SEGNALI E SISTEMI
Autovalutazione
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
29 aprile 2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Siano dati tre sistemi a tempo continuo identificati dalla relazioni ingresso-uscita

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= 2\int_{t-2}^{t+2} x(u)e^{u-t}\,du - x(t+2)\\
y_2(t) &= 1(t-2)\int_{-1}^{t-2} x(u)\cos(t-u)\,du + 3\,x(t-1)\\
y_3(t) &= \int_{t-1}^{2t+1} x(u)\,e^{t-u}\,du - x(t-2)
\end{aligned}
$$

Si chiede di:

1. Indicare quale tra questi sistemi è lineare tempo-invariante (LTI, un filtro), giustificando opportunamente la risposta.
2. Per il sistema LTI, identificare quindi la risposta impulsiva, dire se è BIBO stabile e/o causale, e calcolare l'uscita con ingresso $x(t) = \mathrm{rect}(t/4)$.

Soluzione. 1) L'unico sistema LTI è il primo, che infatti si può scrivere nella forma

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cdot 2\,\mathrm{rect}(\tfrac{t-u}{4})\,e^{-(t-u)}\,du -\, x(t+2)$$

in cui la risposta impulsiva risulta essere

$$g_1(t) = 2\,\mathrm{rect}(\tfrac{t}{4})\,e^{-t} - \delta(t+2)$$

Il secondo sistema non è LTI in quanto, sebbene si possa scrivere come una convoluzione, ovvero

$$y_2(t) = 1(t-2)\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,1(u+1)\cdot\cos(t-u)\,1(t-u-2)\,du + 3x(t-1)\ ,$$

il prodotto $x(u)\,1(u+1)$ implica la non tempo-invarianza del sistema. Il terzo sistema, invece, non è tempo invariante a causa della presenza del termine $2t$ nell'integrale.

2) Per il primo sistema, essendo la risposta impulsiva $g_1(t)$ assolutamente integrabile, si ha BIBO stabilità (il delta è sicuramente integrabile, mentre $\mathrm{rect}(\frac{t}{4})\,e^{-t}$ è un segnale ad ampiezza e estensione limitata, e pertanto anch'esso

assolutamente integrabile). Il calcolo dell'uscita si può fare agevolmente sfruttando la convoluzione con la risposta impulsiva, ovvero

$$y_1(t) = g_1 \star x(t) = 2h \star x(t) - x(t+2) \,, \qquad h(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{t}{4})\, e^{-t}$$

e pertanto basta calcolare la convoluzione $h \star x$. In questo caso, data l'identica estensione dei segnali in [-2,2], si ha

$$h \star x(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{t+2} e^{-u} du = e^2 - e^{-(t+2)} & -4 < t < 0 \\ \displaystyle\int_{t-2}^{2} e^{-u} du = e^{2-t} - e^{-2} & 0 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$y_1(t) = \begin{cases} 2(e^2 - e^{-(t+2)}) - 1 & -4 < t < 0 \\ 2(e^{2-t} - e^{-2}) & 0 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 2 – [punti 7]

Di un segnale $x(t)$ si sa che:

1. è periodico di periodo 2 e coefficienti di Fourier a_k;
2. è reale pari;
3. $\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)dt = -1$;
4. $\frac{1}{2}\int_{-1}^1 |x(t)|^2 dt = 11$;
5. $a_k = 0$ per $|k| > 2$
6. i coefficienti di Fourier b_{-2} e b_2 del segnale $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ sono $b_{-2} = -j2\pi$ e $b_2 = j2\pi$

Deterinare i segnali che soddisfano queste proprietà.

Soluzione. La condizione 1) implica che i coefficienti a_k sono associati alla pulsazione base $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. La condizione 2) implica che i coefficienti di Fourier sono reali ($a_k = a_k^*$) e pari ($a_k = a_{-k}$). Dalla condizione 3) si deduce che $a_0 = -1$. Dalla condizione 5) si ha quindi

$$a_k = \begin{cases} -1 & k = 0 \\ a_1 & k = \pm 1 \\ a_2 & k = \pm 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con a_1 e a_2 reali. Dalla condizione 6), utilizzando la proprietà della derivata, i coefficienti del segnale derivata $y(t) = x'(t)$ soddisfano la condizione $b_k = a_k \cdot jk\omega_0 = jk\pi\, a_k$, per cui, per $k = 2$, otteniamo $b_2 = j2\pi\, a_2 = j2\pi$, ovvero $a_2 = 1$ (lo stesso risultato si ha per $k = -2$). Il valore a_1 si ottiene sfruttando la condizione 4) ed il teorema di Parseval, ovvero

$$\begin{aligned} P_x = 11 &= |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 \\ &= 2|a_1|^2 + 3 \end{aligned}$$

da cui $a_1 = \pm 2$, ovvero

$$a_k = \begin{cases} -1 & k = 0 \\ \pm 2 & k = \pm 1 \\ 1 & k = \pm 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il segnale si può quindi ricostruire tramite serie di Fourier, per ottenere

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{jk\pi t} \\ &= -1 \pm 2(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}) + (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) \\ &= 1 \pm 4\cos(\pi t) + 2\cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Ci sono perciò 2 segnali che soddisfano le condizioni date.

Esercizio 3 – [punti 3]

Il segnale onda quadra

$$x(t) = \text{rep}_3 \text{rect}\left(\tfrac{t}{2}\right) \;,$$

è l'ingresso di un filtro LTI, la cui risposta in frequenza è

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le |\omega| \le \pi/3 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \pi/3 \le |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare luscita $y(t)$.

Soluzione. L'onda quadra ha duty cycle $d_0 = \frac{2}{3}$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. I coeffcienti di Fourier dell'onda quadra sono pertanto

$$a_k = \tfrac{2}{3}\text{sinc}\left(\tfrac{2}{3}k\right)$$

Dalla proprietà del filtraggio si ha

$$b_k = H(jk\omega_0) \cdot a_k$$

con

$$H(jk\omega_0) = H(jk\tfrac{2\pi}{3}) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & k = \pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ovvero il filtro lascia passare inalterata la componente constante (corrispondente a $k = 0$), amplifica di un fattore $2\pi/\sqrt{3}$ le prime armoniche ($k = \pm 1$, che hanno pulsazioni $\pm\frac{2\pi}{3}$) ed elimina tutte le altre. Di conseguenza, si ha

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{3} & k = 0 \\ \frac{2}{3}\mathrm{sinc}\left(\frac{2}{3}\right)\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 1 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Pertanto, utilizzando la serie di Fourier si ottiene

$$y(t) = \frac{2}{3} + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} = \frac{2}{3} + 2\cos(\frac{2\pi}{3}t)$$

SEGNALI E SISTEMI
Primo appello 2024
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo continuo definito dall'equazione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-2} e^{5(t-\tau)}\, x(\tau+2)\, d\tau + 3\, x(t-7)\ .$$

1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante e BIBO stabile, giustificando opportunamente le risposte [1 punto per ogni risposta corretta].
2. Calcolare la risposta impulsiva [2 punti].

Soluzione.

Il sistema non è statico in quanto non è possibile calcolare l'uscita al tempo t conoscendo l'ingresso solo al tempo t. Il sistema è causale, infatti, operando un cambio di variabile, $\alpha = \tau + 2$, si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{5(t-\alpha+2)}\, x(\alpha)\, d\alpha + 3\, x(t-7)$$

Il sistema è inoltre convoluzionale (LTI), infatti

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{5(t-\alpha+2)}\, u(t-\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha + 3\, x(t-7)$$

in cui $u(t) = 1(t)$ indica il gradino, con risposta impulsiva

$$h(t) = e^{5(t+2)}\, u(t) + 3\, \delta(t-7)\ .$$

Poiché $h(t)$ diverge per $t \to \infty$, il sistema non è BIBO stabile.

Esercizio 2 [punti 7]

Dato il sistema a tempo continuo con risposta impulsiva:

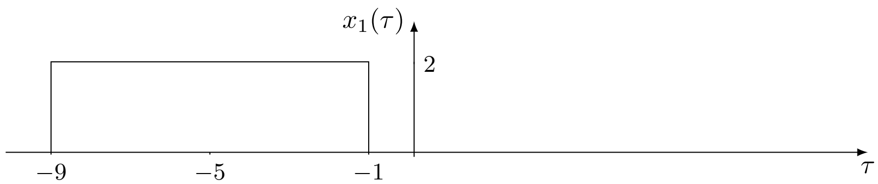
$$h(t) = \tfrac{1}{2} e^{-t/2}\, u(t)$$

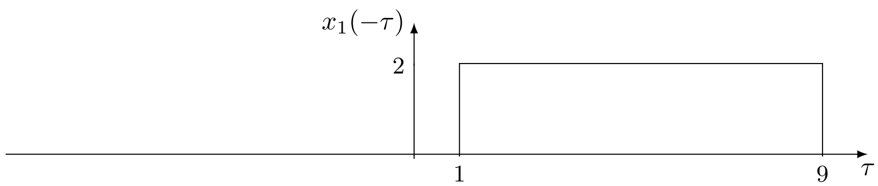
Trovare le uscite corrispondenti agli ingressi:

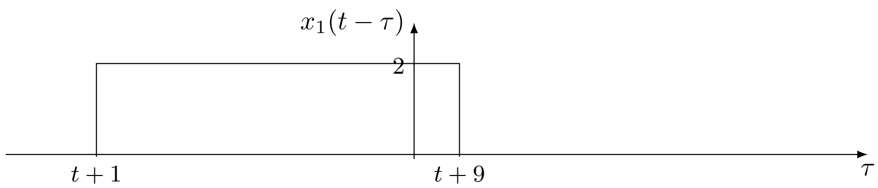
1. $x_1(t) = 2\,\mathrm{rect}(\frac{t+5}{8})$ [4 punti]
2. $x_2(t) = e^{j3t}$ [3 punti]

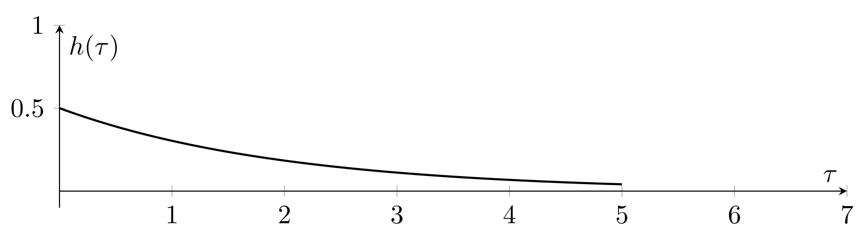
Soluzione.

1. Disegnando $x_1(\tau)$, $x_1(-\tau)$, $x_1(t-\tau)$ e $h(\tau)$ si ha









e pertanto il risultato della convoluzione (per integrazione) diventa

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < -9 \\ \int_0^{t+9} e^{-\tau/2}\, d\tau = 2 - 2e^{-\frac{t+9}{2}} & -9 \le t < -1 \\ \int_{t+1}^{t+9} e^{-\tau/2}\, d\tau = 2e^{-\frac{t+1}{2}} - 2e^{-\frac{t+9}{2}} & t \ge -1 \end{cases}.$$

2. La risposta in pulsazione del sistema è
$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-t/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{1+2j\omega}$$
Essendo l'ingresso un esponenziale complesso alla pulsazione $\omega = 3$, l'uscita si calcola come
$$y_2(t) = H(j3) \cdot e^{j3t} = \frac{1}{1+6j} \cdot e^{j3t} = \frac{1-6j}{37} \cdot e^{j3t}$$

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema LTI, causale con funzione di trasferimento:
$$H(s) = \frac{s^2+\alpha^2}{(s^2+9)(s+1)}$$
con α reale e positivo.

1. Trovare l'equazione differenziale associata al sistema [1 punto].
2. Dire per quali α il sistema è BIBO stabile [2 punti].
3. Si consideri $\alpha = 1$. Trovare la risposta impulsiva [3 punti].
4. Sempre per $\alpha = 1$, trovare un ingresso limitato che porga un'uscita illimitata, motivando la risposta [1 punto].

Soluzione.

1. Svolgendo la funzione di trasferimento
$$H(s) = \frac{s^2+\alpha^2}{s^3+s^2+9s+9}$$
si ha
$$y'''(t) + y''(t) + 9y'(t) + 9y(t) = x''(t) + \alpha^2 x(t) \ .$$
2. I poli sono $\pm j3$ e -1. Il poli immaginari rendono il sistema non BIBO-stabile, per cui affichè il sistema sia BIBO-stabile gli zeri devono cancellare quei poli. Per cui deve essere $\alpha = 3$
3. Nel caso $\alpha = 1$ si ha:
$$H(s) = \frac{s^2+1}{(s^2+9)(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$
e risolvendo si ottiene la scomposizione in fratti semplici
$$H(s) = \tfrac{1}{5}\frac{1}{s+1} + \tfrac{4}{5}\frac{s}{s^2+9} - \tfrac{4}{15}\frac{3}{s^2+9}$$
da cui
$$h(t) = \left(\tfrac{1}{5}e^{-t} + \tfrac{4}{5}\cos(3t) - \tfrac{4}{15}\sin(3t)\right) u(t)$$

4. I poli sono puramente immaginari. Per ottenere un'uscita illimitata usando un ingresso limitato bisogna sollecitare i poli puramente immaginari (con parte reale nulla). Per esempio $x(t) = \sin(3t)u(t)$ che ha trasformata di Laplace $\frac{3}{s^2+9}$ genera un'uscita forzata del tipo

$$y_f(t) = \big(c_1\, e^{-t} + c_2\, t\, \cos(3t) + c_3\, t\, \sin(3t) + c_4\, \cos(3t) + c_5\, \sin(3t)\big)\; u(t)$$

che diverge per $t \to \infty$.

Esercizio 4 [punti 3]

Dato il segnale $x(t) = 4\,\mathrm{sinc}^2(2t) \cdot \cos(2\pi t)$

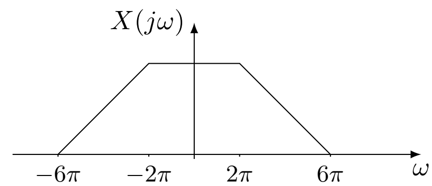
1. Calcolare e disegnare $X(j\omega)$ [2 punti].
2. Dire per quali passi di campionamento T_s è possibile ricostruire $x(t)$ dai suoi campioni $x(nT)$ [1 punto].

Soluzione.

1. La trasformata di Fourier risulta

$$X(j\omega) = \mathrm{triang}(\tfrac{\omega-2\pi}{4\pi}) + \mathrm{triang}(\tfrac{\omega+2\pi}{4\pi})$$

come illustrato in figura



2. $\omega_M = 6\pi$. Dal terorema di Shannon deve essere $\omega_s \geq 2\omega_M = 12$, da cui $T_s \leq \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6}$. In alternativa, si richiede che $6\pi < \pi/T_s$, che restituisce lo stesso risultato.

Esercizio 5 [punti 3]

Il segnale a tempo discreto

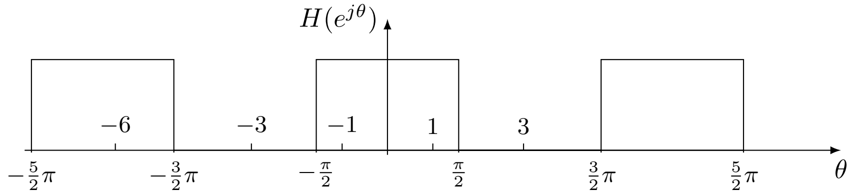
$$x(n) = \cos(n) + \sin(3n) + e^{-j6n}$$

viene filtrato da un filtro (a tempo discreto) passabasso ideale con risposta in frequenza $H(e^{j\theta})$, descritta nell'intervallo $\theta \in [-\pi, \pi]$ da:

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli l'uscita $y(n)$.

Soluzione. $H(e^{j\theta})$, estesa per periodicità, è rappresentata in figura.



Pertanto, il filtro annulla la sola componente del seno, ovvero:

$$y(n) = \cos(n) + e^{-j6n}$$

Esercizio 6 [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento `T`, siano contenuti nel vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```

SEGNALI E SISTEMI
Secondo appello 2024
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 Proprietà dei Sistemi– [punti 7]

Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione:

$$y(n) = \begin{cases} |x(n)| & n \neq 0 \\ x^2(n) & \text{n=0.} \end{cases}$$

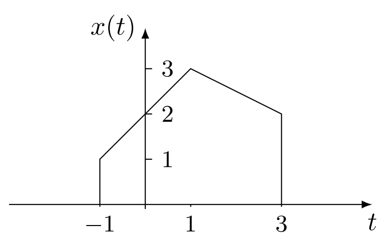
1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante e BIBO stabile [5 punti], giustificando opportunamente le risposte.
2. Calcolare la risposta impulsiva [1 punto].
3. Calcolare la risposta al gradino [1 punto].

Soluzione.

1. E' statico e quindi causale. Non è lineare perchè nè il modulo nè il quadrato sono funzioni lineari. Non è tempo-invariante a causa della condizione su n. E' chiaramente BIBO stabile.
2. La risposta impulsiva è $h(n) = \delta(n)$.
3. La risposta al gradino è $h_{-1}(n) = 1(n)$.

Esercizio 2 – Trasformata di Fourier [punti 7]

Si calcoli la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ del segnale $x(t)$ illustrato in figura [5 punti].



Quindi si disegni la sua ripetizione periodica [2 punti]

$$y(t) = \text{rep}_2 x(t) \ .$$

Soluzione. Sfruttando la regola di derivazione si ha

$$z(t) = x'(t) = \delta(t+1) + \mathrm{rect}(\tfrac{t}{2}) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-2)) - 2\delta(t-3)$$

la cui trasformata di Fourier è

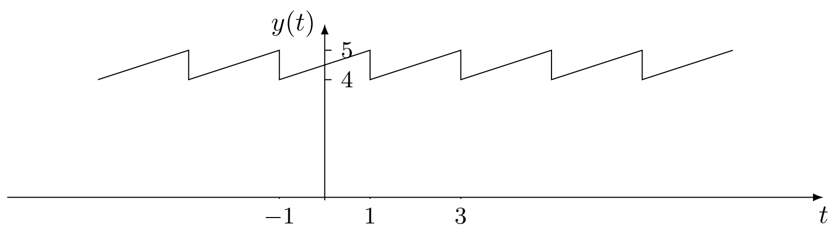
$$Z(j\omega) = e^{j\omega} + \mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi})\,\left(2 - e^{-2j\omega}\right) - 2e^{-3j\omega} = j\omega\,X(j\omega)$$

e invertendo la regola di derivazione si ottiene

$$X(j\omega) = \frac{e^{j\omega} + \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\,\left(2 - e^{-2j\omega}\right) - 2e^{-3j\omega}}{j\omega}$$

in cui non va sommato alcun contributo per $\omega = 0$ in quanto il valore medio di $x(t)$ è nullo.

Per il segnale periodizzato, esso è illustrato in figura,



Esercizio 3 – Trasformata Zeta [punti 7]

Dato il sistema LTI causale descritto dall'equazione alle differenz:

$$y(n) - y(n-2) = 3x(n) + x(n-1)$$

1. Determinare $H(z)$ [1 punto].
2. Dire se il sistema è BIBO-stabile [2 punti].
3. Trovare la risposta forzata all'ingresso $x(n) = (-1)^n \cdot 1(n)$ [4 punti].

Soluzione.

1. Per ispezione:

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1}}{1 - z^{-2}} = \frac{3 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

2. I poli sono $p_1 = 1$ e $p_2 = -1$. Essendo $|p_{1,2}| = 1$, il sistema non è BIBO-stabile.

3.
$$X(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}}$$
per cui
$$Y_f(z) = \frac{3 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})^2}$$
La scomposizione in fratti semplici porge
$$Y_f(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{(1 + z^{-1})^2} + \frac{1}{1 + z^{-1}}$$
la cui antitrasformata è
$$y_f(t) = 1(n) + (n+1)\,(-1)^n\,1(n) + (-1)^n\,1(n)$$

Esercizio 4 – Filtraggio [punti 3]

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e giustificare le risposte:

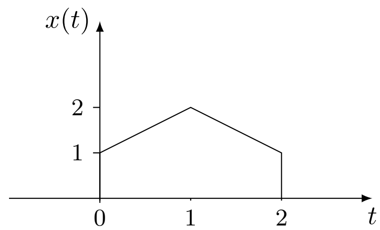
1. dato $x(t) = \cos(\frac{\pi}{3}t)$ esiste un sistema LTI che trasformi $x(t)$ in $y(t) = \sqrt(3)e^{j(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3})}$ [1.5 punti];
2. dato $x(t) = \text{sinc}(\frac{t}{2})$ esiste un sistema LTI che trasformi $x(t)$ in $y(t) = \text{sinc}(2t)$ [1.5 punti].

Soluzione.

1. Vera. Il segnale è la somma di due componenti, una alla pulsazione $\frac{\pi}{3}$ ed una alla pulsazione $-\frac{\pi}{3}$. Il filtro LTI può cancellare la componente alla pulsazione $\frac{\pi}{3}$ e modulare in ampiezza e sfasare l'altra.
2. Falsa. La trasformata di Fourier di $x(t)$ è $X(j\omega) = 2\,\text{rect}(\frac{\omega}{\pi})$, che ha estensione in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, mentre la trasformata di $y(t)$ è $Y(j\omega) = \frac{1}{2}\,\text{rect}(\frac{\omega}{4\pi})$ che ha estensione in $[-2\pi; 2\pi]$. Il filtro LTI può solo sopprimere, o modulare le pulsazioni già presenti nel segnale di ingresso, ma non crearne di nuove.

Esercizio 5 – [punti 3]

Sia dato il segnale



Si identifichino i coefficienti della serie di Fourier Y_k della sua ripetisione periodica
$$y(t) = \text{rep}_4 x(t)\ .$$

Soluzione Il segnale risulta

$$x(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-1)) + \mathrm{triang}(t-1)$$

con trasformata di Fourier

$$X(j\omega) = \left[2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi}) + \mathrm{sinc}^2(\tfrac{\omega}{2\pi})\right]\, e^{-j\omega}$$

e pertanto i coefficienti risultano

$$Y_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0)\ , \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \tfrac{1}{2}\pi$$

per cui

$$Y_k = \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{k}{2}) + \tfrac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{4})\right]\, e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

Esercizio Matlab [punti 3]

Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per calcolare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y); % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```

SEGNALI E SISTEMI
4 settembre 2024
Terzo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Trovare il/i segnale/i $x(t)$ che soddisfa/no le seguenti proprietà:

1. è reale e pari;
2. è periodico di periodo $T = 3$, e a energia finita sul periodo;
3. ha media pari a 5;
4. ha coefficienti di Fourier $a_k = 0$ per $k > 2$
5. $\frac{1}{3}\int_0^3 |x(t)|^2 dt = 45$
6. $\int_{-6}^{-3} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{3}t} dt = 9$

Soluzione. Dalla 2) si ricava che $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. Dalla 1) deduciamo che a_k è reale e pari ($a_k = a_k* = a_{-k}$). Dalla 4) si ha

$$a_k = \begin{cases} A & , k = 0 \\ B & , k = \pm 1 \\ C & , k = \pm 2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Dalla 3) sappiamo che $a_0 = A = 5$. Dalla 2) e dalla 6) si ottiene $a_1 = a_{-1} = B = \frac{9}{3} = 3$, dove va notato che l'integrale rappresenta il coefficiente di Fourier di ordine 1 a meno di un fattore $\frac{1}{T_p} = \frac{1}{3}$. Dalla 2) e dalla 5), per il teorema di Parseval si ha che

$$P_x = 45 = |A|^2 + 2|B|^2 + 2|C|^2 = 25 + 18 + 2|C|^2$$

da cui $C = a_2 = a_{-2} = \pm 1$. I segnali cercati sono quindi

$$x(t) = 5 + 6\cos(\tfrac{2\pi}{3}t) \pm 2\cos(\tfrac{4\pi}{3}t) \ .$$

Esercizio 2 [punti 7]

Dato il sistem LTI a tempo discreto con risposta impulsiva $h(n) = \frac{1}{3}\delta(n+1) - 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$ si chiede di:

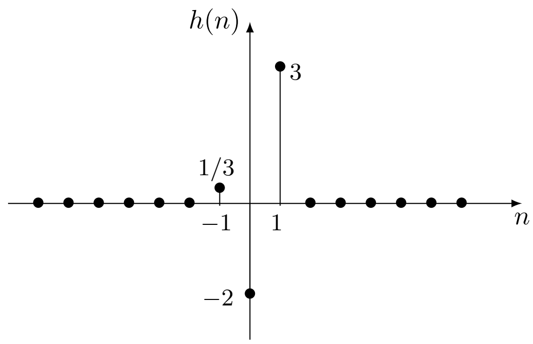
1. disegnare $h(n)$;
2. dire se il sitema è causale e BIBO stabile e giustificare la risposta;

3. dato il segnale di ingresso $x(n) = \mathrm{rect}(\frac{n-1}{5})$, disegnare $x(n)$ e trovare l'uscita corrispondente $y(n)$;

4. trovare l'uscita $z(n)$ corrispondente al segnale di ingresso $w(n) = \mathrm{rect}(\frac{n-2}{5})$.

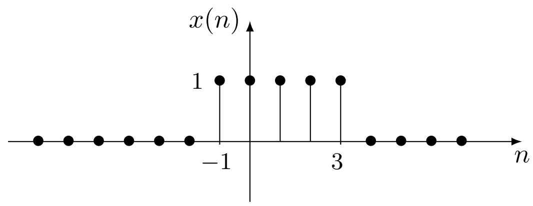
Soluzione.

1. Il segnale $h(n)$ è rappresentato in figura



2. Il sistema non è causale in quanto $h(n)$ non è identicamente nulla per $n < 0$. Il sistema è BIBO stabile poichè $h(n)$ è assolutamente sommabile.

3. il segnale $x(n)$ è mostrato in figura



La convoluzione pertanto diventa

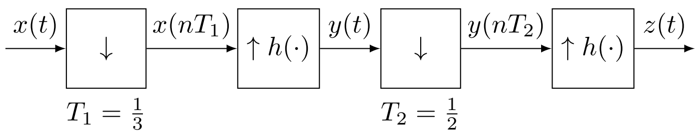
$$
\begin{aligned}
y(n) &= x * h(n) \\
&= x(n) * [\tfrac{1}{3}\delta(n+1) - 2\delta(n) + 3\delta(n-1)] \\
&= \tfrac{1}{3}x(n+1) - 2x(n) + 3x(n-1) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3} & , n = -2 \\ \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} & , n = -1 \\ \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} & , n = 0, 1, 2 \\ -2 + 3 = 1 & , n = 3 \\ 3 & , n = 4 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. essendo il segnale $w(n) = x(n-1)$, per la proprietà di tempo invarianza si ha

$$z(n) = y(n-1) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , n = -1 \\ \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} & , n = 0 \\ \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} & , n = 1, 2, 3 \\ -2 + 3 = 1 & , n = 4 \\ 3 & , n = 5 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 3 [punti 7]

Si consideri il seguente sistema, costituito dalla cascata di due sistemi di campionamento e interpolazione



in cui $h(t) = 2\,\text{sinc}(2t)$. Sapendo che $x(t) = \text{sinc}^2(2t)$ si chiede di:

1. identificare la trasformata di Fourier $Y(j\omega)$ di $y(t)$ e disegnarla;
2. identificare la trasformata di Fourier $Z(j\omega)$ di $z(t)$;
3. identificare il segnale di uscita $z(t)$.

Soluzione.

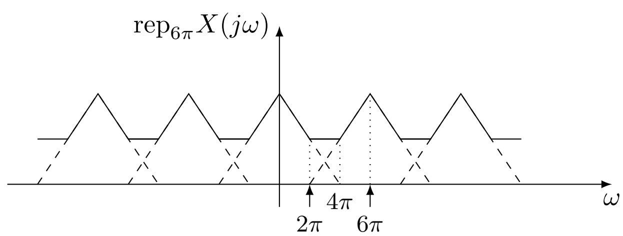
1. Dalla teoria conosciamo l'effetto nel dominio di Fourier della cascata campionamento/interpolazione, per la quale si ha

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \tfrac{1}{T_1} H(j\omega)\, \text{rep}_{\frac{2\pi}{T_1}} X(j\omega)\ , \qquad H(j\omega) = \text{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi})\ ,\ T_1 = \tfrac{1}{3} \\ &= 3\ \text{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi})\, \text{rep}_{6\pi} X(j\omega) \end{aligned}$$

Per capire l'effetto della trasformazione, partendo da

$$X(j\omega) = \tfrac{1}{2}\text{triang}(\tfrac{\omega}{4\pi})$$

si ha la condizione illustrata in figura



e pertanto nella zona di azione del filtro $H(j\omega)$ non si ha aliasing, ovvero

$$Y(j\omega) = 3H(j\omega)\,X(j\omega) = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi}) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi})\ .$$

2. Il secondo sistema di campionamento/interpolazione è un classico sistema di ricostruzione esatta per segnali con estensione in $\omega \in [-\frac{\pi}{T_2}, \frac{\pi}{T_2}] = [-2\pi, 2\pi]$, ad esempio per il segnale $y(t)$ e pertanto si ha

$$Z(j\omega) = Y(j\omega) = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi}) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi})\ .$$

3. Antitrasformando, si ottiene

$$z(t) = y(t) = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{sinc}(2t) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{sinc}^2(t)\ .$$

Esercizio 4 [punti 3]

Dato il sistema a tempo continuo, causale, descritto dall'equazione differenziale:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = a \cdot x'''(t) + x'(t) + x(t)$$

con a complesso, si chiede di:

1. dire per quale valore di a il sistema è BIBO stabile,
2. e per quel valore trovare la risposta impulsiva.

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{as^3 + s + 1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{as^3 + s + 1}{(s+2)(s+3)}$$

in cui il grado del numeratore non supera quello del denominatore (caso in cui non sono presenti fattori s, derivata, nella funzione di trasferimento) solo per $a = 0$. I poli sono in $s = -2$ed $s = -3$ quindi il sistema è BIBO stabile se e solo se $a = 0$.

2. Per $a = 0$ si ha

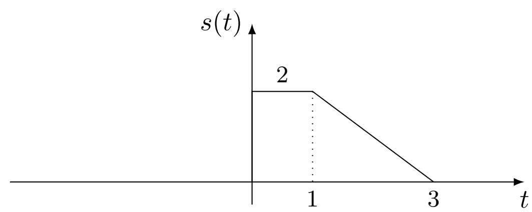
$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

da cui

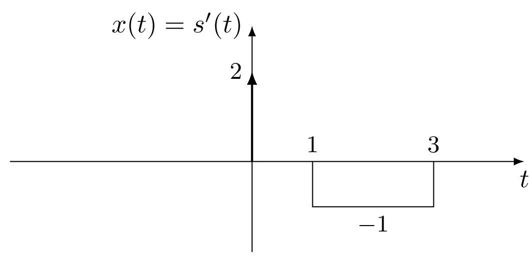
$$h(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})\,1(t)\ .$$

Esercizio 5 [punti 3]

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale



Soluzione. In questo caso si può procedere tramite regola di derivazione



in cui

$$x(t) = s'(t) = 2\delta(t) - \mathrm{rect}(\tfrac{t-2}{2})$$

e pertanto dalle regole della trasformata di Fourier si ottiene

$$X(j\omega) = 2 - 2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{2\omega}{2\pi})\,e^{-j\omega 2} = 2 - 2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi})\,e^{-j2\omega}\ .$$

e dalla regola di derivazione

$$S(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + 2\pi m_s \delta(\omega) = \frac{2 - 2\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\,e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

in quanto il segnale ha media $m_s = 0$.

Esercizio 6 [punti 3]

Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(j\omega)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(j\omega)$ in corrispondenza delle pulsazioni ω`=`ω_0`*(-N/2:N/2-1)` in cui ω_0 sia dato e pertanto sia noto il passo di campionamento nel tempo `T = 2*pi/(N*`ω_0`)`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
x = ifft(ifftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```