Geo1-22/3-84b-GeoPro-4b

martedì 30 maggio 2023 09:47

STUDIO DI OMOLOGIE E INVOLUZIONI (geo. affine, proiettiva)

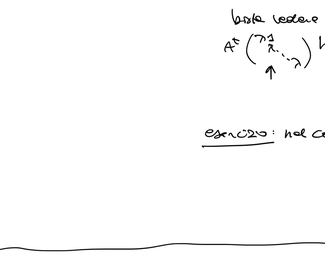
Omologie: $\varphi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività
si dice OMOLOGIA se ha un iperpiano di punti unitì (ASSE)
proiettività
sse ha un punto che è centro di una stella di iperpiani unitì (CENTRO)

Osservazione: c'è una base di V $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ tale che $\mathbb{P}(H) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ che sono tutti autovettori dello stesso autovalore λ, e quindi ha matrice in quella base del tipo:

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

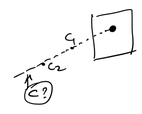
- se ha autov $\mu \neq \lambda$ allora $\sim \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \lambda\mathbb{1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ (1) OMOLOGIE generali ($C \notin H$, diagonalizzabili)
- se ha autovalore λ con molt $n+1$ allora $\sim \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & & \\ \hline & & & \\ & & \lambda\mathbb{1} & \\ & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & & \\ \hline 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{array}\right)$ (2) OMOLOGIE speciali ($C \in H$, non diagonalizz. se $\neq \mathrm{Id}$)
  una $\neq \lambda \mathbb{1}_{n+1}$ (identità di $\mathbb{P}(V)$)

e questi due casi si distinguono a seconda che: $C \notin H$ (1) perché $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin H = \mathbb{P}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$
$C \in H$ (2) " $C =$ "l'intersezione degli iperpiani unitì" "autovettori della trasposta $\begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in H$



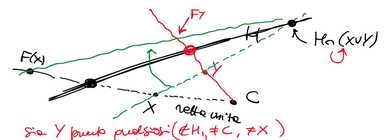
Proprietà:
- duale di omologia è omologia
- composizione di omologie? di solito non è omologia! perché? cos'è?

Però se φ_1 e φ_2 hanno entrambe generalmente lo stesso ASSE H e 2 centri $\neq$, allora $\varphi_2 \circ \varphi_1$ è omologia con asse H, centro C_3?
- è nella retta C_1C_2?
- birapporto $(C_1, C_2, C_3, H \cap (C_1C_2)) = ?$
- è possibile che $C_3 \in H$?



- DUALE!

COSTRUZIONE GRAFICA delle omologie
dati asse H
centro C
e $\varphi(X)$ per $X \notin H$, $\neq C$



sia Y punto qualsiasi ($\notin H, \neq C, \neq X$)
osservazioni: $\begin{cases} F(Y) \in CY \\ F(Y) \in F(X \vee Y) \end{cases}$ siccome $Y \in X \vee Y$
$F(X) \vee F(Y)$
$F(X) \vee (H_n(X \vee Y))$
$F(Y) = (C \vee Y) \wedge (F(X) \vee (H_n(X \vee Y)))$ //

PROBLEMA: funziona se $Y \in X \vee F(X)$? ecc, cosa fare nel caso?

ESERCIZIO: la costruzione si fa anche se $C \in H$

30/05/2023

Lezioni (LM 8,30 MGV 10,30) (Mer 14, Ven 16 ^{30} cancello)

Questioni organizzative: questionari → moodle (unimore)
esami
liste di esame → (moodle, scritti unimore)
orali → appuntamento, settimane DOPO ogni scritto (una in qualsiasi sessione, non serve farlo subito, anche se completato non rimandare ...troppo...)
(propaedeuticità per l'orale)

Omologie:

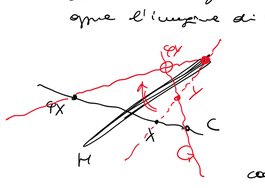
$F: \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività si dice
OMOLOGIA se ha un iperpiano di punti unitì (ASSE dell'omologia)
(Se ha un punto unito centro di una stella di iperpiani unitì (non necess. punti unitì!)) (CENTRO dell'omol.)

due tipi di omologie:
- $C \notin H$ generale (trasposta) $\begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \lambda\mathbb{1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$
- $C \in H$ speciale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \omega & & & \\ \vdots & & \lambda\mathbb{1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ (H, P∞)

chi è il centro nel caso speciale?
se $A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ allora $C = P_2$
nel rif $P_0 P_1 \dots P_n U$ in cui è scritta la matrice.
basta vedere e' n spaz' iperpiani unitì $A^t \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ha autovett $e_0 \dots e_n$
$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle e_1 \rangle$

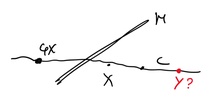
esercizio: nel caso $\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ x_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_n & & & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ y_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & & & \lambda \end{pmatrix}$?

Costruzione grafica:
per costruire l'omologia non basta conoscere asse e centro, serve nel caso generale conoscere anche $\gamma_{\varphi X}$, oppure l'immagine di un punto non unito.



$Y \notin H$
$\neq C$
$\notin X \vee \varphi X$

come fare se $Y \in X \vee \varphi X$? (costruzione grafica!)

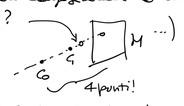


Composizioni?

id è omologia (la generale da speciale!)

composizione di omologie di solito non è omologia! (domanda: il fatto pippo FISSI tutte le omologie ≤ proiettività?)

però: se due omologie hanno lo stesso asse, allora la composizione è omol. stesso asse (centri? ...)



e dualità se due omologie hanno lo stesso centro, allora la composizione è omologia con stesso centro (ossi? ....)

nota: di solito le omologie non commutano tra loro, neanche se hanno lo stesso asse!
es: $A_0 \begin{pmatrix} \mu & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ $A_1 \begin{pmatrix} \mu' & & & \\ 1 & \lambda' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda' \end{pmatrix}$ $\mu' \neq \lambda'$
(nello stesso riferimento proiettivo).

Moduli: Sia $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo
H iperpiano di $\mathbb{P}(V)$
C punto di $\mathbb{P}(V)$, $C \notin H$

allora $\mathbb{A} : \mathbb{P}(V) \setminus H$ è spazio affine
con
spazio vettoriale
$V := \{$ proiettività di $\mathbb{P}(V)$ che sono OMOLOGIE SPECIALI d'ASSE $H \}$
$+$ su V = prodotto di composizione delle omologie
ossia $K^\times \simeq \{$ proiettività di $\mathbb{P}(V)$ che sono omologie generali d'asse H centro $C \}$

e $\bullet : K^\times \times V \longrightarrow V$
per cui $(A_\alpha, A_\beta) \longmapsto A_\alpha A_\beta A_\alpha^{-1}$

e si DIMOSTRA: ① che V è spazio vett / K
② che $\mathbb{A}$ è spazio affine con spazio delle traslazioni V con azione $\mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}$, $(X, \varphi) \longmapsto \varphi(X)$

Nota TUTTO diventa OK se usiamo un rif. proiettivo in cui $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $H_\infty = \{x_0 = 0\}$.

Nota: queste costruzioni dello spazio affine $\mathbb{A} = \mathbb{P}(V) \setminus H$ non dipende dal punto C, a meno di affinità.

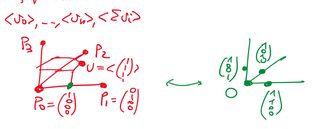
$\mathbb{A}^n(K) \subseteq \mathbb{P}^n(K)$
$\uparrow$ punti proiettivi con $x_0 \neq 0$
$\parallel$ cioè CORRETTAMENTE identificato col $H_\infty : x_0 = 0$
$\mathbb{P}(K) \setminus H_\infty \subseteq \mathbb{P}^n(K)$
$\uparrow$ affinità $\subseteq$ proiettività

quali proiettività sono affinità, cioè quali $\varphi : \mathbb{P}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$ danno funzioni $\mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{A}^n(K)$, (quelle $\varphi(H_\infty) \subseteq H_\infty$) ?
nel rif standard $P_0, \dots, P_n, U$
$\langle e_1 \rangle$ $\langle e_n \rangle$ $\langle \sum e_i \rangle$

una proiettività è data da matrice $A \in PGL_{n+1}(K)$
e l'iperpiano $H_\infty = (1\,0 \cdots 0)$, $x_0 = 0$
è unito (perché $\varphi(H_\infty) \subseteq H_\infty$) sse $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore A^t
sse $A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & & & \\ \vdots & & A'_{00} & \\ a_{n0} & & & \end{pmatrix}$ con $a_{00} \neq 0$, $\det(A_{00}) \neq 0$
$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & A_{00} & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$ ← matrice di affinità nel rif. standard affine!

è affinità di $\mathbb{A}^n(K)$

Ricordiamo: data base $v_0, \dots, v_n$ di V
rif proiettivo $\langle v_0 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle, \langle \sum v_i \rangle$



Traslazioni:

le matrici del tipo $\left(\begin{array}{c|ccc} \mu & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \lambda\mathbb{1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \alpha\mathbb{1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$
omologie speciali asse H_∞ e centro P_0 — affinità: H_∞ è FISSATO punto x punto, c'è $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ punto unito "dilatazione di centro O'"

sono in corrispondenza con $K^\times$
e la composizione è il prodotto in $K^\times$

e quelle del tipo $\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \omega & & & \\ \vdots & & \lambda\mathbb{1} & \\ \omega & & & \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \omega & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \omega & & & 1 \end{array}\right)$
omologie speciali asse H_∞ — affinità: $\varphi(x) = x + v$ TRASLAZIONI!

composizione dà la somma sui vettori: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v+w & \mathbb{1} \end{pmatrix}$

$V \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ • matrici = + vettori
$K^\times \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha\mathbb{1} \end{pmatrix}$ • matrici = • scalari

prodotto scalare? αv
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\mathbb{1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha\mathbb{1} \end{pmatrix} \right) = H^{-1}PH$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \alpha\mathbb{1} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^{-1}v & \lambda^{-1}\alpha\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^{-1}v & \mathbb{1} \end{pmatrix}$
$HPH^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha v & \mathbb{1} \end{pmatrix}$

è esterno per cambio dalle omologie generali d'asse H_∞ sulle omologie speciali d'asse H_∞ e centro P_0.

Involuzioni: (caratt $K \neq 2$)

Definizione: $F : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività è INVOLUZIONE se:
$F \neq \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$
$F^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$

Osservazione scelto un rif. proiettivo, sia A la matrice di F in quel rif, allora le condizioni sono:
$A \neq \alpha\mathbb{1}_n$ per $\alpha \in K^\times$
$A^2 = \alpha\mathbb{1}$ per qualche $\alpha \in K^\times$.
(non necess $= \mathbb{1}_n$, ...)

Esempi: se K è tale che $K^{\square} = \{x^2 : x \in K\} = K$
(Chiaro se vero $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$, se K finito....)
allora possiamo caratterizzare le involuzioni con la base di Jordan:

> F è involuzione sse A diagonalizzabile con due autovalori OPPOSTI.
>
> sse $\mathbb{P}(V)$ ha due sottospazi complementari di punti unitti relativi ad autovalori opposti

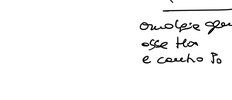
infatti $A^2 = \alpha\mathbb{1} = \beta^2\mathbb{1}$
dunque A soddisfa ciò per $X^2 - \beta^2 = 0$
ciò per minimo di A è $(X+\beta)(X-\beta)$
(è diviso, ma $\neq X \pm \beta$, altrimenti $F = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$)

che ha per soluzioni ($\in A$ diagonalizz.) opposte tra loro.

quindi in base $v_0, \dots, v_k$, $v_{k+1}, \dots, v_n$: $A \sim \left(\begin{array}{c|c} \beta\mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -\beta\mathbb{1} \end{array}\right)$
autov. β, autovett β

ovvero: $L = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$: $L \wedge M = \emptyset_{\mathbb{P}}$
$M = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$ $L \vee M = \mathbb{P}$
coppie di punti unitti con autovalori $\beta, -\beta$ opposti. //

Osservazioni geometriche:



$(P, Q, X, \varphi X)$ = rapporto anarm $= -1$
"armonico dopo $P \varphi X$"
PQ dividono armonicamente $X, \varphi X$.

Nota nel caso $K = \mathbb{R}$ possiamo avere involuzioni senza punti unitti (reali!)

matrici con polinomio minimo $X^2 + 1$ sono involuzioni proiettive $F^2 = -\mathbb{1} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$
esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{F} \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$
$A^2 = -\mathbb{1}_2$ $F^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$
ma non ha punti unitti in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$
(ci ha in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ quindi 2 autovalori opposti, 2 autovettori indipend.)

Involuzioni sulle rette proiettive:

$F : \mathbb{P}^1(K) \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$
allora:
da un punto di vista algebrico:
- o ha due punti unitti (sol $\alpha \pm \beta$) su $\mathbb{P}^1(K)$
- oppure no, e allora ha 2 punti unitti in una estensione quadratica di K, in cui si spezza x^2 del discriminante ($X^2 = \alpha \rightsquigarrow \Delta = \alpha$: due punti unitti in $\mathbb{P}^1(K[\sqrt{\Delta}])$).

da un punto di vista geometrico:

Nota: invece nei caratteristica 2 (per es. $K = \mathbb{F}_2$) abbiamo involuzioni con 1 solo punto unito
per esempio $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)}$, perché $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha^2 \mathbb{1}_2$ //

05/06/2023

punto di vista geometrico: $F : \mathbb{P}^1(K) \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ proiettività:

① se $\exists P, Q$: $FP = Q$, $FQ = P$ (COPPIA INVOLUTORIA) allora F è involuzione, ma non è univocamente definita (ci sono tante involuzioni che scambiano P e Q tra loro!)
infatti usando un riferimento con $P_0 = P$, $P_1 = Q$ otteniamo che F ha matrice del tipo
$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ e $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} = \alpha\beta\mathbb{1}_2$
$FP = Q$ $FQ = P$
$\equiv \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $F^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1(K)}$.

② se F ha due punti unitti con autovalori opposti, allora è involuzione ed è unica con questi 2 punti unitti (ha 2 punti unitti E IN rapporto tra due autovalori $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in rif che usa come 2 punti unitti).

Involuzioni ⊆ Proiettività

composizione di involuzioni? di solito non è involuzione (a meno che non commutino tra loro....)
|| qual è il più piccolo sottogruppo che contiene le involuzioni?

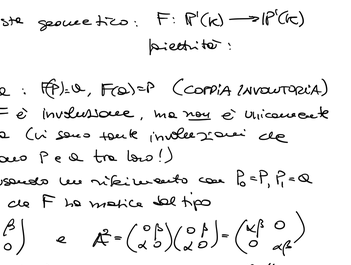
Quadrati?
quadrati di involuzioni sono involuzioni (se $A^2 = \alpha\mathbb{1}$ allora $(A^2)^2 = \alpha\mathbb{1}$)

Relazione con gli spazi affini:

dato $F : \mathbb{P}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$ involuzione, allora F ha due sottospazi L, M complementari, di p.u. relativi ad entrambi gli autovalori opposti,
se uno dei due è contenuto in H_∞ ($x_0 = 0$), es L allora
F è una simmetria di direzione quel sottospazio.

rispetto ai quali opportuno riferimento affine ($P_0 \in \mathbb{A}^n(K)$, $P_1, \dots, P_n \in H_\infty$) la matrice di F sarà del tipo: $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1} \end{array}\right)_L$
(ie sottospazio parallelo $L \leq H_\infty$ è direzione vettoriale per sottospazi affini, non dei sottosp. affine $L \cap \mathbb{A}^n(K) = \emptyset$).

Osservazione:



Quali sono le proiettività che sono sia omologie sia involuzioni?
sono le omologie speciali con autovalori opposti, quindi:
se sono affinità devono essere riflessioni (simmetrie) rispetto ad un iperpiano.

(nel caso $\mathbb{R}$ dà un suggerimento per capire che sottogruppo viene generato usando involuzioni e/o omologie ....)