Tema 3

Es 1 $f(x) = x(\lg x)^4 + 2$

$D: \{x>0\} = (0,+\infty)$. Dato che $(\lg x)^4 \geq 0$ ho che $f(x) \geq 2 > 0$ $\forall x \in D$

non ho simmetrie né periodicità

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x(\lg x)^4}_{\downarrow 0} + 2 = 2$$

$x=0$ è singolarità eliminabile e la aggiungo al dominio $f(0)=2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\lg x)^4 + \frac{2}{x} = +\infty$$

NON HO ASINTOTO ORIZZONTALE NÉ OBLIQUO

f è continua nel dominio esteso

$$f'(x) = (\lg x)^4 + \cancel{x}\cdot 4(\lg x)^3\,\frac{1}{\cancel{x}} = (\lg x)^3\,[\lg x + 4]$$

per $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (\lg x)^3(\lg x+4) = +\infty$$

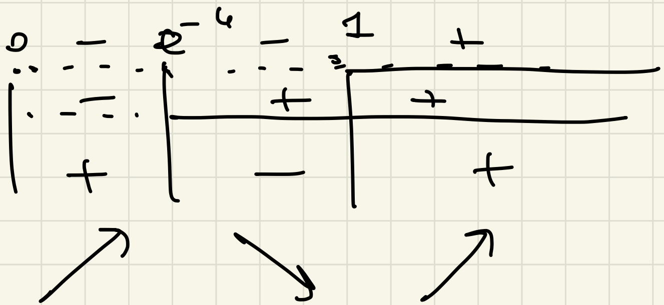
in $x=0$ ho attacco verticale

$$f'(x)\ge 0 \iff (\lg x)^3(\lg x+4)\ge 0$$

$(\lg x)^3 \ge 0 \iff x\ge 1$

$\lg x + 4 \ge 0 \iff x \ge e^{-4}$

$\lg x \ge -4 = \lg e^{-4}$



f è crescente in $(0, e^{-4})$ e $(1, +\infty)$

$x = e^{-4}$ è pto di massimo locale (NON ASSOLUTO)

$x=0$, $x=1$ sono pti di minimo locale e anche assoluto

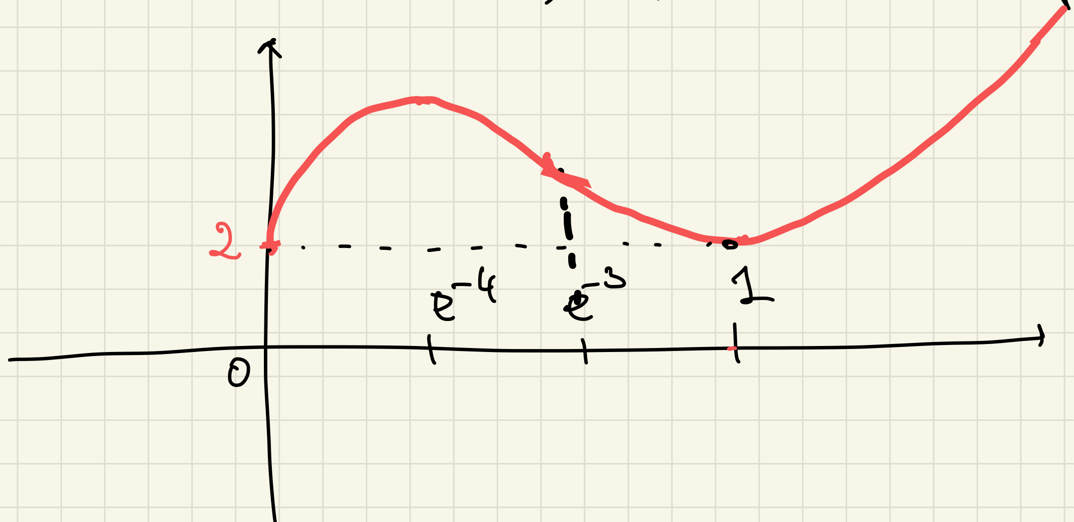
$$f(0) = f(1) = 0 \le f(x) \quad \forall x \in D.$$

$$f''(x) = 3(\lg x)^2 \frac{1}{x}\left[\lg x + 4\right] + (\lg x)^3 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= (\lg x)^2 \frac{1}{x}\left[3\lg x + 12 + \lg x\right] = \frac{4}{x}(\lg x)^2 \cdot \left[\lg x + 3\right]$$

$$f''(x) \geq 0 \iff \lg x + 3 \geq 0 \iff x \geq e^{-3}$$

f è convessa in $(e^{-3}, +\infty)$. $x = e^{-3}$ è p.to di flesso.



Es 2 : $\lg(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$$\frac{\lg(1+x^2) + 1 - e^{x^2}}{x^\alpha} = \frac{\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \cancel{+1} \cancel{-1} \cancel{-x^2} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha}$$

$$= \frac{-x^4 + o(x^4)}{x^\alpha} = \frac{x^4(-1+o(1))}{x^\alpha} \Rightarrow \begin{cases} -1 & \alpha = 4 \\ -\infty & \alpha > 4 \\ 0 & \alpha < 4 \end{cases}$$

Es 3 $\displaystyle\int_{\lg 3}^{\lg 4} \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\,dx = \left[y = e^x\right] = \int_3^4 \frac{\cancel{y}}{y^2 - 3y + 2} \frac{1}{\cancel{y}}\,dy$

$x = \lg y$

$dx = \frac{1}{y}\,dy$

Fratti semplici

$y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$

$$\frac{1}{y^2 - 3y + 2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{Ay - 2A + By - B}{(y-1)(y-2)}$$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -B \\ A = -1 \end{cases}$ $B = 1$

$$\int \frac{1}{y^2-3y+2}\,dy = -\int \frac{1}{y-1}\,dy + 1\int \frac{1}{y-2}\,dy = -\lg|y-1| + \lg|y-2| + c$$

$$= \lg\left|\frac{y-2}{y-1}\right| + c$$

$$\int_3^4 \frac{1}{y^2-3y+2}\,dy = \lg\left(\frac{4-2}{2-1}\right) - \lg\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \lg(2) \overbrace{-\lg\left(\frac{1}{2}\right)}^{+\lg 2} =$$

$$= 2\lg 2$$

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{\lg 3}^{M} \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_3^{e^M} \frac{1}{y^2-3y+2}\,dy = \lim_{M\to+\infty} \lg\left(\frac{e^M-2}{e^M-1}\right) +$$

$$-\lg\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \lim_{M\to+\infty} \lg\left(\underbrace{\frac{\cancel{e^M}(1-2/e^M)}{\cancel{e^M}\left(1-\frac{1}{e^M}\right)}}_{\downarrow\ 1}\right) - \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -\lg\frac{1}{2} = \lg 2 .$$

$\lg 1 = 0$

Es 4 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$

criterio del rapporto $a_n = \frac{5^n}{n!}$ $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{5^n 5}{n!(n+1)}$

$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \lim_n \frac{\cancel{5^n} \cdot 5}{(n+1)\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{5^n}} = 0 < 1$

la serie converge