CAMPIONAMENTO

$$x(t) \longrightarrow \boxed{A/D} \xrightarrow{\hat{x}(n)} \boxed{DSP} \xrightarrow{\hat{y}(n)} \boxed{D/A} \xrightarrow{y(t)}$$

Il campionamento è l'operazione che permette di "estrarre" dei valori da un segnale a tempo continuo, generando quindi un segnale a tempo discreto:

$$\hat{x}(n) = x(t)\big|_{t = nT_c}$$

Cioè i valori di $\hat{x}(n)$ sono quelli assunti da $x(t)$, presi a intervalli di durata T_c. Tale valore T_c è detto <u>periodo di campionamento</u> ed il suo reciproco, $f_c = 1/T_c$, è la <u>frequenza di campionamento</u>

Il campionamento è importante perché è estremamente facile realizzare l'<u>elaborazione dei segnali numerici</u> (DSP, Digital Signal Processing), sia in software che in hardware

Più in generale, si passa da un segnale t.c. x ad un segnale t.d. $\hat{x}$ ($\hat{x}$ è anche a valori discreti, cioè è <u>quantizzato</u>, ma non ci soffermeremo su questo aspetto perché spesso tale "quantizzazione" è talmente fine da non apportare distorsioni significative). Tale operazione è detta conversione analogico/digitale, A/D. L'operazione duale è la conversione digitale/analogica (D/A)

È importante quindi chiedersi in che condizioni la conversione A/D non fa "perdere informazione". In altre parole, quando è possibile ricostruire perfettamente $x(t)$ a partire dai suoi campioni $x(nT_c)$? Come si ottiene la ricostruzione?
La risposta a queste domande si ottiene con la formula di Poisson e con il Teorema del campionamento di Shannon

Formula di Poisson: legame tra TFCc e TFCd

La formula di Poisson stabilisce il legame tra la TFCc di un segnale t.c. x e la TFCd dei suoi campioni, ponendo le basi del Teorema del campionamento.
In particolare si stabilisce che il campionamento nel tempo implica una replica in frequenza, dualmente a quanto visto per la replica nel tempo (che istituisce un campionamento in frequenza)

Sia ora $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e costruiamo il segnale t.d. $\hat{x}$:

$\hat{x} : n \in \mathbb{Z} \to x(n) \in \mathbb{C}$ sono i "campioni" di x presi con passo unitario

Supponiamo ora che, detta $X(\omega)$ la TFCc di x, si abbia $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; infine supponiamo anche che $\hat{x} \in l^1$

In queste ipotesi, possiamo introdurre $\hat{X}(\omega)$, la TFCd di $\hat{x}$

Posto ora $Y(\omega) = \text{rep}_{2\pi} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2\pi n)$ si ha

1) $Y \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$

2) $Y(\omega) = \hat{X}(\omega)$

Quest'ultima, che si può scrivere: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-jk\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2\pi n)$ è la formula di Poisson

DIM 1) Per ipotesi, $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ quindi

$$\|X\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|\, d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} |X(\omega)|\, d\omega$$

Ora poniamo $\vartheta = \omega - 2k\pi \Leftrightarrow \omega = \vartheta + 2k\omega$ e $d\omega = d\vartheta$. Si ha:

$$\|X\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\vartheta + 2k\pi)|\, d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(\vartheta + 2k\pi)|\, d\vartheta$$

$$\geq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\vartheta + 2k\pi) \right| d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\vartheta)|\, d\vartheta = \|Y\|_1 \ \boxed{\text{norma in } \mathcal{L}^1(-\pi}$$

Cioè $\|Y\|_1 \leq \|X\|_1 < +\infty \Rightarrow Y \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ CVD

Inoltre $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow X \overset{\text{unif.}}{\text{continua}} \Rightarrow Y$ continua

In conclusione Y è periodica e soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet. Possiamo quindi calcolare i coeff. della serie di Fourier di Y, poi applicheremo la formula di sintesi puntuale. Per gli c_k, il periodo è 2π e quindi $\omega_0 = 1$. Si ha:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\vartheta)\, e^{-jk\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\vartheta + 2n\pi)\, e^{-jk(\vartheta + 2n\pi)}\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} X(\vartheta + 2\pi n)\, e^{-jk(\vartheta + 2\pi n)}\, d\vartheta$$

posto $\omega = \vartheta + 2\pi n$, si ottiene

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} X(\omega)\, e^{-jk\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega(-k)}\, d\omega = x(-k)$$

Infatti per la TF di x possiamo applicare la conv. puntuale

Infine possiamo applicare Dirichlet alla SdF di Y:

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(-k) e^{jk\omega} \overset{(m=-k)}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-jm\omega}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(m) e^{-jm\omega} = \hat{X}(\omega) \qquad \text{CVD}$$

In altre parole: se del segnale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ conosciamo solo i campioni $\hat{x}(n) = x(nT_c)$ con $T_c = 1$ possiamo calcolare non $X(\omega)$ ma $rep_{2\pi}[X](\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2k\pi)$

In che condizioni è possibile ricavare $X(\omega)$ da $rep_{2\pi}[X](\omega)$?

Se $X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin (-\pi, \pi)$, allora $\forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad X(\omega + 2k\pi) = 0$ se $k \neq 0$
e quindi $\forall \omega \in (-\pi, \pi) \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + 2k\pi) = X(\omega)$

Sia allora $Z(\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \hat{X}(\omega)$

Per quanto detto, se $X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin (-\pi, \pi)$, allora $Z(\omega) = X(\omega)$
e allora possiamo applicare il Teorema d'inversione a $Z(\omega)$
e, in fin dei conti, recuperare $x(t)$ dai suoi campioni $\hat{x}(n)$

Il tipo di convergenza dipende dalle ipotesi che possiamo applicare a x

Il Teorema d'inversione dà quanto segue:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \hat{X}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(n)\, e^{-j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega(t-n)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left[\frac{e^{j\omega(t-n)}}{j(t-n)}\right]_{\omega=-\pi}^{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, \frac{e^{j\pi(t-n)} - e^{-j\pi(t-n)}}{2j\cdot\pi(t-n)}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, \mathrm{sinc}(t-n)} \qquad (3)$$

infatti $X \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow x$ unif. continua

Nelle ipotesi fatte ($x \in \mathcal{L}^1$ e continua a tratti) la convergenza è puntuale. Se invece $x \in \mathcal{L}^2$ si può dimostrare che la (3) vale quasi ovunque (cioè convergenza in $\mathcal{L}^2$)

La formula (3) è detta formula d'interpolazione ideale o interpolazione di Shannon.

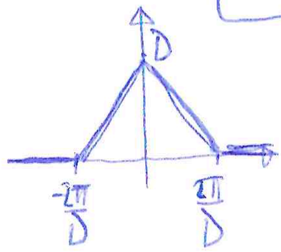
Si vede che, un segnale x "a banda limitata", cioè tale che $\mathcal{F}(x)(\omega) = 0 \quad \forall \omega \notin (-\pi, \pi)$ può essere ricostruito usando i suoi campioni $x(n)$ per modulare dei sinc traslati

Nel seguito, generalizzeremo la (3) al caso in cui il periodo di campionamento né qualsiasi

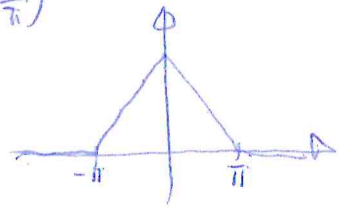
otterremo in questo modo il Teorema del campionamento di Shannon

Vediamo però prima un esempio

Sia $x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{D}\right) \Rightarrow X(\omega) = D\Lambda\left(\frac{D}{2\pi}\omega\right)$

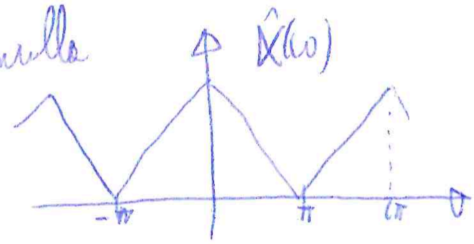


1) Sia $D = 2$, cioè $x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)$ e $X(\omega) = 2\Lambda\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$



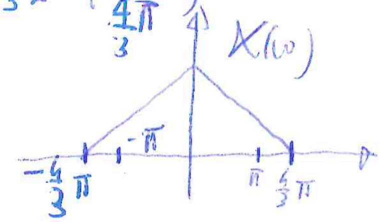
In questo caso, $\hat{X}(\omega) = \mathrm{rep}_{2\pi} X(\omega)$

in ogni periodo c'è una sola replica non nulla



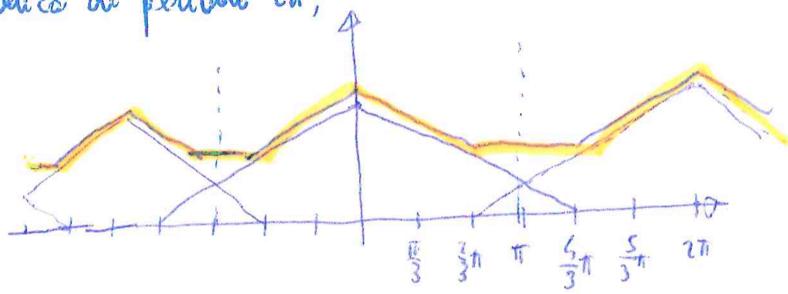
È possibile allora ricostruire $x(t)$ dai suoi campioni presi con passo unitario

2) Sia $D = \frac{3}{2}$ cioè $x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{3/2}\right) \Rightarrow X(\omega) = \frac{2}{3}\Lambda\left(\frac{1}{\frac{4\pi}{3}}\omega\right)$

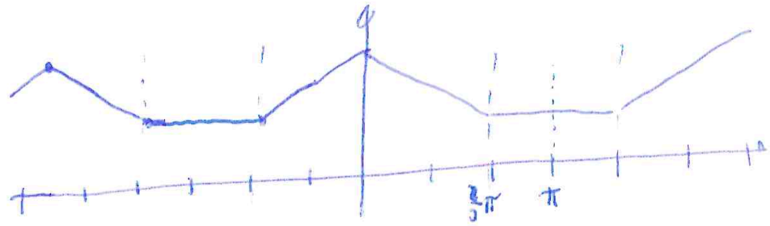


Effettuando la replica periodica di periodo 2π,

$\hat{X}(\omega) = \mathrm{rep}_{2\pi}[X](\omega)$



Nell'intervallo $\left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$ ci sono 2 repliche che contribuiscono:



è impossibile recuperare $X(\omega)$: fenomeno dell'aliasing

Generalizzazione del periodo di campionamento:

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO DI SHANNON

Sia ora $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $T_c \in \mathbb{R}_0^+$ $\hat{w} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

con $\hat{w}(n) = x(t)\big|_{t = nT_c}$

cioè $\hat{w}$ è il campionamento di x con passo T_c

Supponiamo che:

$x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\hat{w} \in l^1(\mathbb{Z})$

Allora

1) Se $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\hat{W}(\omega)$ è uguale a $\frac{1}{T_c} \text{rep}_{2\pi}\left[X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)\right]$

2) Se X è a banda limitata cioè, (il che implica, con $x \in \mathcal{L}^1$, che $X \in$

$\exists\, \omega_M : \forall |\omega| > \omega_M \quad X(\omega) = 0$

Se $T_c \leq \frac{\pi}{\omega_M} \iff f_c \geq 2\frac{\omega_M}{2\pi} = 2f_M$ (condizione di Nyquist)

allora $$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right)} \quad (5)$$

DIM 1) Sia $w(t) = x(t \cdot T_c) \Rightarrow W(\omega) = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$

Allora, siccome $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ anche $w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Analogamente $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow W \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Visto poi che $\hat{w} \in l^1$ per ipotesi, possiamo applicare la formula di Poisson a w, ottenendo

$$\hat{W}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(\omega + 2\pi k)$$

Ma $\hat{W}(\omega)$ è uguale alla TFtd di $\hat{w}(n) = x(nT_C)$

mentre $W(\omega) = \frac{1}{T_C} \mathcal{S}_{\frac{1}{T_C}}[X](\omega)$ $\quad \mathcal{S}_{\frac{1}{T_C}}$ è il campionamento di scala

$= \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$

Abbiamo allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_C)\, e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_C} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T_C}\right) \qquad (5)$$

campionamento nel tempo con passo T_c

cambio scala ($1/T_C$) e replica periodica di periodo 2π

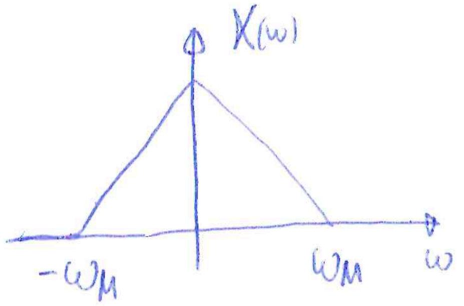
La (5) è detta <u>formula di Poisson generalizzata</u>

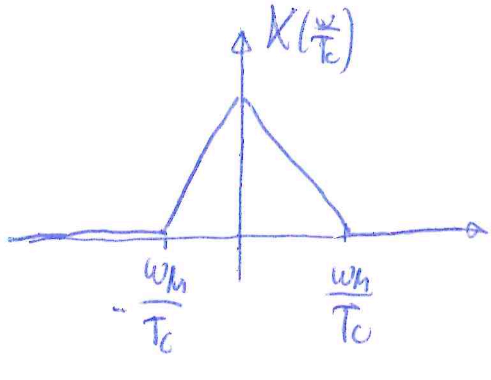
Osserviamo che nella (5), a dx si effettua prima un cambio scala: $\omega \leftarrow \frac{\omega}{T_C}$

e poi un ritardo $\omega \leftarrow \omega + 2k\pi$

<u>DIM 2.</u> Se x è un segnale a banda limitata $(-\omega_M, \omega_M)$

Abbiamo che $X\left(\frac{\omega}{T_C}\right)$ ha supporto $(-T_C\omega_M, T_C\omega_M)$





N.B. l'andamento di $X(\omega)$ è solo illustrativo, e ovviamente il teorema non si limita all'impulso triangolare. L'importante è il <u>supporto</u> di $X(\omega)$

Ora, le ipotesi $x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e X a supporto finito implicano $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (perché continua)

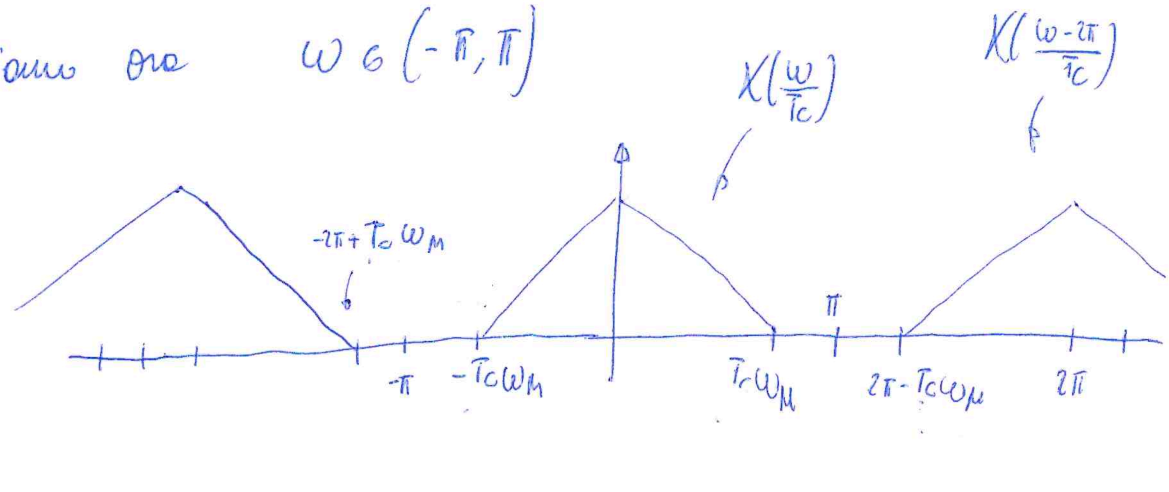
Quindi possiamo applicare la formula di Poisson generalizzata e scrivere che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega+2\pi k}{T_c}\right)$

Il termine $X\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T_c}\right)$ è una versione scalata e ritardata di X:

$X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$ ha supporto per $\omega \in (-T_c\omega_M, T_c\omega_M)$

$X\left(\frac{\omega+2k\pi}{T_c}\right)$ ha supporto per $\omega \in (-T_c\omega_M - 2k\pi, T_c\omega_M - 2k\pi)$

Consideriamo ora $\omega \in (-\pi, \pi)$



La replica per $k=0$ contribuisce in $(-T_c\omega_M, T_c\omega_M)$

La replica per $k=-1$ ha supporto $(2\pi - T_c\omega_M, 2\pi + T_c\omega_M)$

Ora, se $\boxed{T_c\omega_M \leq 2\pi - T_c\omega_M}$ le due repliche non si sovrappongono

Questo è vero per ogni coppia di repliche consecutive ed a maggior ragione, per coppie di repliche con valori di k più distanti.

In conclusione, se $T_c \omega_M \leq 2\pi - T_c \omega_M$ (*)

per ogni valore di ω c'è soltanto un contributo nella replica periodica degli $X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$

In particolare quindi, la condizione (*) si riscrive

$$T_c \leq \frac{\pi}{\omega_M} \Leftrightarrow T_c \leq \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{1}{2 f_M} \Leftrightarrow f_c \geq 2 f_M$$

Tale condizione è detta <u>condizione di Nyquist</u>

Se la condizione di Nyquist è soddisfatta, allora

$$\boxed{\forall \omega \in (-\pi, \pi) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)}$$

Per estendere a $\omega \in \mathbb{R}$, osserviamo che il termine a sx è periodico di periodo 2π, mentre quello a dx ha supporto in $(-\pi, \pi)$.

Possiamo scrivere allora:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, e^{-j\omega n} = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$$

Indicando $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, e^{-j\omega n}$ con $\hat{W}(\omega)$ si ha

$$\frac{1}{T_c} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \hat{W}(\omega)$$

$$X(\omega) = T_c \cdot \text{rect}\left(\frac{T_c}{2\pi}\,\omega\right) \cdot \hat{W}(T_c \cdot \omega)$$

Inoltre, posto $w(t) = x(t \cdot T_c)$, possiamo applicare al segnale $w(t)$ la formula di ricostruzione (3), perché w soddisfa tutte le ipotesi della formula di Poisson per periodo di campionamento unitario. Si ha:

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n)\, \text{sinc}(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \text{sinc}(t-n)$$

$$x(t) = w\left(\frac{t}{T_c}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - n\right)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right)}$$

<u>Formula d'interpolazione ideale</u>

Campionamento di segnali a banda non limitata

Il Teorema del campionamento di Shannon può essere interpretato in questo modo: posto $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\psi_n(t) = \text{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right), \quad \text{l'insieme } \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

è una base ortonormale del sottospazio dei segnali a banda limitata in $(-\omega_M, \omega_M)$ con $\omega_M = \frac{\pi}{T_c}$ e ad energia finita (chiamiamo S_B tale sottospazio)

Ci poniamo la domanda: qual è la migliore rappresentazione (in questo stesso sottospazio) dei segnali a banda non limitata?

In altre parole, se x soddisfa le ipotesi di Poisson ma è a banda non limitata, qual è il miglior modo di rappresentarlo nella base $\{\psi_n\}$? (cioè tramite dei sinc)

Matematicamente, il problema si formula così:

Sia $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e tale da soddisfare Poisson.

Sia $y(t) = \sum_n s_n \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_c}{T_c}\right)$

Come scegliere s_n in modo da minimizzare l'errore di ricostruzione $\| x - y \|_2$?

Sia $x_{LP} = x * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \Leftrightarrow X_{LP}(\omega) = X(\omega)\, T_c\, \mathrm{rect}\left(\frac{T_c \omega}{2\pi}\right)$

x_{LP} è a banda limitata e soddisfa le hp del T. di Shannon.

Sia poi $x_{HP} = x - x_{LP} \Leftrightarrow X = X_{LP} + X_{HP}$

Qualunque sia y generato dai sinc (quindi $y \in S_B$),

$2\pi \cdot \| x - y \|_2^2 \overset{(a)}{=} \| X - Y \|_2^2 = \| X_{HP} + (X_{LP} - Y) \|_2^2 \overset{(b)}{=} \| X_{HP} \|_2^2 + \| X_{LP} - Y \|$

(a) identità di Parseval

(b) $X_{HP} \perp X_{LP} - Y$: infatti $\langle X_{HP}, X_{LP} - Y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{HP}(\omega) \cdot \overline{(X_{LP}(\omega) - Y(\omega))}\, d\omega$

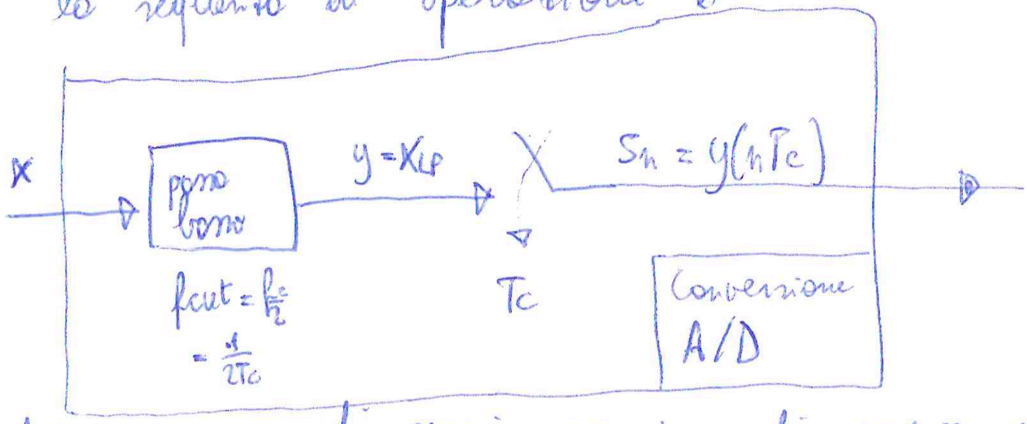
ma $X_{HP} = 0 \ \forall \omega \in (-\omega_M, \omega_M)$ mentre $X_{LP} - Y = 0 \ \forall \omega \notin (-\omega_M, \omega_M)$

quindi $\langle X_{HP}, X_{LP} - Y \rangle = 0$

Se $X_{HP} \perp X_{LP} - Y$ allora basta applicare il Teorema di Pitagora per avere l'identità (b)

Allora per minimizzare $\| x - y \|$ bisogna prendere $Y = X_{LP} \in S'_B$

Quindi la sequenza di operazioni è:

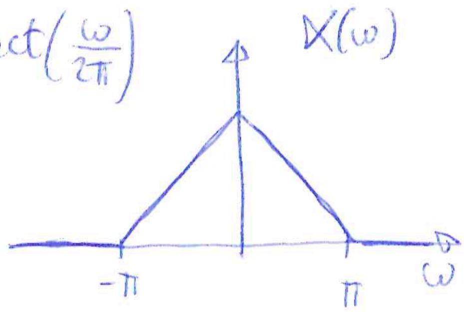


Ecco perché, prima di ogni operazione di campionamento a frequenza $f_c = 1/T_c$, è necessario un filtro passa-basso (filtro anti-aliasing) con frequenza di taglio $f_{cut} = f_c/2$ cioè la metà della freq. di campionamento

---

<u>Esercizio</u> Sia x un segnale a banda limitata:

$$X(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi}\right) rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



Calcolare la TFtd di $x(nT_c)$ in tre casi

a) $T_c = 1$ b) $T_c = 1/2$ c) $T_c = 3/2$

Discutere sulla possibilità di ricostruire x dai suoi campioni nei 3 casi.

<u>Soluzione</u>

Sappiamo che $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}^2(t))(\omega) = \Lambda(\frac{\omega}{2\pi})$

Per cui $\mathcal{F}(\mathrm{sinc}^2(\frac{t}{2})) = 2\Lambda(\frac{2\omega}{2\pi}) = 2X(\omega)$

Allora $x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\frac{t}{2}) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si può anche mostrare che $x(nT_c) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (senza dim.)

Quindi possiamo applicare la formula di Poisson e, posto $\hat{w}(n) = x(nT_c)$, la TFtd da calcolare è

$$\hat{W}(\omega) = \frac{1}{T_c}\mathrm{rep}_{2\pi}\left[S_{1/T_c}(X)\right](\omega) = \frac{1}{T_c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{\omega+2k\pi}{T_c}\right)$$

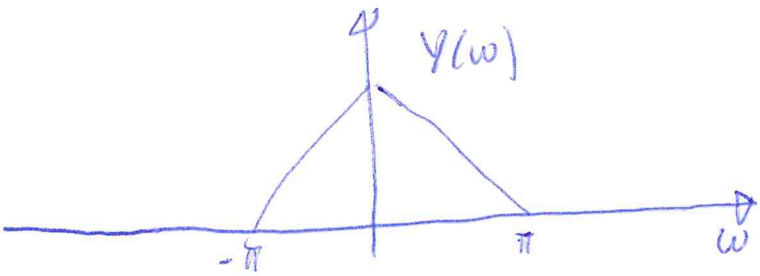
Faremo questo calcolo in due passaggi:

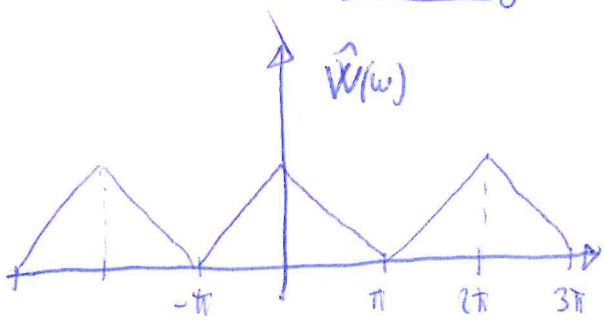
1) Calcoliamo $Y(\omega) = \frac{1}{T_c}X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$

2) Calcoliamo $\hat{W}(\omega) = \mathrm{rep}_{2\pi}(Y)(\omega)$

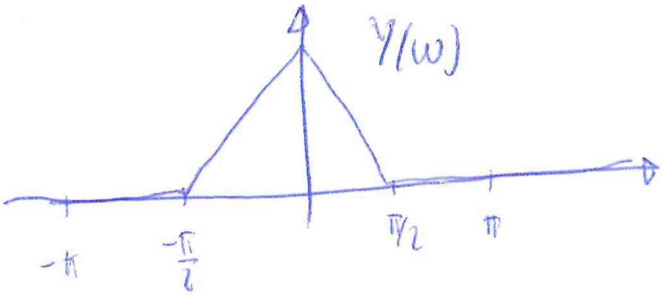
a) $T_c = 1 \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)$

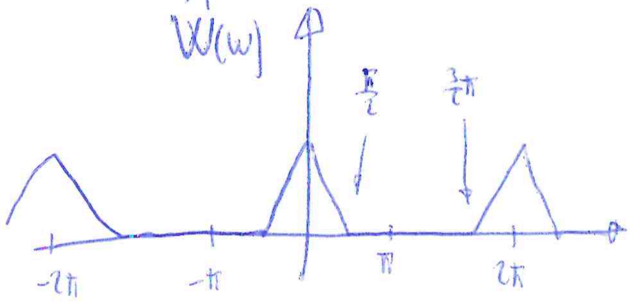
Y ha supporto $(-\pi, \pi)$ quindi le repliche non hanno supporto in comune: si dice che non c'è <u>aliasing</u>





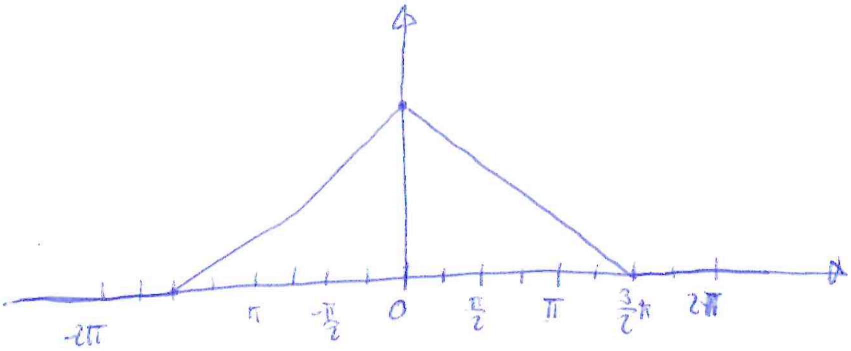
b) $Y(\omega) = 2X(2\omega) = 2\Lambda\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right)$





Anche in questo caso le repliche di Y sono non sovrapposte.
Non c'è aliasing e x può essere recuperato dai suoi campioni con la formula dell'interpolazione ideale

c) $Y(\omega) = \frac{2}{3}X\left(\frac{2}{3}\omega\right) = \frac{2}{3}\Lambda\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\pi}\right)$ con supporto $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

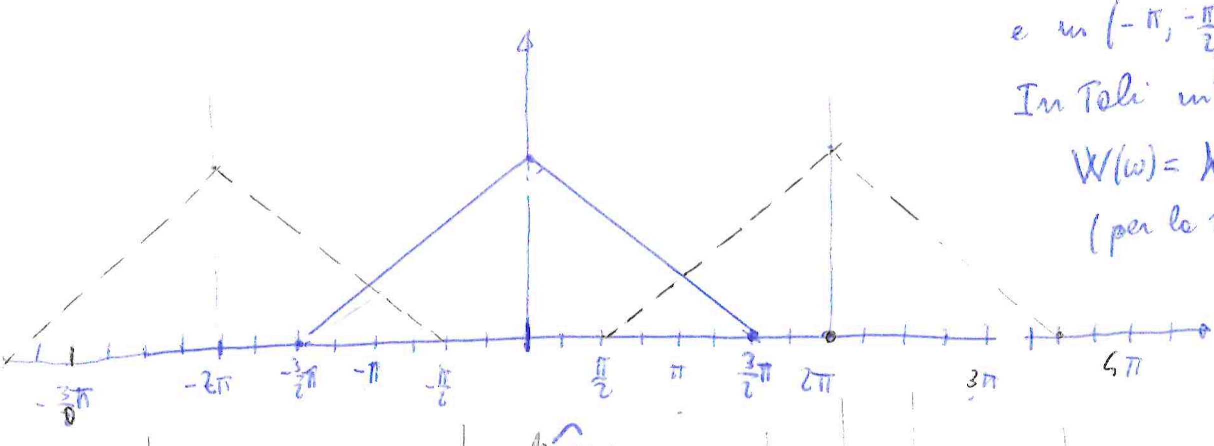


In questo caso, la replica centrata in zero si sovrappone in parte con le due repliche adiacenti in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ e in $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

In tali intervalli,

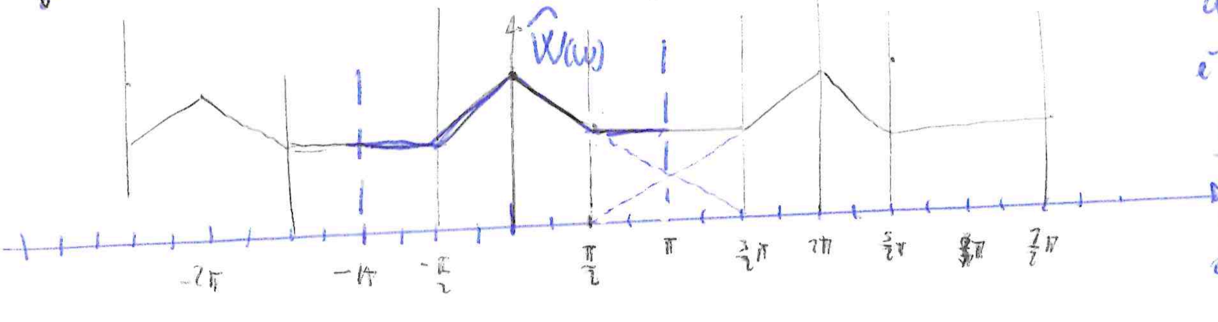
$W(\omega) = X(\omega) + X(\pi - \omega)$

(per la simmetria di X)



La sovrapposizione delle pulsazioni ω con $\pi - \omega$ è detto **ALIASING**

e impedisce di ricostruire x dai suoi campioni



Approfondimento sull'aliasing

Che succede se ricostruiamo un segnale dai suoi campioni **senza** verificare il criterio di Nyquist?

Formulazione matematica

Sia x un segnale che soddisfa le ipotesi della formula di Poisson.
Supponiamo di campionare x con periodo T_c
e di usare tali campioni in un interpolatore ideale.

Il segnale ricostruito è:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right)$$

Sappiamo che se il criterio di Nyquist è soddisfatto, $\tilde{x} = x$. Cerchiamo di capire invece che succede se il criterio non è soddisfatto.

Cominciamo con l'osservare che:

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right), t \to \omega\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right), t \to \omega\right)(\omega) \cdot e^{-j\omega T_c n}$$

$$= T_c\, \mathrm{rect}\left(\frac{T_c\,\omega}{2\pi}\right) \cdot e^{-j\omega T_c n}$$

Quindi la TFtc di $\tilde{x}(t)$ è:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, e^{-j(\omega T_c)n} \cdot T_c \,\mathrm{rect}\left(\frac{T_c}{2\pi}\omega\right)$$

Posto $\hat{w}(n) = x(nT_c)$, per Poisson si ha che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, e^{-j(\omega T_c)n} = \hat{W}(\omega T_c)$$

Dove $\hat{W}(\omega) = \frac{1}{T_c}\, \mathrm{rep}_{2\pi} X\left(\frac{\omega}{T_c}\right) \Rightarrow T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, e^{-j(\omega T_c)n} = \mathrm{rep}_{2\pi}\left[X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)\right]$

Quindi $$\tilde{X}(\omega) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right) \cdot T_c \hat{W}(\vartheta)\right]\Big|_{\vartheta = T_c\omega}$$

Allora per capire com'è fatto $\tilde{X}$ possiamo effettuare gli step seguenti:

a) Sia $X_1(\omega) = X\left(\frac{\omega}{T_c}\right)$: riscalo l'asse delle ascisse per $X(\omega)$

b) $T_c \cdot \hat{W}(\omega) = \mathrm{rep}_{2\pi} X_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_1(\omega - 2\pi k)$

Replico $X_1(\omega)$ con periodo 2π

c) $X_2(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot T_c \hat{W}(\omega)$: seleziono solo il periodo centrale di $T_c \hat{W}$

d) $\tilde{X}(\omega) = X_2(T_c\omega)$

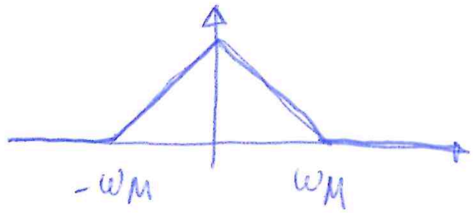
Riscalo l'asse delle ascisse per ottenere $\tilde{X}$

Il punto critico è a)

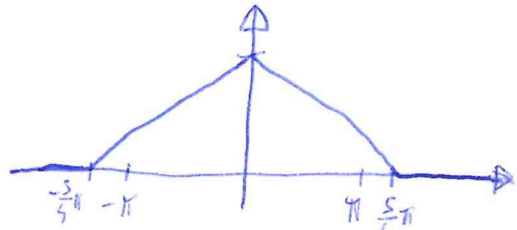
Se, dopo la riscalatura, X_1 ha <u>supporto</u> (cioè è non nullo) per $\omega \in (-\pi, \pi)$, allora siamo sicuri che il passo b) non "mischia" le repliche e quindi il passo c) seleziona unicamente "un periodo" cioè l'andamento di X

<u>Esempi</u>

$X(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_M}\right)$



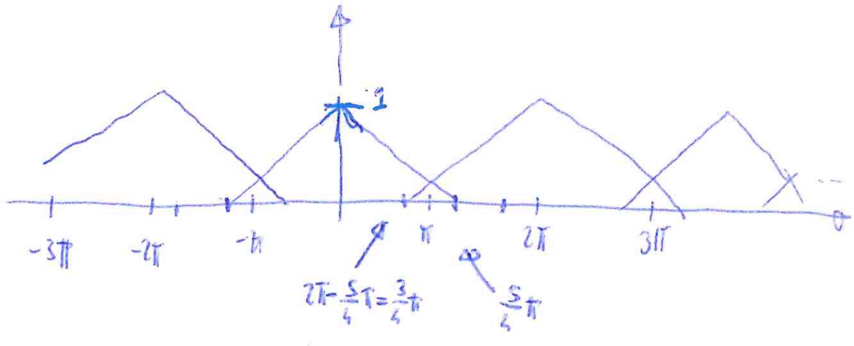
$T_c = \frac{5}{4}\frac{\pi}{\omega_M}$ (Nyquist <u>non</u> soddisfatto)



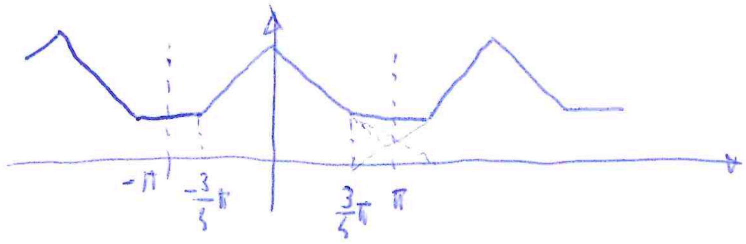
a) $X_1(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_M} \cdot \frac{4}{5}\frac{\omega_M}{\pi}\right) = \Lambda\left(\frac{\omega}{\frac{5}{4}\pi}\right)$

Il supporto deborda dall'intervallo $(-\pi, \pi)$

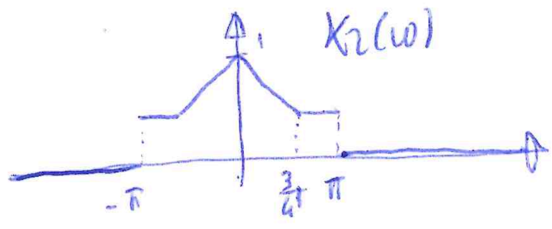
b) Periodizzazione di periodo 2π



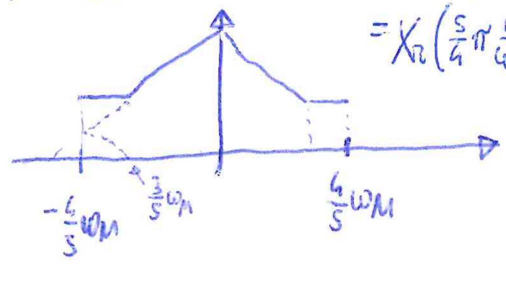
la replica centrata in 2π [risp. -2π] ha una "coda" che si sovrappone con il segnale originale in $(\frac{3}{4}\pi, \pi)$ [risp., $(-\pi, -\frac{3}{4}\pi)$]: è l'ALIASING



c) Selezione replica centrale



d) riscalatura $\tilde{X}(\omega) = X_2(T_c\,\omega) = X_2\left(\frac{5}{4}\pi\frac{\omega}{\omega_M}\right)$



Infatti, $X_2(\omega)$ ha supporto per $\omega \in (-\pi, \pi)$

Siccome $\tilde{X}(\omega) = X_2(T_c\omega)$, il suo supporto è:

$$-\pi < T_c\omega < \pi \iff |\omega| < \frac{\pi}{T_c} = \frac{\pi}{\frac{5}{4}\frac{\pi}{\omega_M}} = \frac{4}{5}\omega_M$$

Infatti, un segnale ottenuto combinando $\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$ ha banda $\left(-\frac{\pi}{T_c}, \frac{\pi}{T_c}\right)$ che in questo caso è $\left(-\frac{4}{5}\omega_M, \frac{4}{5}\omega_M\right)$

Quindi è impossibile ricostruire il contenuto frequenziale del segnale in $\left(\frac{4}{5}\omega_M, \omega_M\right)$ e in $\left(-\omega_M, -\frac{4}{5}\omega_M\right)$

Inoltre, il contenuto di $X(\omega)$ in $\left(\frac{4}{5}\omega_M, \omega_M\right)$ (e similmente a pulsazione negativa) si ritrova "ripiegato": per $X_2(\omega)$ è l'intervallo $\left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$, che corrisponde a:

$$\frac{3}{4}\pi < T_c\omega < \pi \iff \frac{3}{4}\pi < \frac{5}{4}\pi\frac{\omega}{\omega_M} < \pi \iff \frac{3}{5}\omega_M < \omega < \frac{4}{5}\omega_M$$

Quindi non solo manca il contenuto spettrale tra $\frac{4}{5}\omega_M$ e ω_M, ma tale contenuto è "ripiegato" in $\left(\frac{3}{5}\omega_M, \frac{4}{5}\omega_M\right)$

[similmente per gli ω negativi]