- Most important python code for this sub-module
- Self-assessment material

notes

- this is the table of contents of this document; each section corresponds to a specific part of the course

Analisi del transitorio per i sistemi del primo ordine

notes

Contents map

developed content units	**taxonomy levels**
costante di tempo	u1, e1

prerequisite content units	**taxonomy levels**
risposta forzata	u1, e1
sistema LTI del primo ordine	u1, e1

notes

Main ILO of sub-module "Analisi del transitorio per i sistemi del primo ordine"

Model first-order LTI systems using their dominant pole approximation

Derive the step response equation for canonical first-order systems

Calculate the time constant from system parameters and vice versa

Interpret first-order system behavior through time-domain plots

notes

- By the end of this module you shall be able to do this

Roadmap

- conti
- grafici

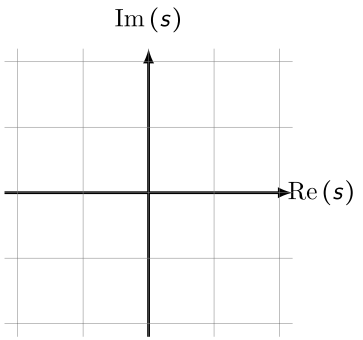
notes

- In questa parte iniziamo con il caso più semplice possibile: sistemi con un solo polo reale. Vedremo come si comportano quando applichiamo un ingresso a gradino.
- Facciamo prima i conti, per capire da dove arrivano le espressioni, e poi guardiamo i grafici, che ci aiuteranno ad avere intuizione visiva.

Caso piu' semplice: polo dominante = singolo e reale

$$\Longrightarrow \qquad \text{approssimazione di } W(s) = \widehat{W}(s) = \frac{K}{s-p}$$

con $W(0) = \widehat{W}(0)$



notes

- Questo è il caso più semplice, ma anche quello più utile per iniziare. Approssimiamo il sistema con un solo polo dominante, cioè quello più vicino all'asse immaginario.
- Scriviamo la funzione di trasferimento approssimata in forma canonica: un polo reale semplice con guadagno costante K.
- È importante che $W(0) = \widehat{W}(0)$, cioè che i due sistemi abbiano lo stesso guadagno statico. Così siamo sicuri che il comportamento a regime sia uguale, anche se stiamo semplificando il transitorio.

Risposta (forzata) al gradino per i sistemi del primo ordine - conti

$$W(s) = \frac{K}{s-p} = \frac{K}{-p(1-s/p)} = \frac{K_B}{1+\tau s}$$

$$K_B = -\frac{K}{p} \qquad \tau = -\frac{1}{p} > 0$$

Se $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$, allora $U(s) = \dfrac{1}{s}$ e quindi

$$Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/\tau}$$

con $A = W(0) = K_B$ e $B = (s+1/\tau)Y_f(s)|_{s=-1/\tau} = -K_B$. Quindi

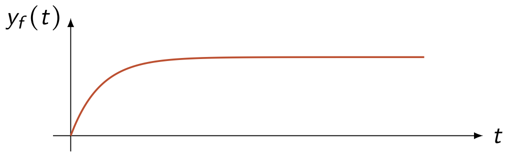
$$y_f(t) = K_B\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad t \geq 0$$

notes

- Qui facciamo i conti in dettaglio per ottenere la risposta al gradino di un sistema del primo ordine.
- Dopo un po di manipolazioni algebriche, otteniamo lespressione in termini della costante di tempo τ.
- Ricordate: $\tau = -\dfrac{1}{p}$ è positiva, perché p è un polo stabile (cioè negativo).
- Decomponiamo in fratti semplici e troviamo i coefficienti A e B, che ci danno una risposta temporale molto intuitiva.

Risposta (forzata) al gradino per i sistemi del primo ordine

$$y_f(t) = K_B\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad t \geq 0$$



notes

- Questa è la forma finale della risposta al gradino. Come vedete, cresce esponenzialmente verso lasintoto K_B.
- Questo tipo di risposta è chiamata *priva di sovraelongazione*, cioè non ha oscillazioni o rimbalzi: sale in maniera monotona.
- Landamento è governato da τ: più piccolo è τ, più rapidamente il sistema si avvicina al valore finale.

Relazioni ed approssimazioni da ricordare per questo caso

$$y_f(t) = K_B\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad t \geq 0$$

implica

$$S = 0$$
$$U = 0$$
$$T_s = \tau \ln 9 \simeq 2.2\tau = -\frac{2.2}{p}$$
$$T_a = \tau \ln 20 \simeq 3\tau = -\frac{3}{p}$$

notes

- In questo caso semplice possiamo calcolare esplicitamente tutti i parametri del transitorio.
- Non abbiamo né sovraelongazione ($S = 0$) né sottoelongazione ($U = 0$), perché il sistema non oscilla.
- Il tempo di salita e il tempo di assestamento sono legati alla costante di tempo τ.
- Un trucco utile: potete stimare τ graficamente tracciando la tangente allorigine e vedendo dove incontra il valore asintotico.

Summarizing

Model first-order LTI systems using their dominant pole approximation

Derive the step response equation for canonical first-order systems

Calculate the time constant from system parameters and vice versa

Interpret first-order system behavior through time-domain plots

notes

- By the end of this module you shall be able to:
- Transform first-order systems into canonical form ($K_B/1 + T_s$)
- Solve for step response both analytically and graphically
- Relate pole position to time constant and transient duration
- Recognize characteristic exponential response curves

Most important python code for this sub-module

notes

Control systems library

- `control.step_response()`
- `control.step_info()`

notes

- (to the best of our knowledge)

Self-assessment material

notes

Question 1

For a first-order system with transfer function $W(s) = \frac{K}{s-p}$, which of the following expressions correctly represents the step response?

Potential answers:

I: **(wrong)** $y_f(t) = K_B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ for $t \geq 0$
II: **(wrong)** $y_f(t) = K_B \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \tau}\right)$ for $t \geq 0$
III: **(correct)** $y_f(t) = K_B \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ for $t \geq 0$
IV: **(wrong)** $y_f(t) = K_B \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$ for $t \geq 0$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The correct step response for a first-order system with transfer function $W(s) = \frac{K}{s-p}$ is $y_f(t) = K_B \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ for $t \geq 0$, where $K_B = -\frac{K}{p}$ and $\tau = -\frac{1}{p} > 0$. This expression shows that the response starts at zero and exponentially approaches the steady-state value K_B. The first option is incorrect because it decreases from

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 2

The settling time T_a for a first-order system with time constant τ and pole at p is approximately:

Potential answers:

- I: **(wrong)** $T_a \approx \tau$
- II: **(wrong)** $T_a \approx 2\tau$
- III: **(correct)** $T_a \approx 3\tau$
- IV: **(wrong)** $T_a \approx 5\tau$
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The settling time for a first-order system is defined as the time required for the response to permanently enter and remain within the $\pm 5\%$ band of the final value. For the first-order system, this can be calculated exactly as $T_a = \tau \ln 20 \approx 3\tau$. This is because we need to solve $e^{-\frac{T_a}{\tau}} \leq 0.05$, which gives $-\frac{T_a}{\tau} \leq \ln(0.05)$, resulting in $T_a \geq \tau \ln(20) \approx 3\tau$. The relationship can also be expressed in terms of the pole as $T_a = -\frac{3}{p}$.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 3

What is the mathematical expression for the rise time T_s of a first-order system in terms of its time constant τ?

Potential answers:

- I: **(wrong)** $T_s = \tau$
- II: **(correct)** $T_s = \tau \ln 9 \approx 2.2\tau$
- III: **(wrong)** $T_s = \tau \ln 20 \approx 3\tau$
- IV: **(wrong)** $T_s = \tau \ln 4 \approx 1.4\tau$
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The rise time T_s is defined as the time required for the system response to go from 10% to 90% of its final value. For a first-order system with response $y_f(t) = K_B(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, we need to find t such that $y_f(t) = 0.1K_B$ and $y_f(t) = 0.9K_B$. This gives us $1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.1$ and $1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} = 0.9$. Solving, we get $t_1 = \tau \ln(\frac{10}{9})$ and

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 4

What is the overshoot value S for a first-order system with a single real pole?

Potential answers:

I: **(correct)** $S = 0$
II: **(wrong)** $S = 0.05$
III: **(wrong)** $S = e^{-\pi} \approx 0.043$
IV: **(wrong)** $S = \frac{1}{\tau}$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

The overshoot S for a first-order system with a single real pole is always zero. This is because the step response of such a system is $y_f(t) = K_B(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ for $t \geq 0$, which monotonically increases to K_B without ever exceeding it. The derivative of this function is always positive but decreasing, meaning the function approaches its asymptotic value from below without overshooting. Therefore, there is no maximum value greater than the final value, resulting in $S = 0$. First-order systems are characterized by this non-oscillatory behavior, unlike second-order systems which can exhibit overshoot under certain conditions.

- Analisi del transitorio per i sistemi del primo ordine 5

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 5

Given a first-order system with a stable pole at $p = -2$, what is the value of its time constant τ?

Potential answers:

I: **(wrong)** $\tau = -2$
II: **(wrong)** $\tau = 2$
III: **(correct)** $\tau = 0.5$
IV: **(wrong)** $\tau = -0.5$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

For a first-order system with transfer function $W(s) = \frac{K}{s-p}$, the time constant τ is related to the pole p by the equation $\tau = -\frac{1}{p}$. Given that $p = -2$, we have $\tau = -\frac{1}{-2} = 0.5$. The time constant must be positive for a stable system, which is

- Analisi del transitorio per i sistemi del primo ordine 6

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Recap of module "Analisi del transitorio per i sistemi del primo ordine"

- La risposta al gradino di un sistema del primo ordine ha una forma esponenziale crescente verso un valore asintotico.
- Il sistema non presenta né sovraelongazione né sottoelongazione.
- Tutti i parametri del transitorio possono essere espressi in funzione della costante di tempo τ.
- La costante di tempo può essere ricavata anche graficamente, e dà un'indicazione chiara della "prontezza" del sistema.

notes

- Quello che voglio che ricordiate è: i sistemi del primo ordine sono semplici ma molto utili per costruire intuizione.
- Hanno una risposta prevedibile, priva di oscillazioni, e completamente caratterizzata dalla costante di tempo.
- Questo ci dà un linguaggio concreto per descrivere "quanto è veloce" un sistema.