Riassunto:

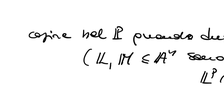
spazio proiettivo associato a V ($\mathbb{K}$-sp vett di dim $n+1$ su $\mathbb{K}$) (su $\mathbb{K}$ di dim'ne 4) è $\mathcal{L}(V) := \{W \leq V\}$, $\mathbb{P}(V) := \{\langle v\rangle : v \in V, v \neq 0\} \subseteq \mathcal{L}(V)$ (reticolo (non distributivo))

in particolare $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}(V_{n+1}(\mathbb{K})) \cong \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ in cui $x_0 \neq 0$

in generale uno spazio proiettivo è $(\mathbb{P}, V, \alpha)$ dove $\mathbb{P}$ insieme, V sp. vett/$\mathbb{K}$ dim $n+1$, α biiezione $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}(V)$

se $W \leq V$ allora $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(V)$, $*(W) = \{U \leq V : U \geq W\} \cong \mathbb{P}(V/W)$

se $S = (\mathbb{P}, V, \alpha)$ è spazio proiettivo ($\alpha : \mathbb{P} \to \mathcal{L}(V)$) allora $S^* = (\mathbb{P}, V^*, \alpha^*)$ è SPAZIO DUALE di (S, V, α)



punti di $\mathbb{P} \equiv$ iperpiani di S^*

Principio di dualità proiettivo: $\mathcal{A} = \mathcal{A}(<, \wedge, \vee, \emptyset_{\mathbb{P}}, \mathbb{P}, \dim_{\mathbb{P}}, \ldots)$ (struttura di reticolo) è vera nel sp proiettivo

$\Updownarrow$

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(\geq, \vee, \wedge, \mathbb{P}, \emptyset_{\mathbb{P}}, n - \dim_{\mathbb{P}} - 1, \ldots)$

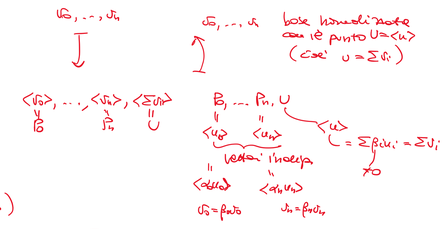
(dato $W \leq V$ dimensione $n+1$ che dim ha $W^\perp \leq V^*$?)

Sistema di rif proiettivo = "scelta generica di $n+2$ punti per ottenere una biiezione con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$"

(0) una base di V a meno di moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ $v_0, v_1, \ldots, v_n$ ($\dim_{\mathbb{K}} V = n+1$)

(1) $n+2$ punti in posizione generale (= qualsiasi $n+1$ tra loro generano $\mathbb{P}$) $P_0, P_1, \ldots, P_n, U$ (punto unità, punti fondamentali)

(1') $n+2$ iperpiani in posizione generale (= qualsiasi $n+1$ tra loro si intersecano nel $\emptyset_{\mathbb{P}}$)



Sist rif $\Rightarrow$ $\mathbb{P} \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, $P = \langle v\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{R}}(P)$ se $v = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$, $\begin{pmatrix} \lambda\alpha_0 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$

Dualità:

problema:

in $\mathbb{P}^n$, date $s > 1$ rette ($n \geq 3$: es. $\mathbb{P}^3$) supponiamo che siano a 2 a 2 incidenti allora:
- o passano tutte per lo stesso punto
- e/o stanno tutte sullo stesso piano!

(duale?)

osservazione: L, M sottosp proiettivi di $\mathbb{P}$, supponiamo: $\dim_{\mathbb{P}} L + \dim_{\mathbb{P}} M = \dim_{\mathbb{P}}(L \vee M) + \dim_{\mathbb{P}}(L \wedge M)$

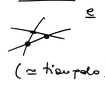
(duale?)

Osservazione:

triangolo = tre punti in posizione generale (VERTICI) e le tre rette congiungenti (LATI)

duale nel piano: (2-dim-1) tridotto tre rette in posizione generale e i tre punti di intersezione

(6) punti $\mapsto$ rette (2) rette $\mapsto$ punti



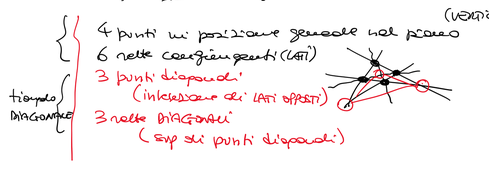
($\simeq$ triangolo)

3-dim-1 nello spazio: tripiano: tre piani in posizione generale e le tre rette di intersezione

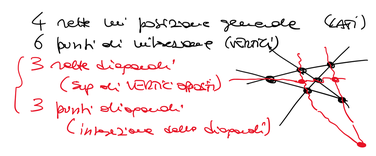
(punti $\leftrightarrow$ piani, rette $\leftrightarrow$ rette, piani $\leftrightarrow$ punti)

nel $\mathbb{P}^4$:

Quadrilatero piano completo =



Dualità: Quadrilatero piano completo



Problema: il triangolo dipende DETERMINA il quadrilatero? quanti/quali quadrilateri hanno lo stesso triangolo diagonale?

(suggerimento: dato il Δ diagonale si ricostruisce il quadrilatero)

Relazione tra spazi proiettivi e spazi affini:

$\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, $\mathbb{P} \mapsto \langle \binom{1}{P} \rangle$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus$ "iperpiano di equazione $x_0 = 0$"

relazione tra sottospazi proiettivi e affini:

$\{$sottospazi $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})\} \rightleftarrows \{$sottospazi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})\}$

$\mathbb{L} = P + \langle v_1, \ldots, v_s\rangle = P, v_1, \ldots, v_s \mapsto$ completamento proiettivo $= \mathbb{P}(\langle \binom{1}{P}, \binom{0}{v_1}, \ldots, \binom{0}{v_s}\rangle)$ (più piccolo sottospazio affine che contiene $\mathbb{L}$ (sono in $\mathbb{P}$))

$= \mathbb{P}(\langle \binom{1}{P}, \binom{1}{Q}\rangle)$

(equazioni $AX = b \mapsto A\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b x_0$)

Scheletro affine $L \cap \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ $\longleftrightarrow$ sottospazio proiettivo $L = \mathbb{P}(W)$

$\emptyset \longleftrightarrow \{$iperpiano $x_0 = 0\}$

Problema usando $\mathbb{P}$: sottosp $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \rightleftarrows$ sottosp $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, $\mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{L}^{\mathbb{P}}$, $L^{\mathbb{A}} = L \cap \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \hookleftarrow L$

studiare le composizioni: $(\mathbb{L}^{\mathbb{P}})^{\mathbb{A}} \stackrel{?}{=} \mathbb{L}$, $(L^{\mathbb{A}})^{\mathbb{P}} \stackrel{?}{\leq} L$ (quanto è $=$?)

capire nel $\mathbb{P}$ quando due sottosp affini sono $\parallel$. ($\mathbb{L}, \mathbb{M} \in \mathbb{A}^n$ sono $\parallel$ sse $\mathbb{L}^{\mathbb{P}} \cap \mathbb{M}^{\mathbb{P}} \neq \emptyset$ $\leq$ iperpiano $x_0 = 0$)

Se $\mathbb{P}$ è spazio proiettivo, H è iperpiano di $\mathbb{P}$, allora è definita $\mathbb{P} \setminus H$ (complementare insiemistico di H) è spazio affine (della stessa dimensione di $\mathbb{P}$).

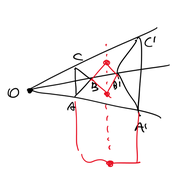
Anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus$ "iperpiano $x_0 = 0$" è spazio affine (della stessa dimensione di $\mathbb{P}$).

Quindi possiamo usare un riferimento in cui H ha equazione $x_0 = 0$, e allora siamo nel caso precedente!

Teorema di DESARGUES:

ipotesi: A, B, C vertici (senza vertici né lati coincidenti) AB, AC, BC lati a, b, c rette; A', B', C'.

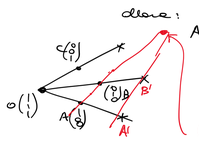
due triangoli in $\mathbb{P}^n$ sono PROSPETTIVI (AA', BB', CC' sono concorrenti) sse sono OMOLOGICI ($a \cap a', b \cap b', c \cap c'$ sono allineati)



dimostrazione nel piano: ($\Leftarrow$ vale anche $\Rightarrow$)

Scegliamo un sist di rif in cui: $A = \binom{1}{0}$, $B = \binom{0}{0}$, $C = \binom{0}{1}$, $O = \binom{1}{1}$

allora: $A' \in OA$, $B' \in OB$, $C' \in OC$



$A' = \binom{1+a}{1}$, $B' = \binom{1+b}{1}$, $C' = \binom{1}{1+c}$

punto di coordinate $((\binom{1}{0} \times \binom{0}{1}) \times (\binom{1+a}{1} \times \binom{1+b}{1}))$

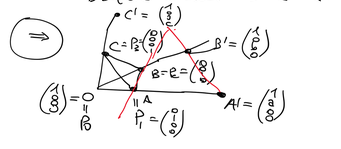
$c \wedge c'$	$b \wedge b'$	$a \wedge a'$
$(A \vee B) \wedge (A' \vee B')$	$(A \vee C) \wedge (A' \vee C')$	$(B \vee C) \wedge (B' \vee C')$
$\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}$

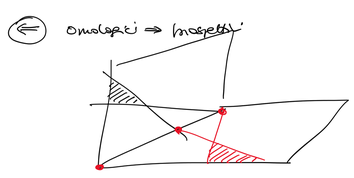
sono allineati sse $\det \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -b & 0 & b \\ 0 & -c & -c \end{pmatrix} = 0$

basta calcolare $\det \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & -b \\ -c & -c & 0 \end{pmatrix} = abc - abc = 0$ //

dimostrazione nello spazio $\mathbb{P}^3$:

basta provare $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$





punto $(A \vee B) \wedge (A' \vee B')$: $\binom{\alpha}{0} \vee \binom{\beta}{0} = \alpha\binom{1}{0} + \beta\binom{0}{0} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, $\lambda = 1$, $\beta = -1$, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$

$(A \vee C) \wedge (A' \vee C')$: $\binom{\alpha}{0} \vee \binom{\beta}{0}$, $\binom{1}{0} \vee \binom{1}{0}$, $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$

$(B \vee C) \wedge (B' \vee C')$: $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$

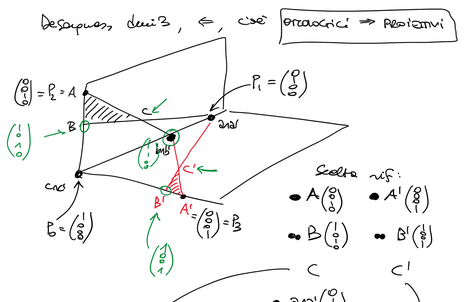
$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -c & 0 & b \\ 0 & 0 & -c & -c \end{pmatrix} = 2$ sse i tre punti sono allineati (tre vettori di RENDERSI!)

$\uparrow$ III = II - I //

(Nel caso affine?)

15/03/2023 -

Desargues, dim 3, $\Leftarrow$, cioè omologici $\Rightarrow$ proiettivi



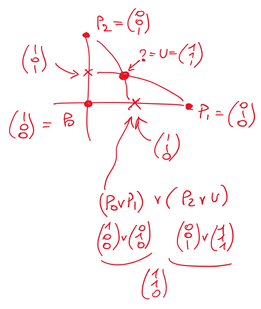
Scelta rif:
- $A\binom{0}{0}$
- $A'\binom{0}{0}$
- $B\binom{1}{0}$
- $B'\binom{0}{1}$

C:
- $aa'\binom{0}{1}$
- $cc'\binom{1}{0}$
- $bb'\binom{1}{0}$

C': $AC' \wedge B'C'$, $(A' \vee bb') \wedge (B' \vee aa')$, $(\binom{0}{1} \vee \binom{1}{0}) \wedge (\binom{1}{0} \vee \binom{0}{0})$, $C' = \binom{1}{1}$

$AC \wedge BC$, $(A \vee bb') \wedge (B \vee aa')$, $(\binom{0}{0} \vee \binom{1}{0}) \wedge (\binom{1}{0} \vee \binom{0}{0})$, $C = \binom{1}{0}$

astuzia:



$(P_0 \vee P_1) \vee (P_2 \vee U)$, $\binom{1}{0} \vee \binom{0}{0}$, $\binom{0}{1} \vee \binom{1}{1}$, $\binom{1}{0}$

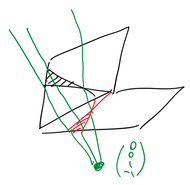
$U \in U_1 \vee P_0 \vee P_2$
$\in U_2 \vee P_1 \vee P_2$
$\in U_3 \vee P_1 \vee P_0$

Ora basta concludere che le 3 rette AA', BB', CC' sono rette di un $\mathbb{P}^2$ (questo dice che ABC e $A'B'C'$ sono prospettivi):

$\begin{cases} AvA' = \binom{0}{0}\vee\binom{0}{0} = \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BvB' = \binom{1}{0}\vee\binom{1}{0} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_0 + x_1 + x_3 = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \\ CvC' = \binom{1}{1}\vee\binom{1}{1} = \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ -x_0 + x_1 + x_3 = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ unica sol $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

punto $\in AA'$, BB', CC' //



Suggerimento: esercizio ③ della parte B dell'esame scorso.

"cultura generale":
se dimostriamo gli spazi proiettivi USANDO un ANELLO invece di un CAMPO?

$\mathbb{P} = \mathbb{P}^n(R)$ (R anello):

se in $\mathbb{P}$ vale Desargues $\Rightarrow$ R è CORPO

se in $\mathbb{P}$ vale Pappo $\Rightarrow$ R è CAMPO

note: Pappo $\Rightarrow$ Desargue

(serve applicare 3 volte il teorema di Pappo per ottenere quello di Des.)

sfida!