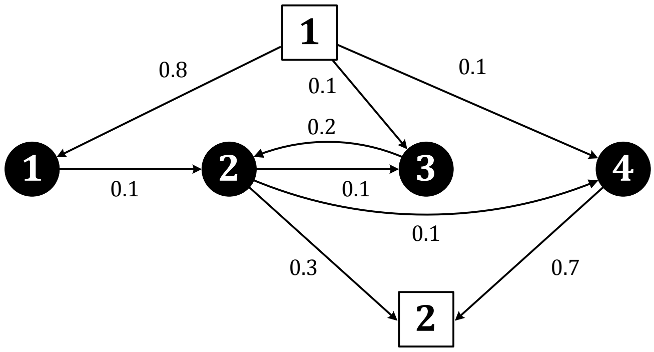
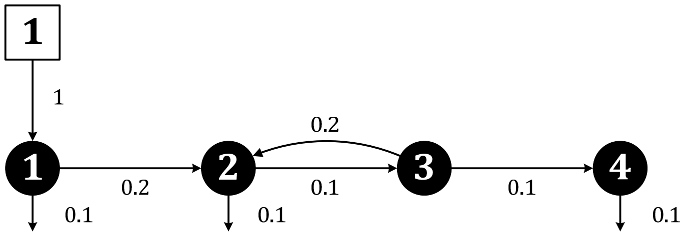


Soluzioni dei Problemi di modellistica

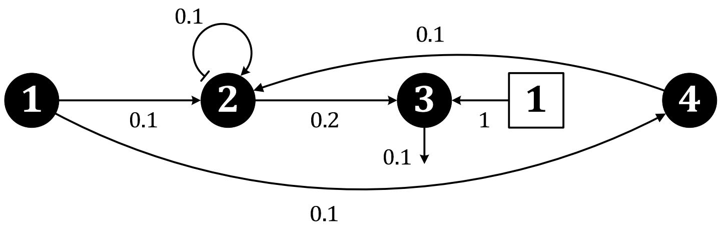
(1.)

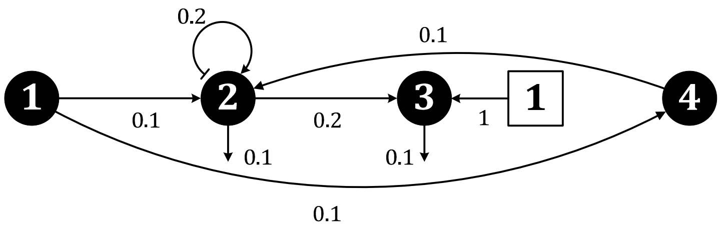


(2.)

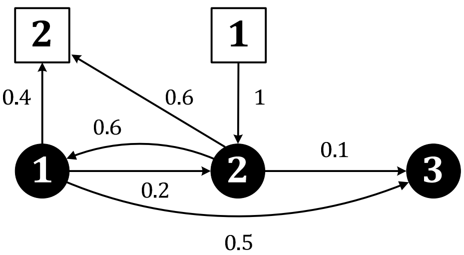


(3.) Due possibili grafi di trasferimento sono i seguenti

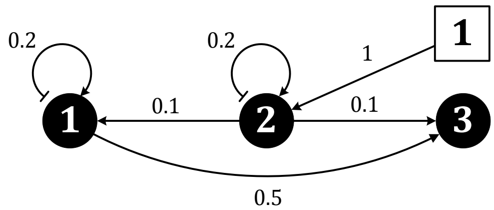


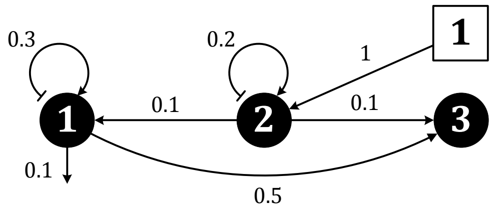


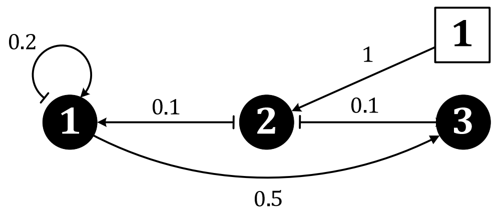
(4.)



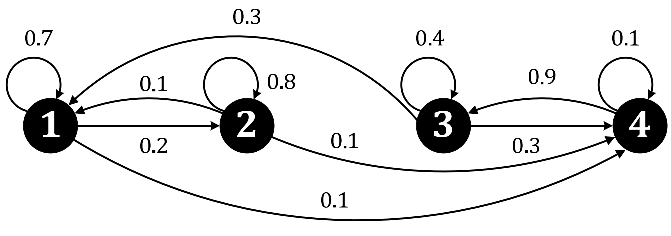
(5.) Tre possibili grafi di trasferimento sono i seguenti







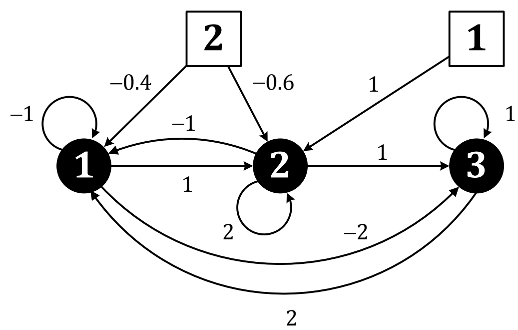
(6.)



(7.) Perché la somma degli elementi della seconda colonna è maggiore di uno.

(8.) La matrice può descrivere un modello di flusso continuo o un modello di influenza

(9.)



(10.) $A = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.1 & -0.3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(11.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0.4 & -1 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$

(12.) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

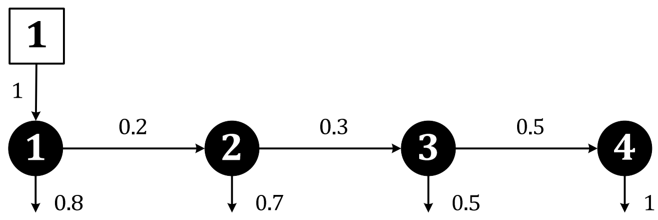
(13.) $A = \frac{1}{600}\begin{pmatrix} 18 & 273 & 188 & 273 & 18 \\ 188 & 18 & 18 & 273 & 18 \\ 188 & 273 & 18 & 18 & 273 \\ 188 & 18 & 188 & 18 & 273 \\ 18 & 18 & 188 & 18 & 18 \end{pmatrix}$

(14.) $A = \frac{1}{600}\begin{pmatrix} 18 & 120 & 188 & 188 & 18 \\ 188 & 120 & 18 & 188 & 18 \\ 188 & 120 & 18 & 188 & 273 \\ 188 & 120 & 188 & 18 & 273 \\ 18 & 120 & 188 & 18 & 18 \end{pmatrix}$

(15.) La popolazione complessiva è in espansione (R=1.038).

(16.) $p_e = 5$ e tale prezzo non viene raggiunto sul lungo periodo.

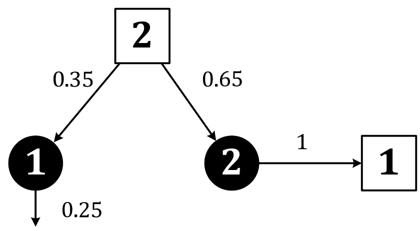
(17.) Il fenomeno descritto è ben modellato mediante un sistema a tempo discreto e, in particolare, da un modello di decisione. La ragione di questa scelta è dovuta al fatto che nel fenomeno è chiaramente presente un momento particolare indicato come "all'inizio di ogni mese" nel quale gli eventi rilevanti ai fini del modello si verificano (e cioè immissione nel magazzino di merce appena prodotta, prelievo di merce da vendere e distruzione dell'invenduto). La merce appena prodotta che entra nel magazzino è certamente una variabile indipendente in quanto essa è una quantità che non dipende dalla risorsa contenuta nel magazzino ma è una immissione di risorsa che proviene dal mondo esterno. Per quanto riguarda la scelta delle variabili di stato queste rappresenteranno la quantità di merce presente nel magazzino da meno di un mese dopo k mesi – $x_1(k)$, la merce presente nel magazzino da più di un mese ma meno di due – $x_2(k)$, la merce presente nel magazzino da più di due mesi ma meno di tre – $x_3(k)$, la merce presente nel magazzino da più di tre mesi ma meno di quattro – $x_4(k)$. Il fenomeno descritto è un modello a struttura d'età in quanto viene richiesto di modellare l'età (in termini di mesi dalla produzione) di una popolazione di oggetti (beni prodotti). Ogni mese, ciascun pezzo prodotto nella classe i passerà nella classe successiva $i+1$ se non viene venduto. Pertanto, la frazione di merce che, ogni mese, andrà a finire – per esempio – nella seconda classe d'età sarà proprio l'invenduto e cioè una frazione pari a $1-0.8=0.2$ di quella della classe precedente. Analogamente si calcolano gli altri coefficienti. Inoltre, per quanto riguarda l'ultima classe d'età, poiché tutta la risorsa in essa contenuta lascia il sistema (magazzino) l'informazione che il 30% viene venduta è irrilevante ai fini del modello in quanto ciò che interessa è che la merce è uscita dal magazzino e non il suo destino finale (vendita o distruzione). Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

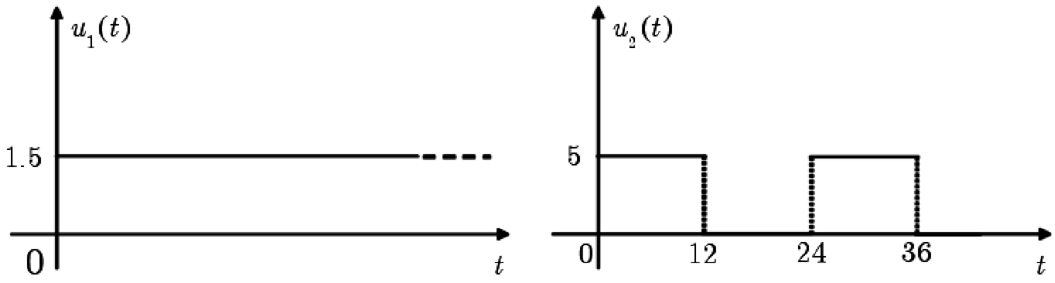
(18.) Il fenomeno descritto è ben modellato mediante un sistema a tempo continuo e, in particolare, da un modello di flusso continuo. La ragione di questa scelta è dovuta al fatto che l'evento rilevante ai fini del modello è la distruzione dei rifiuti. Tale fenomeno è ovviamente distribuito nel tempo, nel senso che non esistono istanti specifici nei quali il sistema cambia di stato (cioè vengono inceneriti i rifiuti) in quanto il fenomeno avviene con continuità nel tempo ad una velocità costante. Le variabili di stato sono la quantità $x_1(t)$ di vetro all'interno dell'impianto al tempo t e la quantità $x_2(t)$ dei rifiuti da distruggere contenuti all'interno dell'impianto al tempo t. Il flusso di vetro verso l'esterno deve essere modellato da una perdita in quanto questo dipende dalla quantità di risorsa a monte mentre, al contrario, il flusso di rifiuti distrutti deve essere modellato da una variabile indipendente in quanto tale flusso è costante e quindi non dipende dalla quantità di rifiuti contenuti nell'inceneritore. Il grafo di trasferimento è il seguente



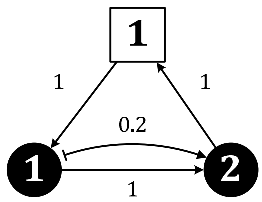
e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0.35 \\ -1 & 0.65 \end{pmatrix}$$

Infine, l'andamento temporale delle variabili indipendenti è il seguente



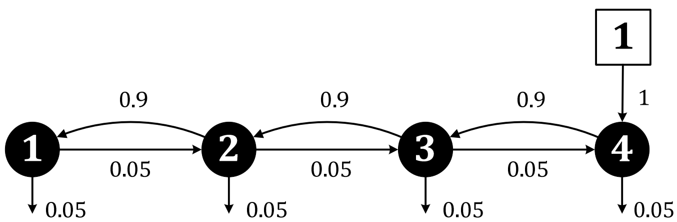
(19.) Il modello è un modello di decisione. Le variabili di stato sono: $x_1(k)$ che rappresenta il valore del materiale in lavorazione e $x_2(k)$ che rappresenta il capitale posseduto dalla ditta. La variabile indipendente $u_1(k)$ rappresenta il valore del materiale necessario per soddisfare gli ordini ricevuti dalla ditta. Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

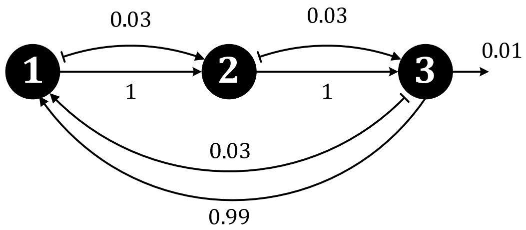
(20.) Il fenomeno descritto è ben modellato mediante un sistema a tempo discreto e, in particolare, da un modello di decisione. Infatti, gli eventi rilevanti ai fini del fenomeno avvengono in un preciso momento (e cioè ogni anno al momento del rinnovo della polizza) e tale momento è uguale per tutti i clienti. Il problema, nella sua formulazione verbale, struttura la clientela in 4 classi (categorie). Le variabili di stato saranno quindi proprio 4 e indicheranno il numero di clienti in ciascuna categoria nell'anno k. I clienti che provengono dall'esterno sono proprio i nuovi clienti che quindi sono rappresentati dalla variabile indipendente $u_1(k)$. Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

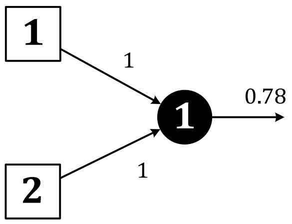
(21.) Il modello è un modello di decisione. Le variabili di stato sono: $x_1(k)$ che rappresenta il valore del capitale durante gli anni 1,4,7,…, $x_2(k)$ che rappresenta il valore del capitale durante gli anni 2,5,8,… e $x_3(k)$ che rappresenta il valore del capitale durante gli anni 3,6,9,…. Il grafo di trasferimento è il seguente



e la matrice di sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.02 \\ 1.03 & 0 & 0 \\ 0 & 1.03 & 0 \end{pmatrix}$$

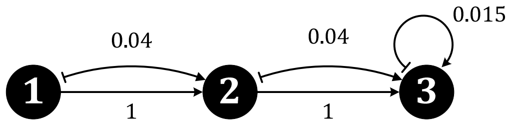
(22.) Il modello è un modello di flusso continuo. La variabile di stato $x_1(t)$ rappresenta il numero di bagagli in sosta nel deposito. Le variabili indipendenti $u_1(t) = 684.93 \cdot 0.6$ bagagli/ora e $u_2(t) = 833.33 \cdot 0.98 \cdot 1.7$ bagagli/ora rappresentano, rispettivamente, il flusso costante di bagagli da stiva provenienti da voli interni e da voli internazionali. Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono:

$$A = -0.78, B = (1 \quad 1)$$

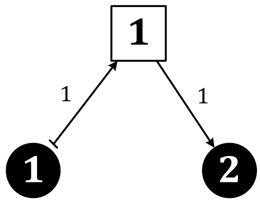
(23.) Il modello è un modello di decisione. Le variabili di stato sono: $x_1(k)$ che rappresenta il valore del capitale durante il primo anno, $x_2(k)$ che rappresenta il valore del capitale durante il secondo anno e $x_3(k)$ che rappresenta il valore del capitale durante i restanti otto anni, assumendo che il fondo abbia una durata decennale. Il grafo di trasferimento è il seguente



e la matrice di sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.04 & 1.015 \end{pmatrix}$$

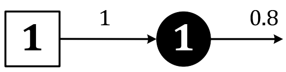
(24.) Il modello è un modello di flusso continuo. Le variabili di stato sono: $x_1(t)$ che rappresenta il numero di byte presenti nel computer e $x_2(t)$ che rappresenta il numero di byte presenti sul supporto ottico. Per modellare il trasferimento a flusso costante è necessario introdurre una variabile indipendente $u_1(t) = 7800$ KB/sec. Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

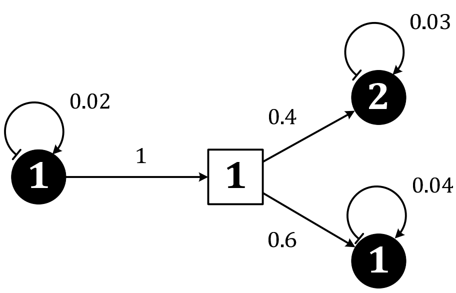
(25.) Il modello è un modello di flusso continuo. La variabile di stato $x_1(t)$ rappresenta il numero di automobili in coda al casello e la variabile indipendente $u_1(t)$ rappresenta il flusso di auto in ingresso al casello. Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono:

$$A = -0.8, B = 1$$

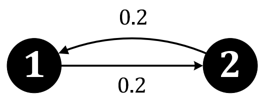
(26.) Il modello è un modello di decisione. Le variabili di stato sono: $x_1(k)$ che rappresenta il capitale nel conto corrente, $x_2(k)$ che rappresenta il capitale investito in titoli di stato e $x_3(k)$ che rappresenta il capitale investito in azioni. Per modellare il trasferimento di denaro è necessario introdurre una variabile indipendente $u_1(k)$. Il grafo di trasferimento è il seguente



e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1.03 & 0 \\ 0 & 0 & 1.04 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

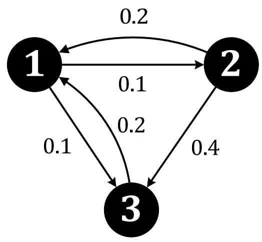
(27.) Il fenomeno descritto è ben modellato mediante un sistema a tempo discreto e, in particolare, da un modello di decisione. Infatti, gli eventi rilevanti ai fini del fenomeno avvengono in un preciso momento (e cioè all'inizio di ciascun mese) e tale momento è uguale per tutti. Le variabili di stato sono due. La prima variabile, $x_1(k)$ indica il numero di clienti posseduti dall'azienda A al mese k mentre $x_2(k)$ rappresenta il numero di clienti posseduti dalle altre aziende, cioè B e C. Non sono definite variabili indipendenti. Il grafo di trasferimento è il seguente



e la matrice di sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

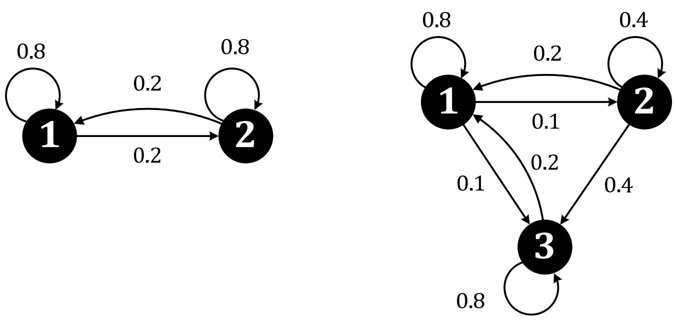
(28.) In questo caso, le variabili di stato sono tre e rappresentano, nell'ordine, i clienti dell'azienda A, B e C. Il grafo di trasferimento è il seguente



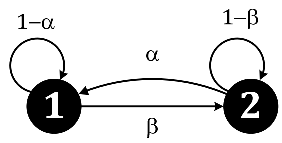
e la matrice di sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

(29.) In questo caso il modello è un modello di transizione tra stati e le variabili di stato sono, rispettivamente, la probabilità che un cliente appartenga all'azienda A, B o C. Le matrici di sistema restano le stesse, mentre i grafi di transizione sono i seguenti:



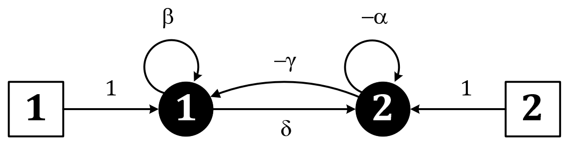
(30.) Il modello è un modello d'influenza a tempo discreto. Le variabili di stato rappresentano, rispettivamente, la domanda dei sindacati e l'offerta del governo. Il grafo di influenza è il seguente



e la matrice di sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

(31.) Le variabili di stato rappresentano, rispettivamente, il numero di criminali e di poliziotti. Le variabili indipendenti rappresentano invece il flusso di nuovi criminali e di nuovi poliziotti. Il grafo di influenza è il seguente



e le matrici di sistema sono

$$A = \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \delta & -\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove α, β, γ e δ sono costanti positive.

(32.) $x_1(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C_1, $x_2(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C_2, $x_3(t)$ è la corrente nell'induttore L, $u_1(t)$ è la tensione del generatore indipendente. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/C_1 \\ 0 & -1/(RC_2) & -1/C_2 \\ -1/L & 1/L & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(RC_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(33.) $x_1(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C, $x_2(t)$ è la corrente nell'induttore L, $u_1(t)$ è la tensione del generatore indipendente. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} -1/(R_1C) & 0 \\ g_m R_2/L & -R_2/L \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/(R_1C) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(34.) $x_1(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C_1, $x_2(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C_2, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono le tensioni dei generatori indipendenti. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} -(R_1+R_2)/(R_1R_2C_1) & 1/(R_2C_1) \\ 1/(R_2C_2) & -1/(R_2C_2) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/(R_1C_1) & -(R_1+R_2)/(R_1R_2C_1) \\ 0 & 1/(R_2C_2) \end{pmatrix}$$

(35.) $x_1(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C, $x_2(t)$ è la corrente nell'induttore L, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono le correnti dei generatori indipendenti. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} -1/(R_2C) & -1/C \\ 1/L & -R_1/L \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/C & 1/C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(36.) $x_1(t)$ è la tensione ai capi del condensatore C, $x_2(t)$ è la corrente nell'induttore L, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono, rispettivamente, la tensione e la corrente dei generatori indipendenti. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} -1/(R_1C) & -1/C \\ 1/L & -R_2/L \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1/(R_1C) & 0 \\ 0 & -R_2/L \end{pmatrix}$$

(37.) $x_1(t)$ è lo spostamento della massa lungo il piano inclinato, $x_2(t)$ è la sua velocità e $u_1(t)$ è l'accelerazione di gravità. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(38.) La ruota rotola senza strisciare per cui la distanza percorsa lungo il piano inclinato è pari alla rotazione del disco moltiplicata per il suo raggio. Le variabili di stato sono quindi solo due: $x_1(t)$ che rappresenta lo spostamento del baricentro della ruota lungo il piano inclinato, ed $x_2(t)$ che rappresenta la sua velocità. La variabile indipendente $u_1(t)$ è l'accelerazione di gravità. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -kr^2/(2J) & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(39.) La fune non striscia sulla carrucola per cui la distanza percorsa dalla massa è pari alla rotazione della carrucola moltiplicata per il suo raggio. Le variabili di stato sono quindi solo due: $x_1(t)$ che rappresenta lo spostamento della massa lungo la verticale ed $x_2(t)$ che rappresenta la sua velocità. La variabile indipendente $u_1(t)$ è l'accelerazione di gravità. Le matrici sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$