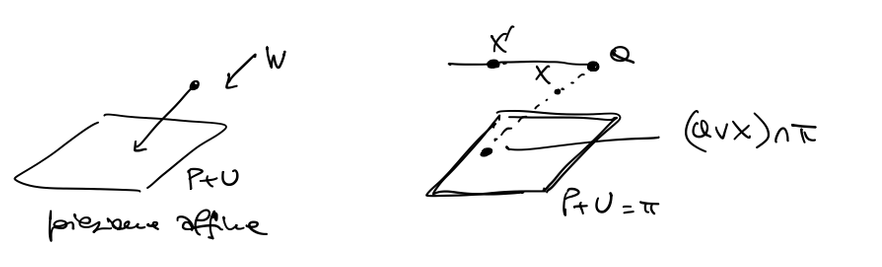
Geo1-22/3-81-GeoPro-1

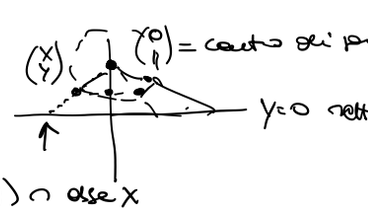
lunedì 8 maggio 2023 08:30

Geometria Proiettiva:
- definizioni base (punti/sottosp....)
  DUALITÀ PROIETTIVA
- COORDINATE PROIETTIVE
  ⇝ teoremi classici PAPPO/DESARGUES
  ⇝ calcolo BIRAPPORTI
- TRASF. PROIETTIVE /PROIETTIVITÀ (involuzioni, omologie ...)
- applicazioni geometriche

Motivazioni:
- Proiezioni di centro affine in spazi affini ←
- Intersezioni di sottospazi affini
- "rimozione" della necessità di RISOLVERE SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI



$(Q\vee X)\cap\pi$



$\binom{0}{1}$ = centro di proiezione

$\left(\binom{x}{y}\vee\binom{0}{1}\right)\cap$ asse x

{ retta $\binom{x}{y}\vee\binom{0}{1}$ ← non orizzontale!
retta $y=0$

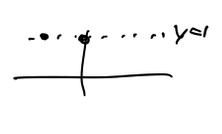
$\binom{0}{1}+t\binom{x-0}{y-1}=\binom{tx}{1+t(y-1)}\in$ asse x

$\Leftrightarrow 1+t(y-1)=0$

$t=\frac{1}{1-y}$

dunque $\boxed{\binom{x}{y}\longmapsto\binom{x/(1-y)}{0}}$

non è definita se $y=1$



Problema: in generale $\mathbb{A}^n$, H iperpiano, $P\notin H$

la funzione: $X\longmapsto(P\vee X)\cap H$

$\mathbb{A}^n\setminus\{$punti dell'iperpiano per P ∥ H$\}\longrightarrow H$

è data da funzioni lineari FRATTE con denominatore "sempre lo stesso".

Sia $AX=b$ un sistema non (necess.) omog.:

vediamo: ① $AX=0$ "omogeneo associato"

② $AX=b$ "ha soluzione?" sì: $\boxed{b_0+\mathrm{sol}(AX=0)}$; no: ∅

$b_0+(\text{Sp. vett. soluzioni di } AX=0)$
$v\in$

-b₀ ↗ v b₀+dv

Studiamo il sistema OMOGENEIZZATO aggiungendo una incognita:

$AX=b \rightsquigarrow AX=bX_0$

$\boxed{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$ $\quad\boxed{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1X_0\\ \vdots\\ b_mX_0\end{pmatrix}$ $\quad m\underset{n}{\boxed{A}}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}X_0=0$

$m\underbrace{\left(\begin{matrix}-b_1\\-b_2\\ \vdots\\-b_m\end{matrix}\ \boxed{A}\right)}_{n+1}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}a_1X_1+a_2X_2=c_1\\ b_1X_1+b_2X_2=c_2\end{cases}\rightsquigarrow\begin{cases}a_1X_1+a_2X_2=c_1X_0\\ b_1X_1+b_2X_2=c_2X_0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}\binom{X_1}{X_2}=\binom{c_1}{c_2}$ $\quad\begin{cases}-c_1X_0+a_1X_1+a_2X_2=0\\-c_2X_0+b_1X_1+b_2X_2=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}-c_1&a_1&a_2\\-c_2&b_1&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\X_2\end{pmatrix}=\binom{0}{0}$

Confrontiamo le soluzioni di $AX=b$ con quelle di $AX=bX_0$

$\underline{Y}$ soluzione di $AX=b_0$ $(A\underline{Y}=b_0)$ ⇝ $\binom{1}{\underline{Y}}$ soddisfa $AX=bX_0$ ($\underline{Y}$, 1)

può tutto $\left\langle\binom{1}{\underline{Y}}\right\rangle$ anche.

v soluzione di $Av=0$ ⇝ $\binom{0}{v}$ soddisfa $AX=bX_0$ (v, 0)

può tutto $\left\langle\binom{0}{v}\right\rangle$ anche

⟵ se $\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}$ soluzione di $AX=bX_0$

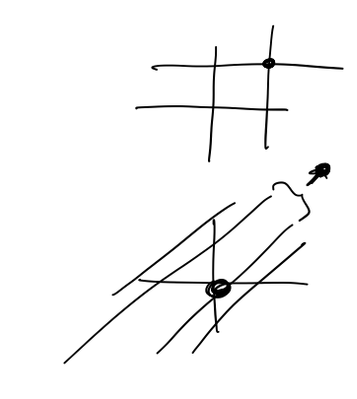
allora $\left\langle\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}\right\rangle$ idem.

poi $X_0=0$: $\begin{pmatrix}0\\X_1\\ \vdots\end{pmatrix}$ ⟶ $\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}$ soddisfa $AX=0$

$X_0\neq0$: $\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1\\X_1/X_0\\ \vdots\\X_n/X_0\end{pmatrix}$ ⟶ $\begin{pmatrix}X_1/X_0\\ \vdots\\X_n/X_0\end{pmatrix}$ soddisfa $AX=b$

$AX=0$: $\left\langle\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}\right\rangle$ ← $X_0=0$ ← $\left\langle\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\ \vdots\\X_n\end{pmatrix}\right\rangle$

$AX=b$: $\left\{\begin{pmatrix}X_1/X_0\\ \vdots\\X_n/X_0\end{pmatrix}\right\}$ ← $X_0\neq0$

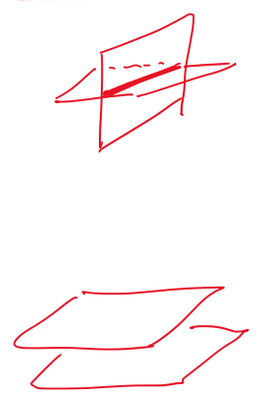


$\begin{cases}X=a\\Y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=aX_0\\X_2=bX_0\end{cases}$

$\left\{\binom{a}{b}\right\}\longleftrightarrow\left\langle\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}\right\rangle$

$\begin{cases}X-Y=0\\X-Y=1\end{cases}$ ∅ ? $\Rightarrow\begin{cases}X_1-X_2=0\\X_1-X_2=X_0\end{cases}$ $\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

Problema: piani in $\mathbb{A}^3$



due piani con ∩ una retta

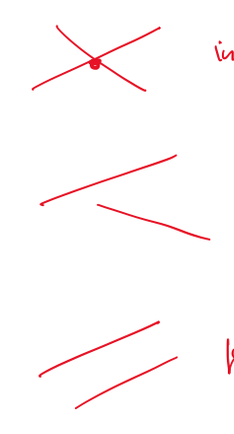
sistema totale: $\begin{cases}X_1+X_2=1\\X_1+X_3=1\end{cases}$ soluzioni?

sistema omogeneizzato? soluzioni?

due piani paralleli

$\begin{cases}X_1+X_2=0\\X_1+X_2=1\end{cases}$ soluzioni?

Problema: rette in $\mathbb{A}^3$ sistema totale? sistema omogeneizzato?



Definizione: V spazio vettoriale su K di dim n+1

diciamo:

SPAZIO PROIETTIVO COMPLETO (associato a V)

$\mathcal{S}(V):=\{$sottospazi vettoriali di V$\}$
$=\{W\leq V\}$

e SPAZIO PROIETTIVO (PUNTEGGIATO) associato a V:

$\mathbb{P}(V):=\{\langle v\rangle\leq V : v\neq0\}$
$=\{$sottosp. vett. di dim 1 di V$\}$
punti di $\mathbb{P}(V)$

Nota $\mathcal{S}(V)$ ha struttura di reticolo usando
l'ordine di inclusione $W_1\leq W_2$
sup $W_1\vee W_2:=W_1+W_2$
inf $W_1\wedge W_2:=W_1\cap W_2$
minimo: $\langle0\rangle=\{0\}$
massimo: V
(attenzione: non è DISTRIBUTIVO ....)

definizione: $W\leq V$, $\in\mathcal{S}(V)$ $\quad\dim_{\mathbb{P}}(W):=\dim_K(W)-1$

esempi: $\dim_{\mathbb{P}}\langle0\rangle=-1$ ← "VUOTO PROIETTIVO"

$v\neq0$ $\dim_{\mathbb{P}}\langle v\rangle=1-1=0$ "PUNTI dello sp. proiettivo"

$\dim_{\mathbb{P}}(V)=\dim_K(V)-1=(n+1)-1=n$.

Caso standard: $V=K^{n+1}$

$\mathbb{P}^n(K):=\mathbb{P}(K^{n+1})$?

$\mathbb{P}^n(K):=\mathbb{P}(K^{n+1})=\left\{\left\langle\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle : \begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\begin{cases}x_0=0 & \left\langle\begin{pmatrix}0\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle\\ x_0\neq0 & \underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\x_1/x_0\\ \vdots\\x_n/x_0\end{pmatrix}\right\rangle}_{\mathbb{A}^n(K)}\end{cases}$

$=\mathbb{A}^n(K)\sqcup\mathbb{P}(\underbrace{H_0(x_0=0)}_{\leq V\ \dim_K n\text{, ha }\dim_{\mathbb{P}}n-1})$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\x_1/x_0\\ \vdots\\x_n/x_0\end{pmatrix} : x_i\in K\right\}$

$=\underbrace{\mathbb{A}^n(K)}_{\text{punti affini di }\mathbb{A}^n(K)}\sqcup\underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(K)}_{\text{direzioni delle rette di }\mathbb{A}^n(K)}$

$\begin{pmatrix}1\\x_1/x_0\\ \vdots\\x_n/x_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1/x_0\\ \vdots\\x_n/x_0\end{pmatrix}$ $\quad\left\langle\begin{pmatrix}0\\y_0\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}\right\rangle$

$=\mathbb{A}^n(K)\sqcup\mathbb{A}^{n-1}(K)\sqcup\mathbb{P}^{n-2}(K)=\dots=\underbrace{\mathbb{A}^n(K)}_{\text{Affine}}\sqcup\underbrace{\mathbb{A}^{n-1}(K)\sqcup\dots\sqcup\underset{\text{rette}}{\mathbb{A}^1(K)}\sqcup\underset{\text{punto}}{\mathbb{A}^0(K)}}_{\text{punti all'}\infty\text{ di }\mathbb{A}^n(K)}$

esempio: $\mathbb{P}^0(K)=\mathbb{P}(K^{0+1})=\mathbb{P}(K)=\{\langle1\rangle\}$
un solo punto!

$\mathbb{P}^1(K)=\mathbb{A}^1(K)\sqcup\mathbb{P}^0(K)=\ \overline{\ \ \ }_{\mathbb{A}^1}\ \sqcup\{\underset{\infty}{\bullet}\}$

$\mathbb{P}^1(K)=\mathbb{P}(K^2)=\left\{\left\langle\binom{x}{y}\right\rangle \mid x,y\neq0,0\right\}$

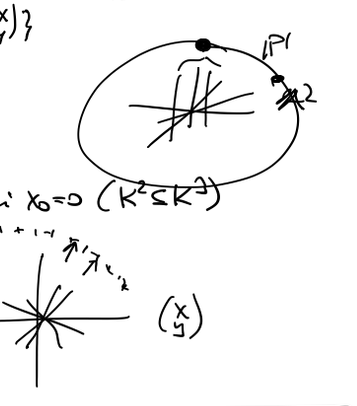
$=\underbrace{\left\{\left\langle\binom{1}{y}\right\rangle\right\}}_{\mathbb{A}^1(K)}\sqcup\underbrace{\left\{\left\langle\binom{0}{z}\right\rangle\right\}}_{1\text{ punto }\langle\binom{0}{z}\rangle=\langle\binom{0}{1}\rangle}$

$\mathbb{P}^2(K)=\mathbb{P}(K^3)=\mathbb{A}^2(K)\sqcup\mathbb{P}^1(K)$

$\left\{\left\langle\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle \mid \text{non }\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\quad\left\langle\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=\left\{\binom{x}{y}\right\}$ $\quad\left\langle\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\binom{a}{b}\right\rangle$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\x_1/x_0\\x_2/x_0\end{pmatrix}\right\}\sqcup\left\{\left\langle\begin{pmatrix}0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle\right\}$ sottosp. vettoriali di dim 1 di $x_0=0$ $(K^2\leq K^3)$

$\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\binom{x}{y}\in\mathbb{A}^2(K)$

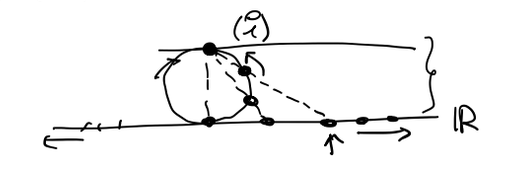


$\boxed{\text{piano affine }\sqcup\text{ "fascio di rette per O"}}$

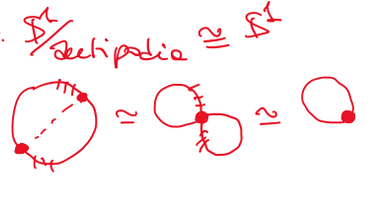
$\mathbb{P}^n(K)=\underbrace{\mathbb{A}^n(K)}_{\text{punti affini}}\sqcup\underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(K)}_{\text{DIREZIONI delle RETTE per O dello spazio }\mathbb{A}^n(K).}$

Usiamo $K=\mathbb{R}$ $\quad=\left\{\left\langle\binom{a}{b}\right\rangle, a,b\neq0,0\right\}\simeq\left\{\left\langle\binom{a}{b}\right\rangle/\|\binom{a}{b}\|\right\}\simeq\left\{\left\langle\binom{a}{b}\right\rangle\ a^2+b^2=1\right\}=\mathbb{S}^1$

allora $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})=\mathbb{A}^1(\mathbb{R})\sqcup\{\infty\}=\mathbb{R}\sqcup\{\infty\}\cong\mathbb{S}^1$



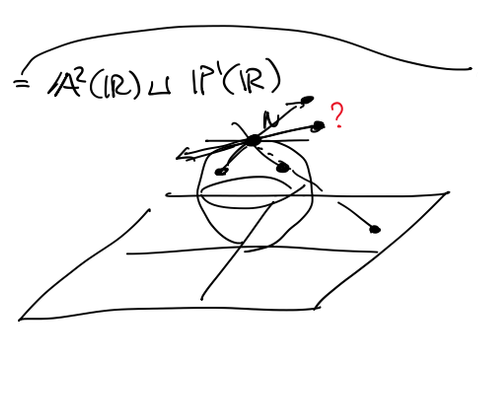
NOTA: $\mathbb{S}^1/$antipodia $\cong\mathbb{S}^1$



$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\cong\mathbb{S}^2$ (sfera reale dim 3!)

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})=\mathbb{A}^2(\mathbb{R})\sqcup\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\simeq\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \mid a,b,c\neq0,0,0\right\}\simeq\left\{\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\rangle \mid \underbrace{a^2+b^2+c^2=1}_{\mathbb{S}^2}\right\}$

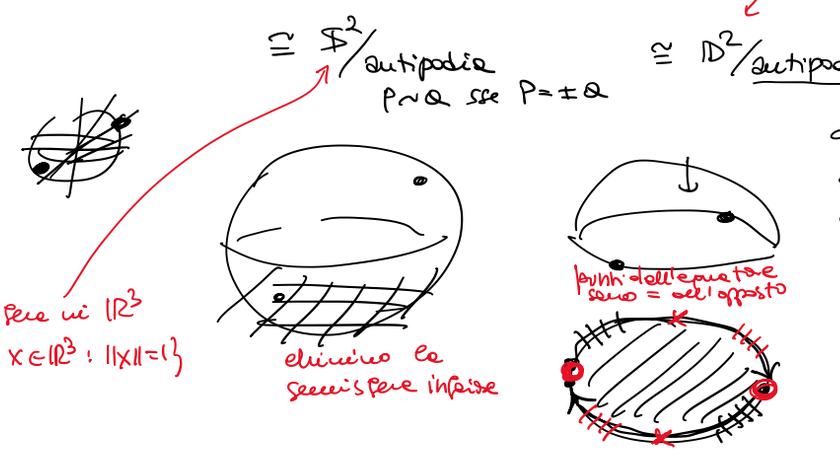


$\simeq\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{S}^2\text{ però }\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\-b\\-c\end{pmatrix}\right\}$

$\simeq\mathbb{S}^2/$antipodia $P\sim Q$ sse $P=\pm Q$ $\quad\cong\mathbb{D}^2/$antipodia del BORDO

$\mathbb{D}^2=$ Disco in $\mathbb{R}^2$
$=\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|\leq1\}$

$\mathbb{S}^2=$ sfera in $\mathbb{R}^3$
$=\{x\in\mathbb{R}^3 : \|x\|=1\}$


elimino la semisfera inferiore
punti dell'equatore sono = all'opposto

Schiacciando la semisfera superiore nel piano si trova il Disco, ma i punti dell'equatore sono da identificare se OPPOSTI.

queste superfici non può essere immerse in $\mathbb{R}^3$ senza AUTOINTERSECARSI! (c'è un Libro su come si realizza $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$: F. APÉRY, modelli di Steiner e Boy)

$\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

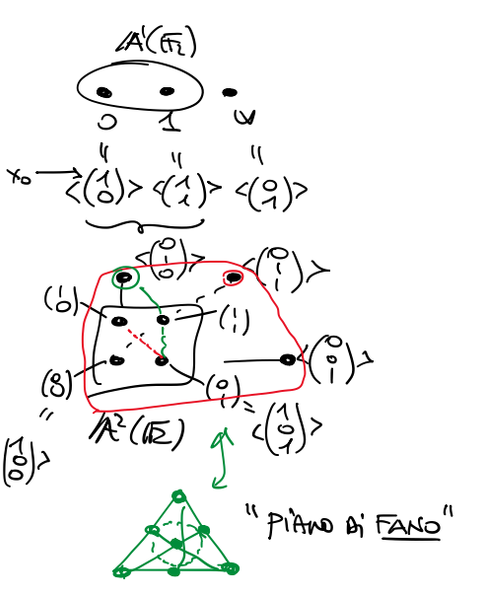
Se $K=\mathbb{F}_2$

$\mathbb{P}^1(K)=\mathbb{A}^1(K)\sqcup\{\infty\}$

$\mathbb{P}^1(K)\times\mathbb{P}^1(K)$ ≠

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)=\underbrace{\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)}_{\substack{4\text{ punti}\\(\text{e 6 rette})}}\sqcup\underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)}_{3\text{ punti}}$

ha 7 punti (e 7 rette)


$\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_2)$
0
1
∞
x_0
$\langle\binom{1}{0}\rangle$ $\langle\binom{1}{1}\rangle$ $\langle\binom{0}{1}\rangle$
$\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$
"PIANO DI FANO"

08/05/2023

Riassunto: V sp.vett./K di dim n+1

sp. proiettivo completo associato a V:
$\mathcal{S}(V)=\{W\leq V\}$ sottospazi di V con struttura di RETICOLO

sp. proiettivo punteggiato
$\mathbb{P}(V)=\{\langle v\rangle\leq V : v\neq0\}\subseteq\mathcal{S}(V)$

$\underset{\text{dimensione proiettiva}}{\dim_{\mathbb{P}}(W)}=\dim_K(W)-1$ ← dimensione vettoriale su K

$\langle0\rangle=\emptyset_{\mathbb{P}}$ VUOTO PROIETTIVO dim = -1
$\langle v\rangle$ con $v\neq0$ PUNTI dim = 0
$\langle v,w\rangle$ con v,w lin. ind. RETTA dim = 1
⋮
$\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ lin. indep. IPERPIANO dim = n-1

Modelli facili:

$\mathbb{P}^n(K)=\mathbb{A}^n(K)\sqcup\mathbb{P}^{n-1}(K)$

$\left\langle\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle$ ⟶ $\left\langle\begin{pmatrix}1\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle$, $\left\langle\begin{pmatrix}0\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle$

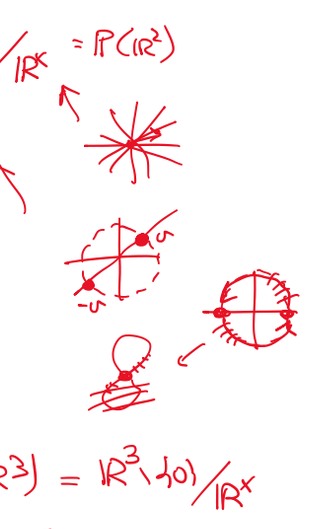
$\mathbb{P}^1(K)=\mathbb{A}^1(K)\sqcup\{\infty\}$ $\quad\binom{1}{x}$, $\left\langle\binom{0}{1}\right\rangle$

$\mathbb{P}^2(K)=\mathbb{A}^2(K)\sqcup\mathbb{P}^1(K)$

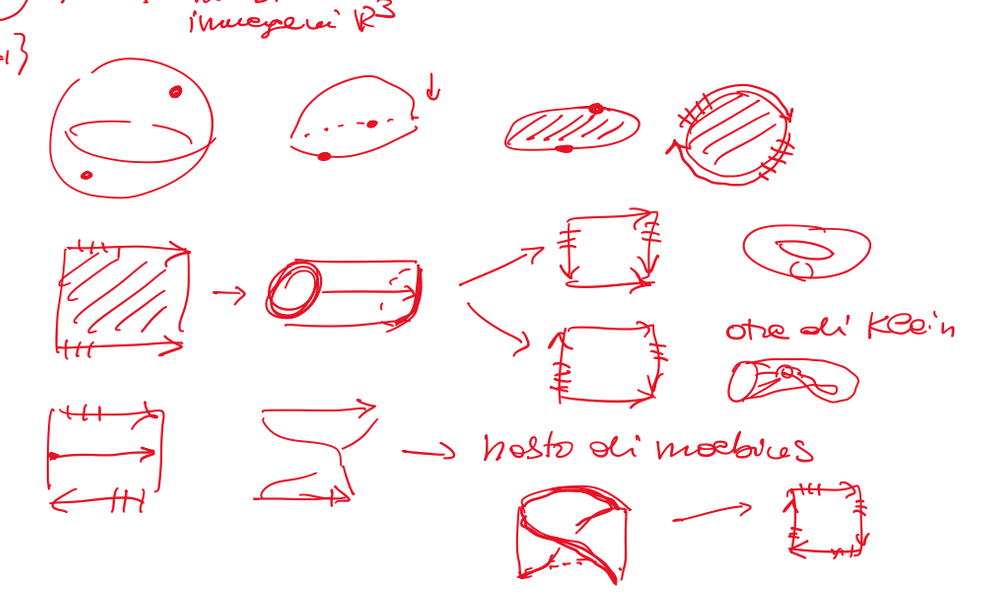
$\mathbb{P}^2(K)\neq\mathbb{P}^1(K)\times\mathbb{P}^1(K)$

se $K=\mathbb{R}$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}/\mathbb{R}^\times=\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$
$=\mathbb{S}^1/\pm$
$=\mathbb{S}^1$
$=\mathbb{A}^1(\mathbb{R})\sqcup\{\infty\}$



$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})=\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}/\mathbb{R}^\times$
$=\mathbb{S}^2/\pm$ ← non si immerge in $\mathbb{R}^3$
$\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \|x\|=1\}$

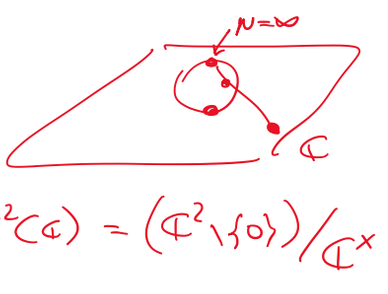


$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è nemmeno una superficie orientabile

$\neq\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$
$\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ = TORO

se $K=\mathbb{C}$:

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{A}^1(\mathbb{C})\sqcup\{\infty\}$
$=\mathbb{S}^2=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \|x\|=1\}$



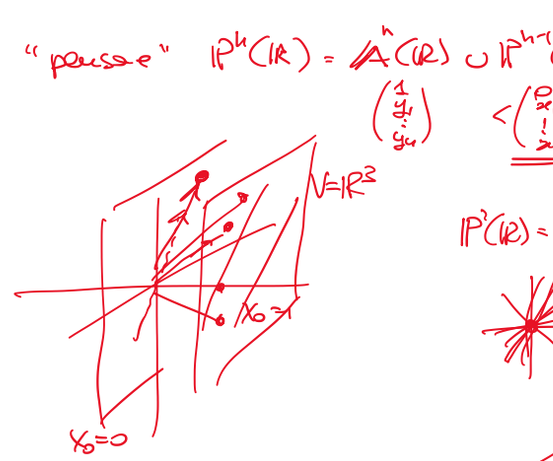
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})=(\mathbb{C}^3\setminus\{0\})/\mathbb{C}^\times=\mathbb{R}^6\setminus\{0\}/\mathbb{C}^\times$
$=\mathbb{S}^5/\mathbb{S}^1$
$\{x\in\mathbb{R}^6 \mid \|x\|=1\}$

$\mathbb{S}^3\twoheadrightarrow\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
$v\longmapsto\langle v\rangle$
Fibrazione in $\mathbb{S}^1$ dentro a $\mathbb{S}^3\subseteq\mathbb{R}^4$

SFIDA: CAPIRE $\mathbb{S}^3\subseteq\mathbb{D}^4\subseteq\mathbb{R}^4$
$\mathbb{D}^4=\{x\in\mathbb{R}^4 : \|x\|\leq1\}$
$\mathbb{S}^3=\{x\in\mathbb{R}^4 : \|x\|=1\}$

Come "pensare" $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})=\mathbb{A}^n(\mathbb{R})\sqcup\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix}1\\y_1\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}$ $\quad\left\langle\begin{pmatrix}0\\x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right\rangle$



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})=\{\langle v\rangle\}$

Struttura di reticolo di $\mathcal{S}(V)=\{W\leq V\}$

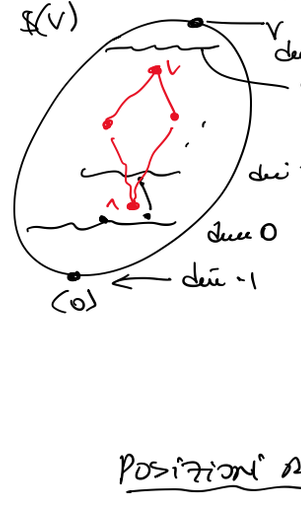
nota: ogni $W\leq V$, $\in\mathcal{S}(V)$ è determinato da una base $W=\langle v_0,\dots,v_r\rangle$
$\dim_K W=r+1$
$\dim_{\mathbb{P}}W=r$

$W=\langle v_0,\dots,v_r\rangle=\langle v_0\rangle+\langle v_1\rangle+\dots+\langle v_r\rangle$
$=P_0\vee P_1\vee\dots\vee P_r$

retta proiettiva: $\langle v_0,v_1\rangle=\langle v_0\rangle+\langle v_1\rangle$
$r=P_0\vee P_1$ $(P_0\neq P_1)$

reticolo
≤ è ⊆
∧ è ∩ di sottospazi
∨ è + di sottospazi
$\langle0\rangle=\emptyset_{\mathbb{P}}$ è minimo reticolo (INFIMO)
V massimo reticolo (SUPREMO)

esercizio: $W\vee U=W$ sse $U\leq W$
$W\wedge U=W$ sse $W\subseteq U$



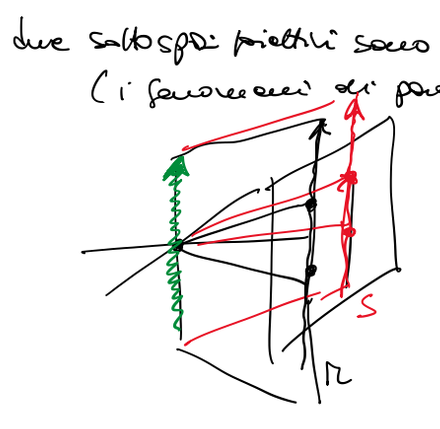
$\dim_{\mathbb{P}}W:=\dim_K W-1$

FORMULE DI GRASSMANN:
$\dim_K W_1+\dim_K W_2=\dim_K(W_1+W_2)+\dim_K(W_1\cap W_2)$
$\dim_{\mathbb{P}}W_1+\dim_{\mathbb{P}}W_2=\dim_{\mathbb{P}}W_1\vee W_2+\dim_{\mathbb{P}}W_1\wedge W_2$

POSIZIONI RECIPROCHE:

$W_1,W_2\in\mathcal{S}(V)$, $\leq V$: $W_1\cap W_2$ $\begin{cases}=\langle0\rangle=\emptyset_{\mathbb{P}} & (\text{sghembi})\\ \neq\langle0\rangle & \text{e contiene punti del proiettivo}\end{cases}$

due sottospazi proiettivi sono o INCIDENTI o SGHEMBI.
(i fenomeni di parallelismo sono SCOMPARSI!)



$r=P+\langle v\rangle$ $\quad P=\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$ affini
$s=Q+\langle v\rangle$ $\quad Q=\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$
parallele $r\cap s=\emptyset$

$r=\left\langle\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}\right\rangle$

$s=\left\langle\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}\right\rangle$

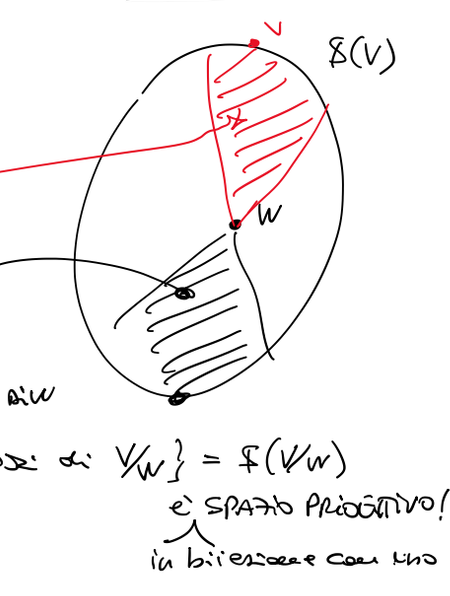
$r\cap s=\left\langle\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}\right\rangle$ un punto (all'∞)

Struttura dei sottospazi e delle stelle:

$W\in\mathcal{S}(V)$, $\leq V$

$\{U\leq V : U\leq W\}=\mathcal{S}(W)$

$\{U\leq V : U\geq W\}=:*(W)$ STELLA DI W
$\cong\{$sottospazi di $V/W\}=\mathcal{S}(V/W)$ è SPAZIO PROIETTIVO! in biiezione con uno



Per tener conto delle stelle:
definizione
uno spazio proiettivo su K è
una terna $(\mathcal{S},V,\alpha)$ dove
$\mathcal{S}$ l'insieme
V spazio vettoriale (su K dim n+1)
e α è BIIEZIONE $\mathcal{S}\xrightarrow{\sim}\mathcal{S}(V)$

Principio di DUALITÀ PROIETTIVA:

$V^*=\mathrm{Hom}_K(V,K)$

$\mathcal{S}(V)\quad\mathcal{S}(V^*)$
$W\longmapsto W^\perp=\{\sigma^*\in V^* : \sigma^*(W)=0\}$ $\ker\sigma^*\geq W$

è antiisomorfismo involutorio di reticoli:
$0^\perp=V^*$
$V^\perp=0$
$W_1\leq W_2\Leftrightarrow W_1^\perp\geq W_2^\perp$
$(W^\perp)^\perp=W$
$(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$
$(W_1\cap W_2)^\perp=W_1^\perp+W_2^\perp$

$\boxed{\dim_K(W^\perp)=\dim_K(V)-\dim_K(W)}$
$\boxed{(\dim_K V=n+1)\ (\dim_{\mathbb{P}}\mathcal{S}(V)=n)}$

$\underbrace{\dim_K(W^\perp)-1}_{\dim_{\mathbb{P}}(W^\perp)}=\dim_K(V)-\dim_K W-1$
$\dim_{\mathbb{P}}(\mathcal{S}(V))-\dim_K W$
$\dim_{\mathbb{P}}(\mathcal{S}(V))-\dim_{\mathbb{P}}W-1$

$\dim_{\mathbb{P}}W=\dim_K W-1$
$\dim_{\mathbb{P}}W+1=\dim_K W$

$\boxed{\dim_{\mathbb{P}}(W^\perp)=\dim_{\mathbb{P}}(\mathcal{S})-\dim_{\mathbb{P}}(W)-1}$

principio:

se $\mathcal{A}(\leq,\wedge,\vee,\emptyset_{\mathbb{P}},\mathcal{S},\dim_{\mathbb{P}},\dots)$ è una asserzione che usa solo la struttura di reticolo di $\mathcal{S}(V)$ allora:

$\mathcal{A}(\leq,\wedge,\vee,\emptyset_{\mathbb{P}},\mathcal{S},\dim_{\mathbb{P}}\dots)$ è vera (in tutti gli sp. proiettivi) SSE

l'asserzione $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}(\geq,\vee,\wedge,\mathcal{S},\emptyset_{\mathbb{P}},n-\dim_{\mathbb{P}}-1,\dots)$
è vera (idem)
e si dimostra "dualizzando la dimostrazione di $\mathcal{A}$"

nota: questo è falso in geometria affine

nota: $\mathcal{A}^*$ dipende dalla $\dim_{\mathbb{P}}\mathcal{S}(V)$.

$W_1,W_2\in\mathcal{S}(V)$, $\leq V$

W_1 e W_2 sono sghembi $W_1\cap W_2=\emptyset_{\mathbb{P}}=\langle0\rangle$
sono generanti se $W_1+W_2=V$
sono COMPLEMENTARI se sghembi e generanti

W_1 e W_2 complementari se $W_1\oplus W_2=V$
sse $\begin{cases}W_1\wedge W_2=\emptyset_{\mathbb{P}}\\W_1\vee W_2=\mathcal{S}(V)\end{cases}$

$\dim_{\mathbb{P}}W_1+\dim_{\mathbb{P}}W_2=\dim_{\mathbb{P}}(W_1\vee W_2)+\dim_{\mathbb{P}}(W_1\cap W_2)$
$=\dim_{\mathbb{P}}(\mathcal{S}(V))+(-1)$
$=n-1$

Esempio due rette sghembe in $\mathbb{P}^3$ sono complementari $1+1=3+(-1)$
due rette incidenti in $\mathbb{P}^3$ non sono complementari $1+1=2+0$ (sup è piano! / punto)

Esempi: nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$

duale di	$\mathbb{P}^2$	è		dim $\mathbb{P}^2$ - dim - 1
	rette (dim 1)		punto	(2-1-1=0)
	punti (dim 0)		rette	(2-0-1=1)
	$\emptyset_{\mathbb{P}}$		$\mathbb{P}^2$	
			$\emptyset_{\mathbb{P}}$	

$\mathbb{P}^3$ $\dim_{\mathbb{P}}=3$

duale di	$\mathbb{P}^3$	è		
			$\emptyset_{\mathbb{P}}$	
	piani (dim 2)		punti	(3-2-1=0)
	rette (dim 1)		rette	(3-1-1=1)
	punti (dim 0)		piani	(3-0-1=2)
	$\emptyset_{\mathbb{P}}$		$\mathbb{P}^3$	

$\boxed{\text{per due punti distinti passa una unica retta}}$ $\overset{\text{duale}}{\rightsquigarrow}$ $\boxed{\text{due rette distinte si intersecano in un unico punto!}}$

$P=\langle v\rangle$, $Q=\langle w\rangle$ lin. indep.
$\langle v,w\rangle$ è $P\vee Q$

$P\neq Q$ punti ⇒ $P\vee Q$ unica retta che ≥ P, Q

$r\neq s$ rette ⇒ $r\wedge s$ unico punto che ≤ r, s

$\boxed{\text{dati 2 punti distinti, esiste una unica retta che li contiene}}$

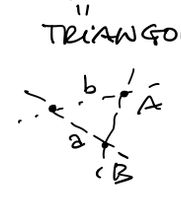
P,Q dim 0, $\exists!\ r=P\vee Q$ retta (dim 1) $r\geq P$, $\geq Q$

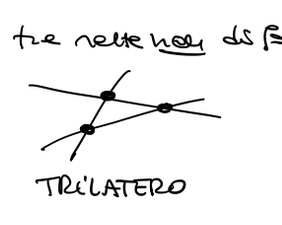
$\boxed{\text{dati due piani distinti in }\mathbb{P}^3\text{, si intersecano in una unica retta.}}$

π, σ piani, ∃! retta $\pi\wedge\sigma=r$ $r\leq\pi$, $r\leq\sigma$

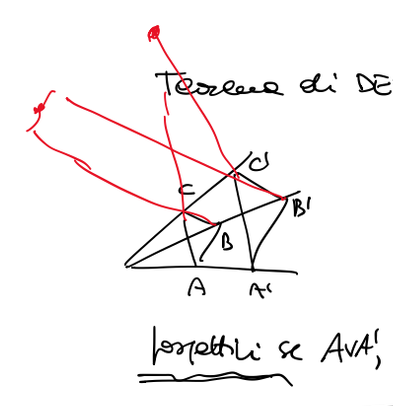
Tre punti allineati P,Q,R con $P\vee Q\vee R$ retta ⟷ tre rette di un fascio r,s,t con $r\wedge s\wedge t$ punto

tre punti non allineati = TRIANGOLO ⇝ tre rette non di fascio





Teorema di DESARGUES



$a\wedge a'$, $b\wedge b'$, $c\wedge c'$ sono 3 punti allineati (triangoli omologici)

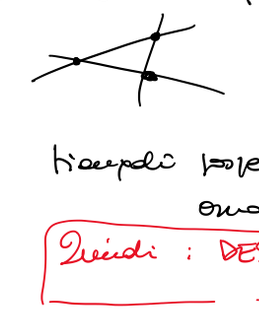
prospettici se $A\vee A'$, $B\vee B'$, $C\vee C'$ sono nello fascio

$\boxed{\text{DUE TRIANGOLI nel piano sono prospettici sse sono omologici}}$

prospettico ⇒ omologico ⟷ omologico ⇒ prospettico
"duale di prospettico" "duale di omologico"

quindi basta mostrare che prospettico ⇒ omologico!

duale di triangolo nello spazio:



3 piani non in una stella e le 3 rette di intersezione!

triangoli prospettici / omologici } ? tripiani ?

Quindi: DESARGUES si estende nel PIANO, non nello SPAZIO!

se due rette sono incidenti allora generano un piano ⟷ se due rette stanno su un piano allora sono incidenti

dunque: $\boxed{\text{rette incidenti}\Leftrightarrow\text{rette complanari}}$

09/05/2023

$V\cong K^{n+1}$

$\boxed{\text{domanda: }\mathbb{P}(V)\overset{?}{\underset{\uparrow}{\simeq}}\mathbb{P}^n(K)=\mathbb{P}(K^{n+1})\text{ che dati scegliere in }\mathbb{P}(V)\text{ per avere una biiezione con }\mathbb{P}^n(K)\text{ ?}}$