Organizzazione finale: lezioni fino a venerdì 9/6 (usando anche le ore di fisica)

→ solo 2° prova parte B. Negli APPELLI SCRITTI ci sarà sempre sia parte A (prime 2 ore) sia parte B (seconde 2 ore)

→ 2° compitino venerdì 16/6 (ricevimento in aula mer 14/6)

---

dai birapporti possiamo ricavare invarianti:
affini, euclidei, euclidei
(rapp. semplici) (angoli) (distanze)

le lezioni proiettive si possono ottenere varie versioni
dei risultati affini, euclidei;
(e anzi: ogni teorema affine è caso particolare
di un teorema proiettivo, spesso più semplice)

Ricordiamo le notazioni nel caso standard

lo spazio proiettivo, affine, euclideo:

$\mathbb{P}^n(K) \supseteq \mathbb{A}^n(K) \rightsquigarrow \mathbb{E}^n(K)$ $(K=\mathbb{R})$

$\mathbb{P}^n(K) \simeq K^{n+1}/K^*$; $\mathbb{A}^n(K) \simeq K^n$

$\mathbb{E}^n(K)$: distanza del 2° punto dall'origine $\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

$\langle v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$ $x_0 \neq 0$ $\leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1/x_0 \\ \vdots \\ x_n/x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$x_0 \to 0$ $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle$ punto non in $\mathbb{P}^n(K)$ di tutte le rette affini del tipo $P + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_1^2 + \dots + y_n^2 = 0 \end{cases}$

esempio $\mathbb{P}^2(K) = \mathbb{A}^2(K) \cup$ retta ∞ $\mathbb{P}^1(K)$

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{smallmatrix}\right)$ punti ciclici del piano!

$\mathbb{P}^3(K) = \mathbb{A}^3(K) \cup$ Universo

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$ molte soluzioni! $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm i \end{smallmatrix}\right)$ una $\mathbb{P}^1$ di ∞^1 punti

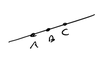
Nota: i punti ciclici sono gli zeri di $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \end{cases}$

quindi si trovano in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, non in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$,
ma lavoriamo sempre $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
e usiamo i punti complessi se servono!

Birapporti e rapporti semplici affini:

$R \simeq \mathbb{A}^1(K)$, $A,B,C \in R$ rapporto semplice $(ABC) := \frac{C-A}{C-B}$



rapporto dei 2 vettori di R, pensati risultato $\in K$

$R \subseteq \mathbb{A}^1(K) \subseteq \mathbb{P}^1(K)$

$R^\infty = R \cup \{$punto all'infinito$\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in K\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
$\uparrow$ ottenuto aggiungendo a R un punto all'infinito

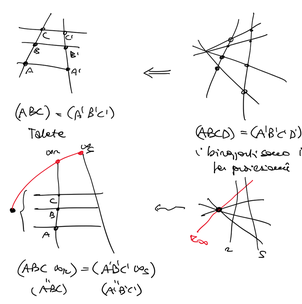
ci sono 4 punti $A,B,C,\infty_R \in R^\infty$ e calcoliamo il birapporto $(ABC\infty) = \frac{C-A}{C-B} \cdot \frac{\infty - B}{\infty - A} = (ABC)$

Nota: il rapporto semplice (ABC) tra tre punti affini della retta R è lo stesso il birapporto dei 4 punti $ABC\infty_R$ dove ∞_R è il punto all'infinito della retta R.

Nota: possiamo anche vedere il birapporto tra 4 punti AFFINI di una retta come rapporto di rapporti semplici:

$(ABCD) = \frac{C-A}{C-B} \cdot \frac{D-B}{D-A} = (ABC)/(ABD)$

Osservazione:

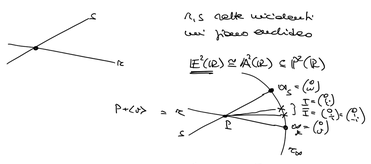


Questioni di ARMONIA:

$(ABC) = -1$ sse $(ABC, \omega_R) = -1$
ABC in armonia

$C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ sse

Calcolo di angoli tramite birapporti (LAGUERRE)

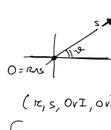


r, s rette incidenti
un piano euclideo

ottenuto 4 rette per P:
r, s, PI, $P\bar{I}$

calcoliamo il birapporto!

scegliamo un riferimento euclideo in modo che r sia asse x, $r \cap s$ sia origine, s?



$(r, s, OI, O\bar{I}) = (r\infty_r, s\infty_r, (OI)\infty_r, (O\bar{I})\infty_r) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) \overset{x/x_1}{=}$

$= \left(\infty, \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, i, -i \right)$

$= \left(\infty, \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, -i, i \right)$

$= \frac{i - \infty}{-i - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} \cdot \frac{i - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}{i - \infty}$

$(abcd) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}$ $= \frac{i\sin\vartheta - \cos\vartheta}{-i\sin\vartheta - \cos\vartheta}$

$= \frac{\cos\vartheta - i\sin\vartheta}{\cos\vartheta + i\sin\vartheta} = \frac{e^{-i\vartheta}}{e^{i\vartheta}} = e^{-2i\vartheta}$

$(r, s, OI, O\bar{I}) = (rs, t_{rs}(OI), t_{rs}(O\bar{I})) = (rs, t_{rs}(OI), t_{rs}(O\bar{I}))$

$(rstu) = (rsa, sta, tra, usa)$
rette di un fascio dove a retta fissata

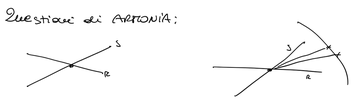
Nota $(r, s, OI, O\bar{I}) = e^{-2i\vartheta}$

dunque $\vartheta = -\frac{1}{2i} \log (R, S, (rs)\bar{rI}, (rs)\bar{rI})$
rette isotrope per rs

Formula di duplicazione!

$= \frac{i}{2} \log (r, s, P, \bar{P})$

Questioni di ARMONIA:



$\vartheta = \frac{i}{2} \log (\quad) \leftrightarrow (r, s, (rs)\bar{vI}, (rs)\bar{vI}) = -1$

$e^{-2i\vartheta} = -1$ $\quad e^{i?} = -1$

$\Downarrow$ $\quad$ $\overset{h}{\cos}? + i\sin?$

$-2i\vartheta = i\pi$ $\quad ? = \pi$

$2\vartheta = \pi$ $\quad \vartheta = \pi/2$ $\quad$ rette ortogonali!

date r, s rette incidenti nel piano euclideo,

spesso vogliamo calcolare le bisettrici b, b'

spesso b, b' sono $\perp$ tra loro

$(r, s, b, b') = -1$

$(b, b', (rs)\bar{vI}, (rs)\bar{vI}) = -1$

Nota: bisettrici di r, s sono le uniche rette che dividono armonicamente r, s (≡ fanno angoli uguali)
e anche i punti ciclici (= sono ortogonali tra loro!)

$(\langle v+w \rangle, \langle v-w \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle) = -1$ $\quad (-1)$

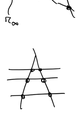
Esempio:

4 rette di un fascio due trasversali: $(\text{retta}\,1\,2) = (\text{retta}\,1'\,2')$ → duale

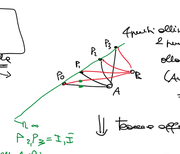
Invariano birapporti le trasversali dei 4 rette di un fascio

$\Downarrow$

tolte



4 punti allineati
2 punti non sulla retta
altro



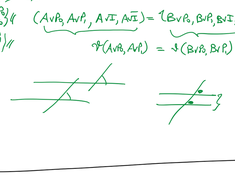
$(AVP_3, AVP, AV\bar{I}, AV\bar{I}) = (BVP_3, BVP, BV\bar{I}, BV\bar{I})$

$\Downarrow$ Fascio affine?

retta AVP_3 // BVP_3
$AVP \parallel AVP_3$

$\vartheta(AVP_3, AVP) = \vartheta(BVP_3, BVP)$

$P_1P_2 = I, \bar{I}$

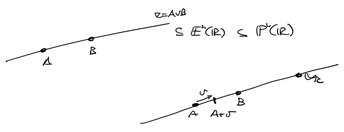


Quindi:
$r \parallel r'$, $s \parallel s' \Rightarrow \vartheta(r,s) = \vartheta(r',s')$ ⇍
$r \parallel r' \iff \vartheta(r,s) = \vartheta(r',s')$
(s trasversale)

---

distanza usando i birapporti

$E = A \vee B \subseteq \mathbb{E}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$



usando il posto di ∞ mettiamo la distanza su $\mathbb{E}^1(\mathbb{R})$ usando il prodotto scalare,
poniamo ugual a v il vettore $v = \frac{B-A}{\|B-A\|}$
allora cerca retta
otteniamo il punto $A+v$

concludiamo:

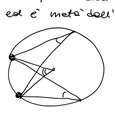
$$\frac{(A+v)-A}{B-A} = \frac{B-A/\|B-A\|}{B-A} = \frac{1}{\|B-A\|}$$

$$\left(\frac{A-B}{A-(A+v)} = \frac{B-A}{(A+v)-A} = \|B-A\| \right.$$
$$\left. = (B, A+v, A, \infty) = (\infty, A, A+v, B) \right)$$

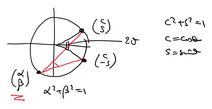
24/05/2023

ALTRO ESEMPIO DI USO DELLA F. LAGUERRE
(e generalizzazione in geom. proiettiva):

Tutti sanno: su ogni circonferenza, dati 2 punti, l'angolo alla circonferenza è sempre lo stesso, ed è metà dell'angolo al centro:



Come possiamo dimostrarlo:



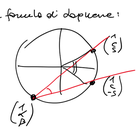
① Consideriamo tre vettori $\binom{c}{s} - \binom{\alpha}{\beta} = \binom{c-\alpha}{s-\beta} = v$

$\binom{c}{-s} - \binom{\alpha}{\beta} = \binom{c-\alpha}{-s-\beta} = w$

$\cos\text{ang} = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \dots$

?

② usando la formula di duplicazione:



per calcolare l'angolo alla circonferenza, calcolo il birapporto:

$\left(\binom{\alpha}{\beta} \vee \binom{c}{s}, \binom{\alpha}{\beta} \vee \binom{c}{-s}, \binom{\alpha}{\beta} \vee \binom{0}{1}, \binom{\alpha}{\beta} \vee \binom{0}{-i} \right) =$ (I, $\bar{I}$)

$=$ birapporto dei 4 punti $\cap$ con $x_0 = 0$ $=$

$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha - c \\ \beta - s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha - c \\ \beta + s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) = e^{-2i\vartheta}$

$\overset{x_0/x_1}{=} \left(\frac{\beta - s}{\alpha - c} \quad \frac{\beta + s}{\alpha - c} \quad i \quad -i \right) =$

$= \left(\beta - s \quad \beta + s \quad i(\alpha - c) \quad -i(\alpha - c) \right) =$

$(abcd)$ $\frac{c-a}{c-b}$ $\frac{d-b}{d-a}$

$= \frac{-i(\alpha - c) + (\beta - s)}{-i(\alpha - c) + (\beta + s)} \cdot \frac{+i(\alpha - c) + (\beta + s)}{+i(\alpha - c) + (\beta - s)} =$

$= \frac{(\beta - s) - i(\alpha - c)}{(\beta - s) + i(\alpha - c)} \cdot \frac{(\beta + s) + i(\alpha - c)}{(\beta + s) - i(\alpha - c)} =$

A C
B D
$\frac{AD}{BD}$ $\frac{CD}{BD}$

$= \frac{((\beta - s) - i(\alpha - c))^2}{(\beta - s)^2 + (\alpha - c)^2} \cdot \frac{(\beta + s) + i(\alpha - c))^2}{(\beta + s)^2 + (\alpha - c)^2} =$

$= \frac{\left[((\beta - s) - i(\alpha - c))((\beta + s) + i(\alpha - c)) \right]^2}{\beta^2 + s^2 - 2\beta s + \alpha^2 + c^2 - 2\alpha c \quad \beta^2 + s^2 + 2\beta s + \alpha^2 + c^2 - 2\alpha c}$

$= \frac{\left[(\beta - s)(\beta + s) + (\alpha - c)^2 + i((\beta - s)(\alpha - c) - (\alpha - c)(\beta + s)) \right]^2}{(2 - 2\beta s - 2\alpha c) \quad (2 + 2\beta s - 2\alpha c)}$

$= \frac{\left[(\beta^2 - s^2 + \alpha^2 + c^2 - 2\alpha c) + i(\alpha - c)(-2s) \right]}{2(1 - \beta s - \alpha c) \quad 2(1 + \beta s - \alpha c)}$

$= \frac{\left[(2c^2 - 2\alpha c) + i(\alpha - c)(-2s) \right]^2}{2 \cdot 2 \left((1 - \alpha c)^2 - \beta^2 s^2 \right)}$ $(+\alpha^2)(+c^2)$

$1 - 2\alpha c + \alpha^2 c^2 - 1 + \alpha^2 + c^2 - \alpha^2 c^2$

$= \frac{4\left[c(c - \alpha) + i(\alpha - c)(-s) \right]^2}{4(\alpha - c)^2} =$

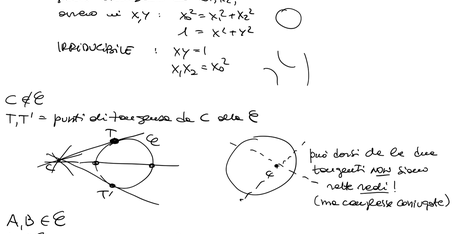
$= \frac{(c-\alpha)^2 \left[c + is \right]^2}{(\alpha - c)^2} = \left(c + is \right)^2 = (e^{i\vartheta})^2 = e^{i2\vartheta}$
$\cos$ $\sin$

$2\vartheta = 2\gamma$ //

③ In realtà, c'è un risultato proiettivo molto più generale!

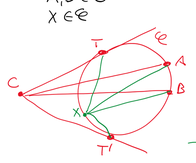
$\mathcal{C}$ = conica irriducibile nel piano $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
(zeri di polinomio di 2° grado omogeneo in $x_0x_1x_2$,
ovvero in x,y: $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$
$1 = x^2 + y^2$
IRRIDUCIBILE: $xy = 1$
$x_1x_2 = x_0^2$

$C \notin \mathcal{C}$
T, T' = punti di tangenza da C alla $\mathcal{C}$



può darsi che le due tangenti non siano rette reali! (ma complesse coniugate)

$A, B \in \mathcal{C}$
$X \in \mathcal{C}$



allora:

$(CVA\ CVB\ CVT\ CVT')$
$\overset{h}{\parallel}$
$(XVA\ XVB\ XVT\ XVT')^2$
(non dipende da X)

Caso speciale: se $\mathcal{C}$ è $X^2 + Y^2 = 1$ $(X_1^2 + X_2^2 = X_0^2)$
e C è centro $\binom{0}{0}$
allora $T = \binom{1}{i}$, $T' = \binom{1}{-i}$

$A, B, X \in \mathcal{C}$

$(CVA\ CVB\ \overset{\text{cicli}}{GT}\ CVT')$ e $(XVA\ XVB\ \overset{\text{cicli}}{XVT}\ XVT')$

$\overset{h}{e^{-2i}}$ angolo centro $\quad$ $\overset{h}{e^{-2i}}$ angolo circonferenza

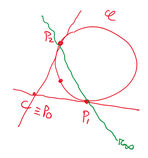
dunque angolo centro = 2 angolo circonf.

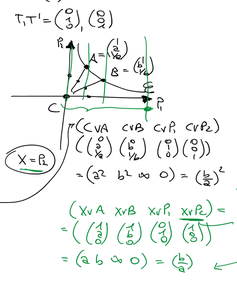
Piccolo esercizio:

tutte le circonferenze del piano euclideo
$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$
$(X_1 - aX_0)^2 + (X_2 - bX_0)^2 = R^2 X_0^2$
passano per i punti ciclici $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ (X_0, X_1, X_2)
$(1 - 0)^2 + (\pm i - 0)^2 = 0$ ✓
e le rette $CV\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $CV\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$
sono tg alla circonferenza
(cioè il sistema $\begin{cases} X^2 + Y^2 = X_0^2 \\ \text{retta } CV\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{cases}$ $-iX_1 + X_2 = 0$
$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$: $(b - ia)$
ha unica soluzione (doppia) nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$).

Come si dimostra che vale questa cosa?

(1) Si può supporre: $\mathcal{C}$: $x_1x_2 = x_0^2$ $(xy = 1)$
$C = \binom{0}{s}$
$T, T' = \binom{0}{1}, \binom{0}{x_2}$

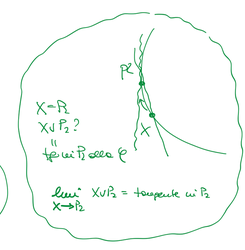




(2) conto

$(CVA\ CVB\ CVP_1\ CVP_2)$
$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
$= (a^2\ b^2\ 1\ 0) = \left(\frac{b}{a} \right)^2$

$(XVA\ XVB\ XVP_1\ XVP_2) =$
$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
$= (a\ b\ 1\ 0) = \left(\frac{b}{a} \right)$



26/05/2023

Note: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$ $\uparrow$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{smallmatrix}\right)$

hanno soluzioni reali

determina il sistema a meno di scalare $\neq 0$.