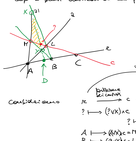
Problema: tracciare la retta per Z e d'intersezione tra 2 rette (fuori dal foglio) usando SOLO una riga.

o usando il teorema di Pappo

o usando il teorema di Desargues

Costruzione grafica dell'ortocentro dopo 3 punti allineati su un piano:



Considerazione: $\pi \xrightarrow{\text{proiezione di centro } V} r \xrightarrow{\text{proiezione di centro } O} \pi$

$? \longmapsto (VA)\cap r \longmapsto (OV)\cap\pi$

$? \longrightarrow (OV)\cap\pi$

$A \longmapsto (BN)\cap r = M \longmapsto (OV)\cap\pi = B$

$B \longmapsto (OV)\cap r = L \longmapsto (LV)\cap r = A$

$C \longmapsto (CM)\cap r = N \longmapsto C$

$D \longmapsto (DV)\cap r = ? \longmapsto ?$

Quindi: Φ ha come incognite A, B (Φ^2 interessante) e C, D come punti fissi per Φ,

quindi $(CDAB) = -1$

PA

quindi $(ABCD) = -1$ //

Teorema: conoscenza delle regole di costruzione dopo aver dato delle rette ed un fascio, e interpretazione/dimostrazione dei teoremi di geometria (proiettiva (invariazioni) fra fasci di rette ...).

Dimostrazione del teorema di Desargues:

Nel piano: ipotesi $\Rightarrow$ enunciato

abbiamo ABC, $A'B'C'$ triangoli dal centro O

casi degeneri:

$P \longmapsto P^1$

$O \longmapsto O$

$\overline{P}$ $\longmapsto$ $\overline{P^1}$

$A \longmapsto A'$

$B \longmapsto B'$

$C \longmapsto C'$

ripet. ripet.

posizioni reciproche definite

le rette OC e $\overline{AB}$...

e ha rette per O sono varie ($\overline{PQ}\overline{P'Q'} = \overline{PO}\overline{OP'} = \overline{OA}\overline{OA'} = \overline{OC}\overline{OC'}$)

quindi le coppie di rette per O e dei rette varie

$\Lambda(O)$ = rette per O e rette parallele

quindi Φ è involuzione (ha esattamente tre punti uniti)

dunque la dimostrazione dei tre punti coniugati e che i tre punti $D\overline{AB}$, $E\overline{AC}$, $F\overline{BC}$ sono uniti (schema simile alla dimostrazione che i punti uniti sono rette o che di involuzione)

$\Phi(D,A',B') = \overline{P(A)}\,\overline{P(B)}\,(D\,\overline{AB}) = D'$

$\left.\begin{array}{l}\Phi(E)\in\Omega'\\ E\in O_2(E\Omega')\end{array}\right\} \Rightarrow = E\Omega'$

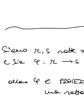
$E\Omega'\in O_2(E\Omega')$

retta unita

$\left.\begin{array}{l}\Phi(F\Omega')\in\Omega'\\ F\in\ell\end{array}\right\}$ $\Omega'C = \Omega'F$

Secondo esempio di "teorema fondamentale":

Applicazione della Teorema di Pappo:



date due rette distinte in $\mathbb{P}^2$, esiste proiettività $\Phi: \pi \to \xi$ di cui conosciamo 3 posizioni (da rette a rette di centro punti opportuni)

ed è proiettiva se $\Phi(\ell\cap\pi) = r\cap\xi$.

Se invece $\pi = \xi$ nel piano, una tale Φ è completamente dal dal suo 3 posizioni (da rette a rette di centro punti).

Piccola nota: Se $\Phi: \pi \longrightarrow \pi$

allora corrispondono con una proiezione quadratica:

$\pi = \Phi : \pi \longrightarrow \xi \quad \text{con } \pi \neq \xi$

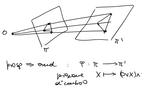
e quindi si decompone con un fatto $\mathbb{R}$ proiettivo:

$\pi \xrightarrow{\Phi} \Phi = \pi_2 \circ \pi_1$

$\Phi = \pi^1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$

proiezione.

Nel piano: proiettività $\Rightarrow$ omologie



2) hop $\Rightarrow$ omol: $\Phi: \pi \longrightarrow \pi^1$

proiezione di centro A' — proiezione di centro A

$X \longmapsto (A'X)\cap\xi \longmapsto (AX)\cap\pi$

$Y \longmapsto (AY)\cap\xi$

$A \longmapsto (A'A)\cap\xi = (A_1A)\cap\xi = (A_2A)\cap\xi = A'$

$B \longmapsto (A'B)\cap\xi \longmapsto (A'B)\cap\xi = (A_1B)\cap\xi = B'$

$C \longmapsto (A'C)\cap\xi \longmapsto (A'C)\cap\xi = (A_2C)\cap\xi = C'$

La composizione manda ABC in $A'B'C'$, quindi coincide con Φ (= composta di una 2 proiezioni)

Nota: esse è scelto in modo unico, i punti di proiezione no!

Inoltre Φ è proiettiva se: A_1A', B_1B', C_1C' sono concorrenti

se esse è data per A, A', B, B', C, C'

se $\Phi(r\cap\pi) = r\cap\xi$

Siano π, ξ rette distinte in $\mathbb{R}$ (piano proiettivo $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$) e sia $\Phi: \pi \to \xi$ biiettiva,

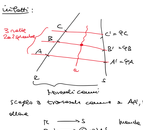
allora Φ è proiettiva da π ed ξ dei centro una retta r, e ognuna con π, ξ:

$\pi \longrightarrow \xi$

$R \longmapsto (R_1 R_2)\cap\xi$ (e non si vedrà)

(nota: in fatti possiamo scegliere come dove Φ sia e non comprendere tale corona)

Nel piano:



Possibili casi:

Scegli a coordinate cartesiane a AA', BB', CC', e P, S

allora

$\pi \longrightarrow \xi$

$R \longmapsto (R_1 R_2)\cap\xi$

quindi $A \in A_1$, $\overline{A}$ in A_2, $\overline{\overline{A}}$

quindi calcolo con Φ (coincide con Φ su un riferimento in π.) //

Domani: stesso problema per piani: dato $\Phi: \pi \to \sigma$ piani in $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^3$ proiettività qualsiasi, lasciamo naturale come composizione di proiezioni (da piani a piani di centri opportuni).

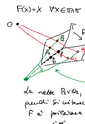
Idea: proiettività tra rette $\begin{cases}\text{nel piano: } \begin{cases}\text{se } \Phi(r_1\pi) = r_1\pi_1 \text{ proiezione}\\ \text{se } \Phi(r_1\pi) \neq r_1\pi_1 \text{ composizione e 2 proiezioni: } \{P, Q\}\\ \text{se } \pi = \xi \text{ composizione di } Cp(p_1) \text{ 3 proiezioni: } \{P, Q, R\}\end{cases}\\ \text{Spazio: } 4 \text{ proiezioni (di centro rette)}\end{cases}$

06/06/2023

Proiettività tra piani:

$F: \pi \to \sigma \quad \pi, \sigma \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ piani in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$

$F(X) = X \quad \forall X \in \pi \cap \sigma \Rightarrow F \in$ proiettività del centro un punto opportuno.



oppure o un π e σ Φ $R, P \in \pi \cap \sigma$, R_1, R_2 e centrano di omologia $\omega \neq$ $Q_1 \neq R_1 R_2$, $Q_2 = PR_2$

da rette $R_1 R_2$, $P_1 P_2$ sono complanari, poiché si incontrano in un punto O.

F è proiettiva da Γ e di centro O se

$\pi \longrightarrow \sigma$

$X \longmapsto (OX)\cap\sigma'$

$(P_1 \longmapsto P_2 = FP_1)$

facile conticino che effettivamente tutto!

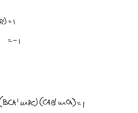
$F: \pi \to \sigma$ numero in $\mathbb{R}^4$ tre punto

$F(\pi\cap\pi) = \pi\cap\sigma$

allora F è proiettiva da $\pi \neq \sigma$ dei centro una opportuna retta!

Problema duale: $R_1 R_2 P_1 P_2$ rette in Π' $R_1 R_2 P_1 P_2$ incidenti in Φ $PR \; PR \; PR$

trovare una retta tridimensionale comune a $P_1 R_2$, $P_2 R_1$



Se π, σ piani reference in $\mathbb{P}^3$, allora $F: \pi \to \sigma$ proiettiva è proiettiva dal centro un opportuno fascio

$\begin{cases}\cdot\; Q_1 \in r_1 R_2 \longrightarrow \Phi\\ \cdot\; R_1 P_2 \in R_2 \longrightarrow S\\ Q_1 \in r_1 P_2 \longrightarrow S\end{cases}$ 3 piani

Da fatto l'omologia di un piano da fasci per Φ e intersezione $P_1 P_2 R_1 R_2$

$(\ell_1 r_1 P_1) \wedge \Phi = PP_2$

Esempio: $\pi, \sigma \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$, $\pi \neq \sigma$ rette

$F: \pi \longrightarrow \sigma$ proiettività

$F(n)$ è rapporto σ, $\pi \neq$

$\in F(r\cap\pi) = r\cap\sigma$

allora F è composizione di 2 proiezioni (da piani a piani di centro punti).

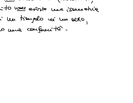
Idea: componiamo una data proiettività un modo da fa composizione $\pi \to \pi'$ con π piani di π, π' fissi.

Problema: Teorema talete

$(ABC) = (A'B'C')$

$\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'}$

Invariante dell'angolo in proiezione:



$(PBCD) = (PB'C'D')$

(PBCD)
(PB'C'D')

Teorema: $A'B'C'$ allineati $\Leftrightarrow$ $(AB\cap A'B')(BC\cap B'C')(CA\cap C'A') = 1$

AA', BB', CC' concorrenti $\Leftrightarrow$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = -1$

Caso e Menelao positivi si possono dimostrare:

$A'B'C'$ concorrenti se $(AB'\cap A'B)(BC'\cap B'C)(CA'\cap C'A) = 1$

AA', BB', CC' allineati se $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = -1$

Caso e Menelao positivi si possono dimostrare dal seguente teorema:

ABC triangolo, $A'A^2$ e a, $B'B^2 \in b$, $C'C^2 \in c$

allora: esiste $F: \pi \to \pi$ che manda $ABCA'B'C'$ in $ABCA'B'C^2$ se $(AB\cap C')(C\cap BC')(CA\cap B'B^2) = 1$.

Problema: dimostrare il risultato! Usare Caso e Menelao!

Impianto e dimostrazione proiettiva geometrica dei tipi seguenti:

Triangoli: $\cdot$ Esempio finito piccolo

in $\mathbb{P}^2$ sono tutti equivalenti: ha due facili passi proiettivi che mandano ABC in $A'B'C'$ (se punti in più qualunque)

in $\mathbb{R}^2$ (piano (classico $\mathbb{R}$-dotto)

in $\mathbb{E}^2$ (Euclideo): non sono tutti equivalenti, come del resto non esiste una isometria che manda un triangolo in un altro, e insomma una configurazione.

Quadrilateri: dato di 4 punti (non allineati)

$\left.\begin{array}{l}\text{Piano}\\ \text{Sghembo}\end{array}\right]$ piccolo!

$\left.\begin{array}{l}\cdot\text{ parallelo}\\ \cdot\text{ romboide}\\ \cdot\text{ parallelo piano}\\ \cdot\text{ trapezio}\end{array}\right\}$ non fanno bene

$\left.\begin{array}{l}\cdot\text{ rettangolo}\\ \cdot\text{ romboide}\\ \cdot\text{ parallelo piano}\end{array}\right\}$ non fanno bene

$\left.\begin{array}{l}\text{in } \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3 \text{ fanno proiettivamente}\\ \text{stesso gruppo proiettivamente}\\ \text{equivalenti (} \exists \text{ proiettività}\\ \text{che trasforma uno nell'altro)}\\ \text{Si? In senso euclideo piani}\\ \text{o teoremini spiombi?}\end{array}\right\}$

In $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: dati 2 parallelogrammi, quando esiste una affinità che manda uno nell'altro? Algoritmo!

Problema: dati $P_1 P_2 P_3 P_4 \in \mathbb{R}^3$ e $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \in \mathbb{R}^3$, esiste una affinità $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\Phi(P_i) = Q_i$.

(Vedrà per $\mathbb{R}^2$)

Esercizio: $P_1 P_2 P_3 P_4 \in \mathbb{R}^2$ quadrilatero piano generico allora: punti medi dei lati formano un parallelogrammo piano

cosa è nel caso di punto (non allineati)

07/06/2023