- Self-assessment material

notes

- this is the table of contents of this document; each section corresponds to a specific part of the course

Risposta a regime

notes

Contents map

developed content units	taxonomy levels
risposta a regime	u1, e1
risposta in frequenza	u1, e1
guadagno di Bode	u1, e1

prerequisite content units	taxonomy levels
sistemi LTI	u1, e1
funzioni di trasferimento	u1, e1

notes

Main ILO of sub-module "Risposta a regime"

define and distinguish between transient and steady-state responses in LTI systems subjected to canonical inputs

distinguish between resonance and beating phenomena in frequency-domain analysis

analyze and compute steady-state responses using transfer functions

analyze the role of pole-zero configurations and system type (e.g., number of integrators) on steady-state error and response

evaluate and interpret DC gain, Bode gain, and input-output structure to predict system performance

notes

- by the end of this module you shall be able to do this

Roadmap

- definizioni ed assunzioni
- risposta in frequenza
- risposta alle rampe generalizzate

notes

- In questa lezione affronteremo tre argomenti principali: prima stabiliremo bene le definizioni e le ipotesi di lavoro, poi approfondiremo il concetto fondamentale di risposta in frequenza, e infine vedremo come estendere questi concetti ai segnali rampa.

Cosa stiamo imparando ora?

A rispondere alla domanda:

dato il sistema $W(s)$ e l'ingresso $U(s)$, come sara' $y_f(t)$ "per t grandi"?

Esempi pratici:

- come gira il mio motore a regime?
- quanto produce il mio impianto a regime?

notes

- Vi state mai chiesti come si comporta un sistema dopo che è passato il transitorio iniziale? Ecco, questo è esattamente ciò che studieremo oggi.
- Queste conoscenze sono fondamentali per progettare sistemi di controllo che funzionino bene a regime, non solo durante i primi istanti.

Strumento per risolvere le domande di prima:

- risposta a regime ai segnali canonici = risposta forzata di un sistema alimentato da segnali canonici
- segnali canonici = sinusoide, gradino, rampa, rampa parabolica, etc.

notes

- Questi segnali sono importanti perché la maggior parte dei segnali di riferimento di un sistema controllato coincidono con questo tipo di segnali.
- Pensateci: quando impostate una velocità desiderata per un motore, state essenzialmente dando un gradino di riferimento. Quando volete un movimento uniformemente accelerato, state dando una rampa.

Generalizzando:

Risposta a segnali canonici = unione di

- risposta a regime ai segnali canonici
- risposta nel transitorio (cioe' per tempi piccoli)

notes

- Attenzione: l'analisi nel transitorio sarà molto più complessa e per questo ci baseremo su approssimazioni, ma questo lo vedremo nel prossimo modulo.
- Per ora concentriamoci sul comportamento a regime, che già da solo ci darà molte informazioni importanti sul sistema.

Questo modulo:

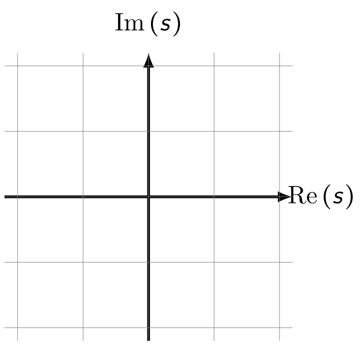
Risposta a regime ai segnali canonici per sistemi BIBO stabili

notes

- Un'importante restrizione: lavoreremo solo con sistemi BIBO stabili. Questo ci semplificherà molto la vita perché potremo trascurare i termini che tendono a zero.
- Più avanti vedremo cosa succede quando rilassiamo questa ipotesi.

Come si fa, in breve?

- $W(s)$ BIBO stabile $\implies$ "poli di W strettamente nel semipiano sinistro"
- $U(s)$ "segnale canonico" $\implies$ "poli di U sull'asse immaginario"
- $Y_f(s) = W(s)U(s) \implies$ "poli di Y_f = unione dei poli di W e U"
- i poli di Y_f asint. stabili per $t \to +\infty$ spariscono, rimangono quelli marg. stabili
- quindi resta una $Y_{f,\text{regime}}(s)$ che ha gli stessi poli di U ma residui diversi



notes

- Questo è il cuore del metodo: scomponiamo la risposta in parti che decadono e parti che permangono.
- I poli sull'asse immaginario (quelli del segnale di ingresso) determinano il comportamento a regime, mentre i poli a parte reale negativa (quelli del sistema) determinano il transitorio.
- Vi mostrerò ora alcuni esempi concreti per fissare meglio questo concetto.

Risposta a regime per il caso gradino

$$u(t) = 1, t \geq 0 \implies U(s) = \frac{1}{s} \implies Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s}$$

$W(s)$ propria e $U(s)$ strettamente propria $\implies$ $Y_f(s)$ strettamente propria

notes

- Il gradino è il segnale canonico più semplice che possiamo considerare, ed è fondamentale per capire il comportamento a regime.
- Notate come la proprietà di essere strettamente propri ci garantisce che l'antitrasformata sia ben definita.

Risposta a regime per il caso gradino

$$Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \sum_{i,k} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

con p_i poli di $W(s)$ asintoticamente stabili

$$A = sY_f(s)|_{s=0} = W(0)$$
$$y_f(t) = W(0) + \text{vanishing terms}$$

notes

- Ecco il risultato chiave: a regime, l'uscita tende al valore $W(0)$, che chiameremo guadagno statico.
- Tutti gli altri termini, associati ai poli del sistema, decadono esponenzialmente a zero.
- Questo è il motivo per cui $W(0)$ è così importante nella pratica!

Risposta a regime per il caso gradino

quindi

$$y_f(t) = W(0) + \text{vanishing terms}$$

cioe' gradino di ampiezza $W(0)$ $W(0)$ *= guadagno in continua o guadagno statico*

notes

- Questo risultato è potentissimo: ci dice che qualsiasi sistema stabile, a prescindere dalla sua complessità, a regime risponderà a un gradino con un gradino di ampiezza $W(0)$.
- Nella pratica, quando progettate un controllo, spesso uno dei primi requisiti è proprio sul guadagno statico.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \text{propria e BIBO stabile}$$

$$u(t) = \cos(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

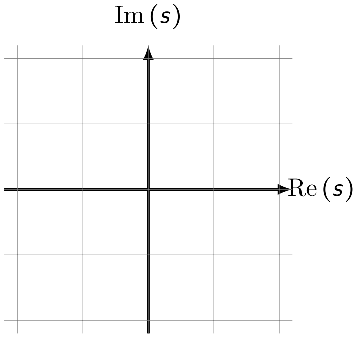
notes

- Passiamo ora al caso forse più interessante: l'ingresso sinusoidale.
- Questo è fondamentale perché ci permetterà di introdurre il concetto di risposta in frequenza.
- Inoltre, molti segnali periodici possono essere scomposti in sinusoidi tramite serie di Fourier.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}[\cos(\omega t + \varphi)](s) \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}\right](s) \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\varphi}}{2}e^{j\omega t} + \frac{e^{-j\varphi}}{2}e^{-j\omega t}\right](s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{s-j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s+j\omega}\right) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \qquad \mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right](s) = \frac{1}{s-\alpha}$$



notes

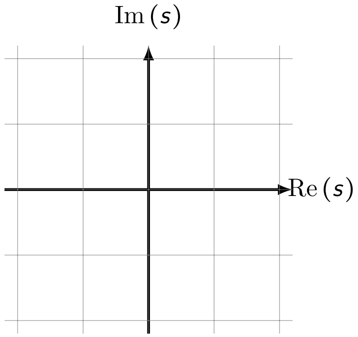
- Stiamo usando la formula di Eulero per esprimere il coseno in termini di esponenziali complessi.
- Notate come nella trasformata compaiano due poli sull'asse immaginario, a $\pm j\omega$.
- Questi poli determineranno il comportamento a regime del sistema.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = W(s)U(s)$$

se $W(s)$ propria e $U(s)$ strettamente propria allora $Y_f(s)$ strettamente propria

$$Y_f(s) = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k}$$



notes

- $Y_f(s)$ ha tra i suoi poli $\pm j\omega$ con molteplicità 1 e in aggiunta ai poli di $W(s)$ che saranno tutti a parte reale negativa.
- Con p_i poli di $W(s)$, $\mathrm{Re}[p_i] < 0$
- Essendo BIBO, W non ha poli sull'asse immaginario (a parte eventualmente nell'origine, che però abbiamo escluso in questo caso)

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$$\begin{aligned} A &= (s-j\omega)Y_f(s)\big|_{s=j\omega} \\ &= (s-j\omega)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{s-j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s+j\omega}\right)W(s)\Big|_{s=j\omega} = \\ &= \frac{1}{2}e^{j\varphi}W(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\frac{s-j\omega}{s+j\omega}W(s)\Big|_{s=j\omega} = \\ &= \frac{1}{2}e^{j\varphi}W(j\omega). \end{aligned}$$

notes

- Ecco come calcoliamo il residuo nel polo $s = j\omega$. Notate che il secondo termine si annulla perché $(s - j\omega)$ vale zero proprio in $s = j\omega$.
- $W(j\omega)$ è un numero complesso che dipende dalla pulsazione ω del segnale di ingresso.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$$B = \frac{1}{2}e^{-j\varphi}W(-j\omega).$$

notes

- Analogamente, il residuo nel polo $s = -j\omega$ dipende da $W(-j\omega)$.
- Tra poco vedremo la relazione tra A e B che ci semplificherà molto i calcoli.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

Poiché $a(s)$ e $b(s)$ sono polinomi a coefficienti reali, allora

$$W(-j\omega) = \frac{b(-j\omega)}{a(-j\omega)} = \frac{\overline{b(j\omega)}}{\overline{a(j\omega)}} = \overline{W(j\omega)},$$

da cui segue che

$$B = \frac{1}{2}e^{-j\varphi}W(-j\omega) = \frac{1}{2}\overline{e^{j\varphi}W(j\omega)} = \bar{A}$$

notes

- Questa è una proprietà fondamentale: per sistemi a coefficienti reali, la valutazione della funzione di trasferimento in $-j\omega$ è il coniugato della valutazione in $j\omega$.
- Questo ci permette di esprimere tutto in termini di $W(j\omega)$ e del suo coniugato.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$Y_f(s) = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k} \quad A = \frac{e^{j\varphi}}{2}W(j\omega)$$

con $|W(s)|$ e $\angle W(j\omega)$ il modulo e la fase di $W(j\omega)$

notes

- Ora possiamo esprimere tutto in termini di modulo e fase di $W(j\omega)$, che sono quantità fisicamente interpretabili.
- Il modulo ci dirà quanto il sistema amplifica o attenua la sinusoide, la fase ci dirà quanto la sfaserà.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}.$$

$$y_f(t) = Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t} + \underbrace{\sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t}}_{\text{termini } \to 0}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[Ae^{j\omega t}\right] + (\text{ termini } \longrightarrow 0)$$

$$= \mathrm{Re}\left[e^{j\varphi}|W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}e^{j\omega}\right] + (\text{ termini } \longrightarrow 0)$$

$$= |W(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)) + (\text{ termini } \longrightarrow 0).$$

notes

- Ecco il risultato finale: dopo un transitorio iniziale, l'uscita sarà ancora una sinusoide alla stessa frequenza dell'ingresso, ma con ampiezza modificata e fase sfasata.
- Questo è il motivo per cui la risposta in frequenza è così importante: ci dice come il sistema modifica le sinusoidi a regime.

Risposta a regime per il caso segnali sinusoidali

risultato *importantissimo*:

se

$$u(t) = \cos(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

allora

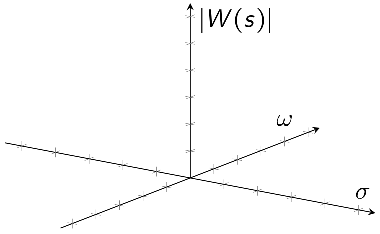
$$y_f(t) = |W(j\omega)|\cos\left(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)\right) + \text{vanishing terms}$$

notes

- Questo è probabilmente il risultato più importante di tutta l'automatica: a regime, un sistema LTI stabile trasforma una sinusoide in un'altra sinusoide alla stessa frequenza, modificandone ampiezza e fase.
- L'ampiezza viene moltiplicata per $|W(j\omega)|$, mentre la fase viene incrementata di $\angle W(j\omega)$.
- Questo risultato è alla base dei diagrammi di Bode che studieremo a breve.

"Risposta in frequenza" di un sistema LTI $W(s)$ - definizione e interpretazione grafica

$$u(t) = \cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{forzata a regime}}(t) = \left|W(j\omega)\right| \cos\left(\omega t + \angle W(j\omega)\right)$$



notes

- Notate come questo caso generalizza lo step response: il guadagno statico $W(0)$ non è altro che un caso particolare della risposta in frequenza valutata in $\omega = 0$.
- La risposta in frequenza è un opportuno taglio della trasformata di Laplace della risposta impulsiva!
- Graficamente, possiamo immaginare di valutare $W(s)$ lungo l'asse immaginario per ottenere $W(j\omega)$.

Risposta in frequenza: caso sistema non BIBO

Per sistemi instabili i calcoli fatti in precedenza restano validi. L'unica ipotesi che deve restare e che $j\omega$ non sia uno zero di $a(s)$. Alla fine si ottiene una risposta dove i termini tra parentesi non sono più trascurabili asintoticamente ma possono divergere. In questo caso la componente sinusoidale e' dominata dai modi divergenti.

notes

- Attenzione: per sistemi instabili il concetto di "regime" perde di significato, perché i termini divergenti dominano su tutto.
- Tuttavia, formalmente i calcoli restano validi purché $j\omega$ non sia un polo del sistema (cioè non sia una risonanza).
- Nella pratica, ovviamente, eviteremo di lavorare con sistemi instabili!

Risposta in frequenza: caso sistema non BIBO ma semplicemente stabile

(esempio di W con poli semplici in $\pm j\omega$ e rimanenti poli asintoticamente stabili)

due casi

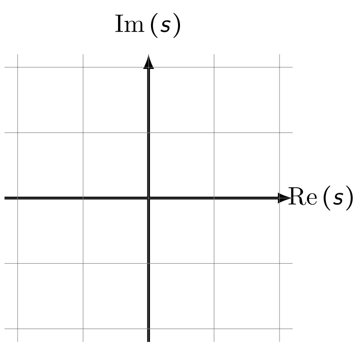
- $u(t)$ e' seno con la stessa frequenza ω
- $u(t)$ e' seno con una frequenza $\overline{\omega} \neq \omega$

notes

- Questo è un caso interessante: sistemi marginalmente stabili con poli sull'asse immaginario.
- Il comportamento cambia radicalmente a seconda che la frequenza di ingresso coincida o meno con la frequenza naturale del sistema.
- Vediamo ora i due casi separatamente.

Risposta in frequenza con W con poli semplici in $\pm j\omega$, rimanenti poli asintoticamente stabili, e $u(t)$ seno con la stessa frequenza ω

$$y_{f,\mathrm{regime}}(t) = R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 t \cos(\omega t + \varphi_2)$$

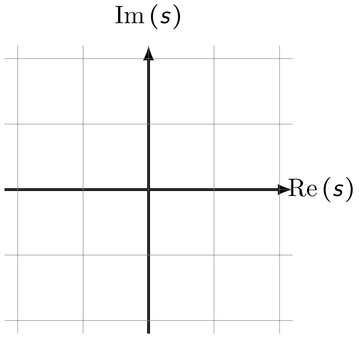


notes

- In questo caso compare un termine divergente proporzionale a t! Questo è il fenomeno della risonanza.
- R_1, R_2, φ_1 e φ_2 dipendono da $W(s)$. Il modo divergente oscillerà con pulsazione ω.
- Come si trovano i residui e gli sfasamenti? Con la scomposizione in fratti semplici!
- Nella pratica, ovviamente, vogliamo evitare questa situazione perché porterebbe a distruzione del sistema.

Risposta in frequenza con W con poli semplici in $\pm j\omega$, rimanenti poli asintoticamente stabili, e $u(t)$ seno con una diversa frequenza $\overline{\omega}$

$$y_{f,\text{regime}}(t) = R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + R_2 \cos(\overline{\omega} t + \varphi_2)\, \overline{\omega} \simeq \omega \implies \text{"battimenti"!}$$



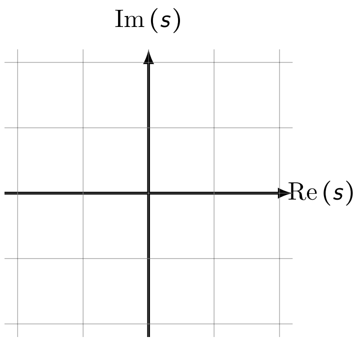
notes

- In questo caso abbiamo due modi oscillanti: uno alla frequenza naturale del sistema ω, e uno alla frequenza di forzamento $\overline{\omega}$.
- R_1, R_2, φ_1 e φ_2 dipendono da $W(s)$. Anche qui si trovano con la scomposizione in fratti semplici.
- Quando le due frequenze sono vicine ma non uguali, si osserva il fenomeno dei battimenti, molto familiare ai musicisti.
- Per approfondire il fenomeno dei battimenti, potete dare un'occhiata a questa pagina: `https://it.wikipedia.org/wiki/Battimenti_(musica)`
- È un bell'esempio di come concetti astratti della teoria dei controlli abbiano applicazioni concrete in altri campi!

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc

ingressi considerati in questo caso:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[\delta^{(-k)}\right](s) = \frac{1}{s^k}$$

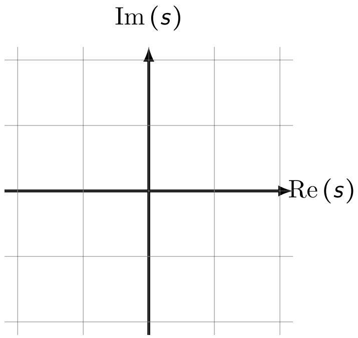


notes

- Ora generalizziamo ulteriormente considerando ingressi polinomiali: gradino ($k = 1$), rampa ($k = 2$), rampa parabolica ($k = 3$), etc.
- Questi segnali sono importanti perché spesso i riferimenti che vogliamo inseguire hanno questo andamento.
- Per esempio, se vogliamo che un robot si muova a velocità costante, stiamo dando una rampa come riferimento di posizione.

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc

Ipotesi: $W(s)$ FDT razionale propria con tutti i poli asintoticamente stabili tranne *potenzialmente* un polo nell'origine con molteplicità ℓ



notes

- Attenzione: qui *non* assumiamo più che $W(s)$ sia BIBO stabile!
- Permettiamo poli nell'origine (integatori), che sono molto comuni nei sistemi di controllo.
- ℓ è chiamato "tipo" del sistema e indica quanti integatori ha il sistema.

Forma di Bode

$$W(s) = \frac{K_B}{s^\ell} \frac{\prod_k (sT_k + 1)}{\prod_k \left(s\overline{T}_k + 1\right)} = \frac{K_B}{s^\ell} \overline{W}(s)$$

Note:

- $\overline{W}(s)$ = BIBO stabile
- $\overline{W}(0) = 1$
- K_B e' chiamato *guadagno di Bode*

notes

- La forma di Bode è una rappresentazione molto comoda che isola il guadagno e gli integatori dal resto della funzione di trasferimento.
- $\overline{W}(s)$ contiene tutti i poli e zeri a parte reale negativa e ha guadagno unitario in continua.
- K_B è una costante che determina l'ampiezza della risposta a regime.

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{K_B}{s^{\ell+k}}\overline{W}(s)$$

con Y_f strettamente propria $\implies$ termine piu' significativo

$$y_{f,\text{regime}}(t) = K_B \delta^{(-\ell-k)}(t)$$

notes

- Il risultato è elegante: a regime, l'uscita sarà dello stesso tipo dell'ingresso, ma con ordine aumentato di ℓ (il numero di integatori).
- L'ampiezza è determinata dal guadagno di Bode K_B.
- Per esempio, se $\ell = 1$ (un integratore) e l'ingresso è un gradino ($k = 1$), l'uscita a regime sarà una rampa.

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc - conti precisi

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = W(s)\frac{1}{s^k} = \frac{K_B}{s^{l+k}}\overline{W}(s)$$

$$Y_f(s) = \sum_{j=1}^{l+k} \alpha_j \frac{1}{s^j} + \sum_{ij} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

dove p_i sono i poli di $\overline{W}(s)$ e hanno $\mathrm{Re}[p_i] < 0$

$$y_f(t) = \sum_{j=1}^{l+k} \frac{\alpha_j}{(j-1)!} t^{j-1} + \text{vanishing terms}$$

notes

- Ecco la scomposizione completa: abbiamo termini polinomiali (dai poli nell'origine) e termini esponenziali decadenti (dai poli a parte reale negativa).
- A regime, solo il termine di ordine più alto della parte polinomiale sopravvive.

Risposta a regime per il caso gradino, rampa, rampa parabolica, etc - conti precisi

termine più significativo:

$$y_f(t) \simeq \frac{\alpha_{l+k}}{(l+k-1)!} t^{l+k-1} \quad \alpha_{l+k} = s^{l+k} Y_f(s)\big|_{s=0} = K_B$$

$$y_f(t) \simeq \frac{K_B}{(l+k-1)!} t^{l+k-1} = K_B \delta^{(-k-l)}(t)$$

La risposta e' dello stesso tipo dell'ingresso con ordine aumentato di l (tipo del sistema) e amplificata di K_B. Se $k+l \leq 0$, allora $Y_f(s)$ non ha poli nell'origine e quindi la sua antitrasformata contiene solo modi convergenti a zero.

notes

- Il termine dominante è quello con la potenza più alta di t, che corrisponde al polo nell'origine con molteplicità più alta.
- Se $k+l \leq 0$, significa che non ci sono poli nell'origine e quindi la risposta a regime è zero (tutti i termini decadono).
- Questo caso si verifica quando il sistema ha abbastanza integatori da "inseguire" perfettamente il segnale di ingresso.

Self-assessment material

notes

Question 1

Un sistema LTI BIBO stabile ha funzione di trasferimento $W(s)$. Se all'ingresso viene applicato un segnale sinusoidale $u(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, quale sarà la risposta forzata a regime?

Potential answers:

I: **(wrong)** $|W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi)$
II: **(correct)** $|W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$
III: **(wrong)** $W(0) \cos(\omega t + \varphi)$
IV: **(wrong)** $\cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

La risposta corretta è $|W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$. - Risposta a regime 2
Per un sistema LTI BIBO stabile con funzione di trasferimento $W(s)$, quando l'ingresso è una sinusoide $u(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, la risposta forzata a regime sarà ancora una sinusoide alla stessa frequenza ω, ma con ampiezza moltiplicata per $|W(j\omega)|$ e fase incrementata di $\angle W(j\omega)$.
L'opzione che usa $W(0)$ è errata perché il guadagno statico si applica solo per $\omega = 0$ (caso del gradino). L'opzione senza modifica dell'ampiezza ignora l'effetto

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 2

Un sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ BIBO stabile riceve in ingresso un gradino unitario $u(t) = 1$ per $t \geq 0$. Qual è la risposta forzata a regime?

Potential answers:

I: **(wrong)** $\lim_{t\to\infty} W(t)$
II: **(wrong)** $W(1)$
III: **(correct)** $W(0)$
IV: **(wrong)** $\lim_{s\to 0} sW(s)$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

La risposta corretta è $W(0)$.
Quando un sistema BIBO stabile riceve in ingresso un gradino unitario, la risposta forzata a regime è pari al guadagno statico del sistema, ovvero $W(0)$. Questo risultato si ottiene dal calcolo del residuo nel polo $s = 0$ della funzione $Y_f(s) = W(s)\frac{1}{\ldots}$ - Risposta a regime 3

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 3

Considerando un sistema marginalmente stabile con poli semplici in $\pm j\omega_0$ e rimanenti poli asintoticamente stabili, cosa accade quando si applica un ingresso sinusoidale $u(t) = \cos(\omega_0 t)$ alla stessa frequenza dei poli marginalmente stabili?

Potential answers:

I: **(wrong)** L'uscita è una sinusoide alla frequenza ω_0 con ampiezza costante
II: **(wrong)** L'uscita diverge esponenzialmente
III: **(wrong)** L'uscita è una somma di sinusoidi a frequenze ω_0 e $2\omega_0$
IV: **(correct)** L'uscita contiene un termine proporzionale a $t\cos(\omega_0 t + \varphi)$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

La risposta corretta è che l'uscita contiene un termine proporzionale a $t\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
Quando si eccita un sistema con poli marginalmente stabili $\pm j\omega_0$ con un segnale sinusoidale alla stessa frequenza ω_0, si verifica il fenomeno di risonanza. L'uscita a regime contiene un termine della forma $R_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + R_2 t\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$ dove il secondo termine cresce linearmente con il tempo. Questo è dovuto alla coincidenza tra la frequenza dell'ingresso e la frequenza naturale del sistema, che

- Risposta a regime 4

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 4

Un sistema ha funzione di trasferimento nella forma di Bode $W(s) = \frac{K_B}{s^\ell}\overline{W}(s)$ dove $\overline{W}(s)$ è BIBO stabile con $\overline{W}(0) = 1$. Se tale sistema riceve in ingresso una rampa $u(t) = t$ per $t \geq 0$, quale sarà la risposta forzata a regime?

Potential answers:

I: **(wrong)** $K_B \cdot t$
II: **(wrong)** $K_B \cdot t^\ell$
III: **(correct)** $K_B \cdot \frac{t^{\ell+1}}{\ell!}$
IV: **(wrong)** $\frac{K_B}{\ell+1} \cdot t^{\ell+1}$
V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

- Risposta a regime 5

La risposta corretta è $K_B \cdot \frac{t^{\ell+1}}{\ell!}$.

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Question 5

Un sistema ha una funzione di trasferimento con poli semplici in $\pm j\omega_0$ e rimanenti poli asintoticamente stabili. Se si applica un ingresso sinusoidale $u(t) = \cos(\bar{\omega} t)$ con $\bar{\omega} \approx \omega_0$ ma $\bar{\omega} \neq \omega_0$, quale fenomeno si osserva nella risposta a regime?

Potential answers:

- I: **(correct)** Battimenti, dovuti alla sovrapposizione di sinusoidi con frequenze vicine
- II: **(wrong)** Risonanza, con divergenza lineare dell'ampiezza nel tempo
- III: **(wrong)** Attenuazione progressiva dell'ampiezza del segnale in uscita
- IV: **(wrong)** Filtraggio completo del segnale in ingresso
- V: **(wrong)** I do not know

Solution 1:

La risposta corretta è il fenomeno dei battimenti.
Quando un sistema con poli marginalmente stabili in $\pm j\omega_0$ viene eccitato da un segnale sinusoidale con frequenza $\bar{\omega}$ vicina ma non identica a ω_0, la risposta a regime contiene due componenti sinusoidali: una alla frequenza naturale del sistema ω_0 e una alla frequenza di eccitazione $\bar{\omega}$. La sovrapposizione di queste due sinusoidi con frequenze vicine genera il fenomeno dei battimenti, caratterizzato da

notes

- see the associated solution(s), if compiled with that ones :)

Recap of the module "Risposta a regime"

- la risposta in frequenza e' il concetto piu' importante

notes

- Il concetto più importante di questo modulo è senza dubbio la risposta in frequenza, che ci dice come un sistema modifica ampiezza e fase delle sinusoidi a regime.
- Ricordate: per sistemi LTI stabili, sinusoidi in ingresso producono sinusoidi alla stessa frequenza in uscita, con ampiezza e fase modificate.
- Abbiamo anche visto come generalizzare questi concetti a segnali polinomiali (gradino, rampa, etc.) attraverso la forma di Bode.