TRASFORMAZIONI TRA SPAZI PROIETTIVI

Di quanto la dimensione cambia quando $V = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$ / $\text{Ker}(\varphi) \oplus W$ / $V \oplus \text{Ker}(\varphi)$ / $V \oplus W$?

- $\dim(\text{Ker}(\varphi))$
- $\dim(\text{Im}(\varphi))$
- $\dim(V)$
- $\dim(W)$

$\Rightarrow$ Proiettiva $\Rightarrow$ Affine (con iperpiano ∞)
$\Rightarrow$ Proiettiva (con iperpiano ∞)
$\Rightarrow$ Grassmaniana (con iperpiano ∞)

Definizione: Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ due spazi proiettivi allora una funzione $F: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice di TRASFORMAZIONE PROIETTIVA (o PROIETTIVITÀ) (o OMOGRAFIA) se:

- $\exists$ φ lineare tra spazi vettoriali $\varphi: V \to W$
- tale che: $\forall [v] \in \mathbb{P}(V)$ $F([v]) = [\varphi(v)]$

Osservazioni iniziali:

(1) La funzione identità $\text{Id}: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è proiettiva e la classe proiettiva che la rappresenta è quella delle matrici scalari, ovvero $\{\lambda \cdot \text{Id}_{V} \mid \lambda \neq 0\} \in \mathbb{P}(\text{End}(V))$

(2) Se $F: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è proiettiva con $\varphi: V \to W$ tale che $F = [\varphi]$ e $G: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(U)$ proiettiva con $\psi: W \to U$ tale che $G = [\psi]$ allora $G \circ F: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(U)$ è proiettiva con $G \circ F = [\psi \circ \varphi]$

(3) $V = U \oplus W$

$\pi_U: V \to U$ proiezione su U parallelo a W
$\pi_W: V \to W$ proiezione su W parallelo a U

$\pi_U(v) = u$ se $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$
$\pi_W(v) = w$ se $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$

$\pi_U + \pi_W = \text{Id}_V$

$\pi_U \circ \pi_W = 0$ $\quad \pi_W \circ \pi_U = 0$

$\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$ $\quad \pi_W \circ \pi_W = \pi_W$

$\text{Im}(\pi_U) = U$ $\quad \text{Ker}(\pi_U) = W$

$\text{Im}(\pi_W) = W$ $\quad \text{Ker}(\pi_W) = U$

π_U è la proiezione di V su U parallelamente a W

π_W è la proiezione di V su W parallelamente a U

(4) Se $V = U \oplus W = U \oplus T$ allora abbiamo $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\pi_W} \mathbb{P}(U/W) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(U)$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\mathbb{P}(W))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U)$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{Hom}(W, U))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{Hom}(T, U))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{Hom}(T, W))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{Hom}(W, T))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{Hom}(W, W))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{End}(W))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{End}(T))$

$\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{End}(U))$

Proiezione da $\mathbb{P}(U)$ a $\mathbb{P}(V/W)$ di centro $\mathbb{P}(W)$

16/05/2023

Problema: $\exists$ $S = (X, Y, Z) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ tipo proiettivo? (Cioè: $\exists$ triangolo $T \in \mathbb{P}(V)$ a meno di $\text{PGL}(V)$?)

Equivalenza con una funzione $F: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$

$\exists$ legame $\exists$ $\forall \to \forall'$ diverse tale che $\mathbb{P}^3(V) \xrightarrow{F} \mathbb{P}^3(V)$ per $S \in \mathbb{P}(V)$ $\quad F([v]) = [\varphi(v)]$ per ogni $v \in V$ (v vettore di $\mathbb{R}$-spazio, diverso da $\vec{0}$ spazio vettoriale)

F ha punti uniti $\Leftrightarrow \exists [v] \in \mathbb{P}(V)$ t.c. $F([v]) = [v]$

Idea: Un sd problema tra complessi: $\exists$ punto fisso di φ? $\Leftrightarrow$ $\exists$ punto fisso di $\varphi|_{\text{proiettivizzato}}$?

Usiamo gli assi proiettivi di proiettività come sistema di riferimento.

Nota: sul complesso dei complessi: $\text{Im}(\varphi)$ è φ di punti di $\mathbb{P}$ che hanno immagine sul $\mathbb{P}$ (non punto proprio di $\mathbb{P}$)

F dà funzione $F: \mathbb{P}(\text{Ker}) \to \mathbb{P}$

Nota: $\text{Im}\,\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$ formula delle dimensioni.

Aldo riformulato:

(1) Esempio per un punto di $\mathbb{P}$ fisso da $\mathbb{P}$ proiettivo: fra due sottospazi di codim m complementari esiste

$V = U \oplus W$ $\quad$ $U \subset V \to V$

$U \subset V \to V/W$

$U \to K$ $\quad$ $\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(K)$ $\quad$ $\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(\text{Im}) = \mathbb{P}(\text{Ker})$

$(X \cup W) \cap U$ $\quad$ $\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U)$

Vicecom? cioè ha senso che tutte le proiettività siano proiezioni rispettivo ?

(2) $X, Y, ?$ allineati $\Rightarrow$ $F(X), F(Y), F(?)$ anche!

Dimostra che proiettività danno COLLINEAZIONI, viceversa?

---

(1) Se $F \in$ trasformazione allora $\exists$ sd: $\exists \lambda: V \to W$ t.c. $\mathbb{P}(\text{Ker}(\varphi)) = \text{sottoinsieme } \mathbb{P}(U)$ $\forall U \subset V$

Problema: Quando è [buona] definizione una funzione tra spazi proiettivi? Ci basta φ?

Suggerimento: $\exists$ φ lineare che induce F ci basta che φ mandi sottospazi in sottospazi della stessa dimensione?

Se φ è iniettiva $\ker(\varphi) = \{0\}$ allora $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(V)$

Se φ è suriettiva $\mathbb{P}(\text{Im}(\varphi)) = \mathbb{P}(W)$

Se φ è biiettiva $\mathbb{P}(\text{Im}(\varphi)) = \mathbb{P}(W)$ e $\dim(V) = \dim(W)$

Se φ è biiettiva allora φ è invertibile

Se φ è biiettiva allora φ^{-1} è lineare

Se φ è biiettiva allora φ è un isomorfismo di spazi vettoriali