il residuo nel polo p , e per simmetria sappiamo che C è il complesso coniugato di B .
- Notate come esprimiamo il polo p in forma esponenziale: $p = -\omega_n e^{-j\theta}$ dove $\theta = \arccos(\xi)$. Questo ci permetterà di semplificare i calcoli nel passaggio successivo.

Risposta al gradino unitario per sistemi del secondo ordine - conti sulla risposta forzata

$$y_f(t) = 1 - \frac{e^{j\theta}}{2j \sin(\theta)} e^{pt} + \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin(\theta)} e^{\bar{p}t}$$

$$= 1 - \frac{1}{2j \sin(\theta)} e^{-\sigma t + j\omega t + j\theta} + \frac{1}{2j \sin(\theta)} e^{-\sigma t - j\omega t - j\theta}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sin(\theta)} \frac{e^{j(\omega t + \theta)} - e^{-j(\omega t + \theta)}}{2j}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sin(\theta)} \sin(\omega t + \theta)$$

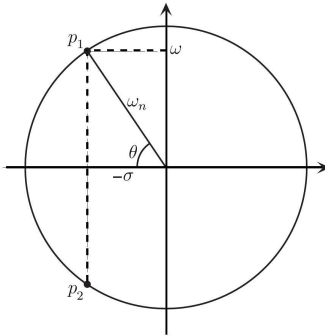
- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 11

notes

- Ora applichiamo l'anti-trasformata di Laplace per ottenere la risposta nel dominio del tempo.
- Partiamo dalla decomposizione in fratti semplici e antitrasformiamo termine per termine.
- Il primo termine $A = 1$ diventa semplicemente 1 nel dominio del tempo.
- I termini con B e C danno origine a esponenziali complessi che possiamo manipolare.
- Sostituiamo $p = -\sigma + j\omega$ e raccogliamo il fattore comune $e^{-\sigma t}$.
- Utilizzando la relazione $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$, otteniamo la forma finale.
- La risposta è composta da un valore costante (il valore a regime) e da un termine oscillatorio smorzato.
- Il fattore $e^{-\sigma t}$ rappresenta lo smorzamento esponenziale, mentre $\sin(\omega t + \theta)$ rappresenta l'oscillazione.

Risposta al gradino unitario per sistemi del secondo ordine - riassunto

$$y_f(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sin(\theta)} \sin(\omega t + \theta)$$

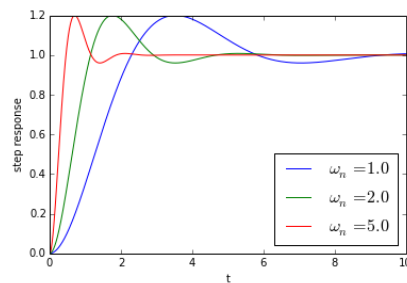
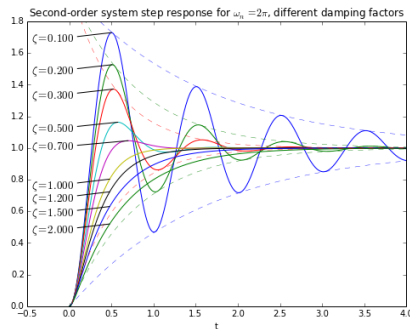


- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 12

notes

- Ecco finalmente la forma completa della risposta al gradino per un sistema del secondo ordine.
- Questa espressione ci mostra chiaramente che la risposta è composta da:
 - - Un termine costante pari a 1, che rappresenta il valore a regime
 - - Un termine oscillatorio smorzato dalla forma $\frac{e^{-\sigma t}}{\sin(\theta)} \sin(\omega t + \theta)$
- Ricordate che $\sigma = \xi \omega_n$, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ e $\theta = \arccos(\xi)$
- Il termine esponenziale $e^{-\sigma t}$ determina la velocità con cui le oscillazioni si smorzano.
- La frequenza delle oscillazioni è data da ω , che dipende sia da ω_n che da ξ .
- Minore è il coefficiente di smorzamento ξ , più pronunciate e durature saranno le oscillazioni.

Esempi di risposte al gradino unitario per sistemi del secondo ordine

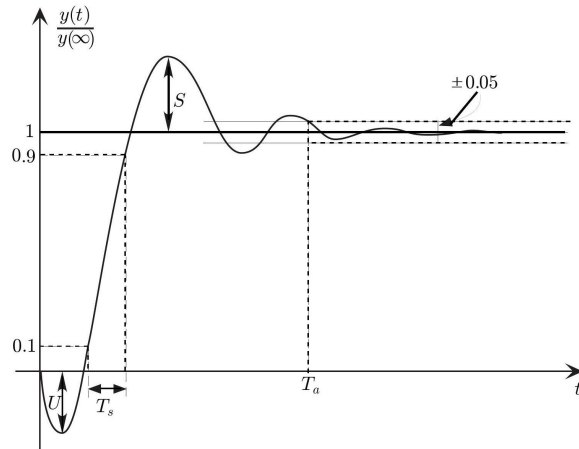


- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 13

notes

- Questi grafici ci mostrano visivamente come varia la risposta al variare dei parametri del sistema.
- Nel grafico di sinistra, manteniamo costante ω_n e variamo ξ . Possiamo osservare che:
 - - Con ξ piccolo (es. 0.1), abbiamo molte oscillazioni che si smorzano lentamente
 - - Con $\xi = 0.7$ (valore spesso utilizzato nella pratica), abbiamo un compromesso ottimale tra velocità e sovrallungamento
 - - Con $\xi \geq 1$, non abbiamo oscillazioni, ma la risposta diventa più lenta
- Nel grafico di destra, manteniamo costante ξ e variamo ω_n . Possiamo notare che:
 - - All'aumentare di ω_n , la risposta diventa più rapida (il sistema raggiunge il valore finale in meno tempo)
 - - La sovrallungamento percentuale rimane costante perché dipende solo da ξ
- Questi grafici sono essenziali per comprendere intuitivamente come progettare un sistema con le caratteristiche desiderate.

Quantita' interessanti associate a questa risposta

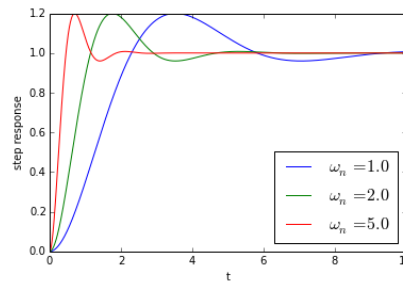
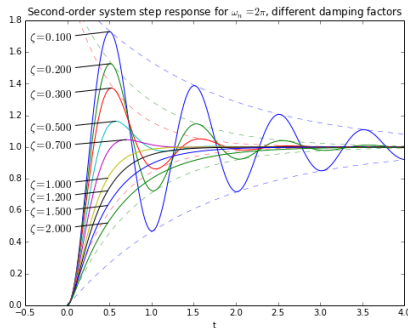


- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 14

notes

- In questa figura sono evidenziate le principali grandezze che caratterizzano la risposta al gradino:
- La sovraelongazione (overshoot) S è il superamento massimo rispetto al valore di regime, espresso in percentuale.
- La sottoelongazione (undershoot) U è l'escursione massima al di sotto del valore di regime, sempre in percentuale.
- Il tempo di salita (rise time) T_s è il tempo necessario perché la risposta passi dal 10
- Il tempo di assestamento (settling time) T_a è il tempo necessario perché la risposta entri e rimanga in una fascia del ± 5
- Queste grandezze sono fondamentali nelle specifiche di progetto: spesso ci viene richiesto di progettare un sistema con determinati valori di sovraelongazione massima, tempo di assestamento massimo, ecc.

Quantita' interessanti associate a questa risposta



- sottoelongazione $U = 0$
- tempo di assestamento T_a dipende da ξ
- tempo di salita T_s dipende da ω e ξ

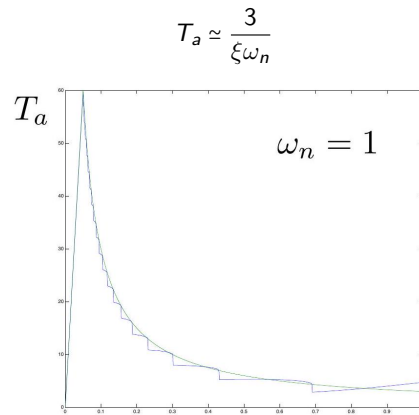
- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 15

notes

- Nei sistemi del secondo ordine, la sottoelongazione U è sempre zero: la risposta non scende mai sotto il valore iniziale.
- Il tempo di assestamento T_a dipende principalmente dal coefficiente di smorzamento ξ . Un ξ piccolo porta a oscillazioni più durature e quindi a un tempo di assestamento maggiore.
- Il tempo di salita T_s dipende sia da ω_n che da ξ . Un ω_n maggiore porta a una risposta più veloce, mentre un ξ maggiore tende a rallentare la risposta.
- È importante notare il trade-off: aumentando ξ riduciamo la sovraelongazione ma aumentiamo il tempo di salita. La scelta ottimale dipende dalle specifiche di progetto.
- Nelle prossime slide vedremo le formule approssimate che legano questi indici di prestazione ai parametri ω_n e ξ .

Formule associate alle quantità interessanti

Tempo di assestamento



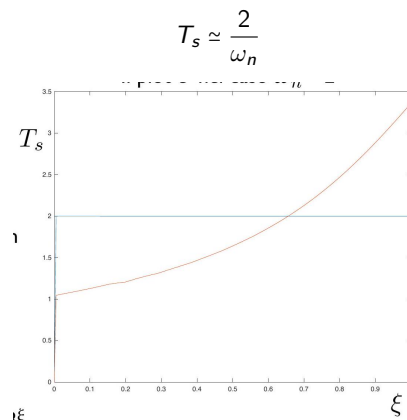
- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 16

notes

- Il tempo di assestamento può essere approssimato con la formula $T_a \approx \frac{3}{\xi \omega_n}$.
- Questa approssimazione deriva dal fatto che l'involuppo delle oscillazioni è $e^{-\xi \omega_n t}$, e vogliamo determinare quando questo termine diventa sufficientemente piccolo.
- In particolare, per $t = \frac{3}{\xi \omega_n}$, abbiamo $e^{-3} \approx 0.05$, cioè l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta al 5.
- Come potete vedere dal grafico (realizzato per $\omega_n = 1$), l'approssimazione $\frac{3}{\xi}$ è molto buona, soprattutto per $\xi < 0.7$.
- Questa formula è particolarmente utile in fase di progetto: se abbiamo un vincolo sul tempo di assestamento, possiamo immediatamente determinare il prodotto $\xi \omega_n$ necessario.

Formule associate alle quantità interessanti

Tempo di salita



- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 17

notes

- Il tempo di salita può essere approssimato con la formula $T_s \approx \frac{2}{\omega_n}$.
- Questa approssimazione è più rozza della precedente, come si vede dal grafico, ma fornisce comunque un'indicazione utile.
- Un'approssimazione migliore, come indicato, sarebbe $T_s \approx \frac{3,3^\xi}{\omega_n}$, che tiene conto anche dell'effetto di ξ .
- Notate come il tempo di salita aumenta con ξ : sistemi più smorzati sono più lenti a raggiungere il valore di regime.
- Questa è un'altra manifestazione del trade-off fondamentale nei sistemi di controllo: velocità vs. stabilità.
- Dal punto di vista pratico, la formula semplificata $\frac{2}{\omega_n}$ è spesso sufficiente per una stima iniziale durante la fase di progetto.

Formule associate alle quantità interessanti

Sovraelongazione

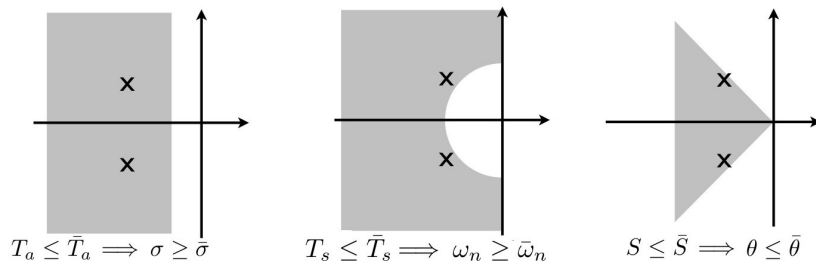
$$S = \exp\left(-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 18

notes

- La sovraelongazione percentuale è data dalla formula $S = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot 100\%$.
- Notate che S dipende solo da ξ e non da ω_n , come avevamo già osservato dai grafici precedenti.
- Questa formula deriva dal calcolo del massimo della risposta, che si verifica all'istante $t_{max} = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}}$.
- Per valori tipici di ξ , abbiamo:
 - Con $\xi = 0.4$, $S \approx 25\%$
 - Con $\xi = 0.7$, $S \approx 5\%$ (valore spesso utilizzato nella pratica)
 - Con $\xi \geq 1$, $S = 0\%$ (sistema sovrasmorzato, senza sovraelongazione)
- Questa formula è estremamente utile durante la progettazione: data una specifica sulla sovraelongazione massima ammissibile, possiamo immediatamente determinare il valore minimo di ξ necessario.

Con questi strumenti già possiamo progettare il nostro primo controllore!



- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 19

notes

- Ecco come possiamo utilizzare le formule che abbiamo derivato per progettare un controllore.
- Il procedimento è il seguente:
 - Dalle specifiche di progetto (sovraelongazione massima, tempo di assestamento massimo, ecc.), determiniamo i valori desiderati di ξ e ω_n .
 - Dalla sovraelongazione massima S , ricaviamo il valore minimo di ξ usando la formula $\xi = \frac{-\ln(S/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(S/100)}}$.
 - Dal tempo di assestamento massimo T_a , ricaviamo il valore minimo del prodotto $\xi\omega_n$ usando la formula $\xi\omega_n = \frac{3}{T_a}$.
 - Combinando i due risultati, determiniamo $\omega_n = \frac{3}{\xi \cdot T_a}$.
 - Una volta determinati ξ e ω_n , possiamo progettare un controllore che faccia sì che il sistema in anello chiuso abbia esattamente questi parametri.
 - Nelle prossime lezioni vedremo come tradurre questi valori di ξ e ω_n nei parametri concreti del controllore.

Summarizing

Derive the unit step response of a second-order system with complex conjugate poles using Laplace domain analysis

Explain the influence of the natural frequency ω_n and damping ratio ξ on the transient response characteristics (e.g., overshoot, settling time, rise time)

Transform between pole representation and (ω_n, ξ) parametrization for underdamped second-order systems

Estimate transient response features (overshoot, settling time, rise time) using approximate analytical expressions

Classify different step responses based on ξ and ω_n using plotted trajectories and analytic expressions

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 20

notes

- all these are concepts that we saw above. There is the need for memorizing some few formulas, but besides this there is not too much rocket science behind

Self-assessment material

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 1

notes

Question 1

In the context of second-order systems, what does ω_n represent in the standard notation?

Potential answers:

- I: **(wrong)** The damping coefficient
- II: **(correct)** The natural frequency
- III: **(wrong)** The settling time constant
- IV: **(wrong)** The overshoot percentage
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

ω_n represents the natural frequency of the system, which is the magnitude of the pole location ($|p|$) in the complex plane.

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 2

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 2

For a second-order system's step response, the settling time T_a is approximately:

Potential answers:

- I: **(wrong)** Inversely proportional to ω_n^2
- II: **(wrong)** Directly proportional to ξ^2
- III: **(correct)** Inversely proportional to $\xi\omega_n$
- IV: **(wrong)** Independent of the damping ratio ξ
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The settling time is approximately $T_a \simeq \frac{3}{\xi\omega_n}$, showing it's inversely proportional to both the damping ratio ξ and natural frequency ω_n .

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 3

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 3

Which of the following correctly describes the relationship between the damping ratio ξ and the pole location?

Potential answers:

- I: **(wrong)** $\xi = \frac{\text{Im}[p]}{|p|}$
II: **(correct)** $\xi = -\frac{\text{Re}[p]}{|p|}$
III: **(wrong)** $\xi = \frac{|p|}{\text{Re}[p]}$
IV: **(wrong)** $\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{\text{Im}[p]}{|p|}\right)^2}$
V: **(wrong)** I do not know

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 4

Solution 1:

The damping ratio is defined as $\xi = -\frac{\text{Re}[p]}{|p|}$, where p is the complex pole location.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 4

The overshoot S in a second-order system's step response:

Potential answers:

- I: **(wrong)** Increases with increasing damping ratio ξ
II: **(correct)** Decreases with increasing damping ratio ξ
III: **(wrong)** Is independent of the damping ratio ξ
IV: **(wrong)** Is always zero for $\xi > 0.5$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

Overshoot decreases with increasing damping ratio, as shown by the formula

$$S = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).$$

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 5

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 5

For a second-order system with complex conjugate poles, the step response contains:

Potential answers:

- I: **(wrong)** Pure exponential terms
- II: **(correct)** A decaying sinusoidal term
- III: **(wrong)** A growing sinusoidal term
- IV: **(wrong)** A constant term only
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The step response contains a decaying sinusoidal term as shown by the expression

$$y_f(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sin(\theta)} \sin(\omega t + \theta), \text{ where } \sigma \text{ is the real part of the poles.}$$

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 6

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Recap of the module

“Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine”

- per i sistemi del secondo ordine la risposta al gradino ha una espressione un po' piu' complicata, ed i vari indici hanno espressioni che e' meglio approssimare, per avere strumenti utilizzabili

notes

- In questo modulo abbiamo visto come caratterizzare la risposta al gradino dei sistemi del secondo ordine.
- Abbiamo derivato l'espressione analitica della risposta, che risulta essere composta da un valore costante e da un termine oscillatorio smorzato.
- Abbiamo poi introdotto i parametri fondamentali ω_n (pulsazione naturale) e ξ (coefficiente di smorzamento) che determinano completamente il comportamento del sistema.
- Abbiamo analizzato le quantità di interesse pratico: sovralongazione, tempo di salita e tempo di assestamento, e abbiamo fornito delle formule approssimate che legano queste quantità ai parametri del sistema.
- Queste formule approssimate sono particolarmente utili nella pratica ingegneristica perché ci permettono di fare calcoli rapidi ma sufficientemente accurati durante la fase di progetto di un controllore.

- Analisi del transitorio per i sistemi del secondo ordine 7