Geo1-22/3-7E-Esercizi-E

mercoledì 12 aprile 2023 12:26

Qualche esercizio di riepilogo affine/euclideo:

(0) per allenamento:

- V • date due coppie di rette r_1, r_2 ed s_1, s_2 nel piano euclideo, dire quando esistono affinità φ tali che $\varphi(r_1) = s_1$ e $\varphi(r_2) = s_2$, eventualmente "quante" (cioè da quanti parametri dipendono)?
- V • stesso problema per rette in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$.
- V • stesso problema per coppie di piani in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

(1) Date due coppie di piani π_1, π_2 e σ_1, σ_2 in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, dire "se e quante" affinità / isometrie esistono tali che $\varphi(\pi_i) = \sigma_i$ per $i = 1,2$.

- stesso problema in $\mathbb{E}^5(\mathbb{R})$

(2) date due coppie r, π e s, σ di retta, piano in $\mathbb{E}^3$ dire "se e quante" affinità / isometrie esistono tali che $\varphi(r) = s$ e $\varphi(\pi) = \sigma$.

- stesso problema in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$

Note: Le risposte devono essere "esistono tali trasformazioni sse (condizione in termini dei dati)" }

per esempio:
stessa posizione reciproca
stessa distanza, angoli....

I dati che permettono di dire se esistono tali trasformazioni sono quelli che caratterizzano gli invarianti (affini, euclidei..) tra gli oggetti in questione...

per es: la posizione euclidea di 2 rette r, s in $\mathbb{E}^3$ ($\mathbb{E}^n$ per $n \geq 1$) è determinata da $d(r,s)$ DISTANZA, $\vartheta(r,s)$ ANGOLO

(e da questi si deducono anche le posizioni affini:

$$d = \begin{cases} 0 & \text{rette incidenti } \vartheta = \begin{cases} 0 & \text{coincidenti} \\ \neq 0 & \times \end{cases} \\ > 0 & \text{rette non incid } \vartheta = \begin{cases} 0 & \text{parallele } // \\ \neq 0 & \text{sghembe} \end{cases} \end{cases}$$

)

(questo dà un significato preciso alla domanda: "quanti angoli si possono definire tra 2 piani?") ⊛

Strategia: ① pensare direttamente di mandare r_1, r_2 in s_1, s_2 tramite $\varphi \begin{cases} \text{affinità} \\ \text{isometrie} \end{cases}$

"usare un riferimento semplice per r_1, r_2"

② pensare come trasformare

$r_1, r_2 \longmapsto$ rette "più facili"

$s_1, s_2 \longmapsto$ " "

$(\underline{r_1, r_2} \longmapsto O+\langle e_1\rangle, O+\langle e_2\rangle \longleftarrow s_1, s_2)$

Affinità: r_1, r_2 si intersecano $\Leftrightarrow$ $\varphi(r_1), \varphi(r_2)$ anche

↑ perché affinità invertibili

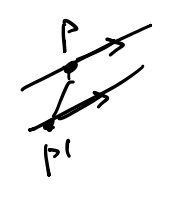
dunque $\exists \varphi: \varphi(r_i) = s_i$, $i=1,2$ $\Rightarrow$ le coppie r_1, r_2 e s_1, s_2 sono o incidenti entrambi
o parallele entrambe
(o $r_1 = r_2$ e $s_1 = s_2$)

$P+\langle v_1\rangle, P+\langle v_2\rangle$, v_1, v_2 base $\Leftarrow$?

r_1, r_2 incid } $\Rightarrow$ trovo φ tale che $\varphi(r_1 \cap r_2) = s_1 \cap s_2$
s_1, s_2 "
$Q+\langle w_1\rangle$ $Q+\langle w_2\rangle$ w_1, w_2 base

$f(v_1) = \alpha w_1$
$f(v_2) = \beta w_2$
definisce una affinità

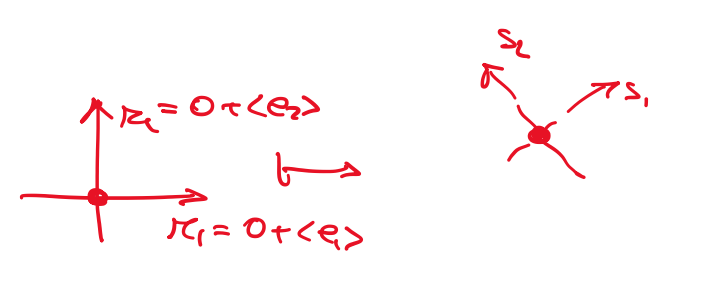
$\varphi(r_1) = \varphi(P+\langle v_1\rangle) = \varphi(P) + \langle f v_1\rangle = Q + w_1 = s_1$



$P+\langle v\rangle$, $P'+\langle v\rangle$

r_1, r_2 parallele } $\Rightarrow$ trovo φ tale che:
s_1, s_2 parallele
$Q+\langle w\rangle$ $Q'+\langle w\rangle$

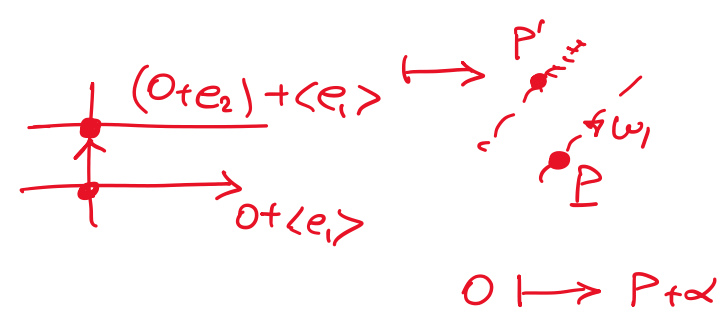
$\varphi(P) = Q$ ⟶ $\varphi(r_1) = s_1$
$f(v) = \alpha w$
$f(P-P') = Q-Q'$ ⟶ $\varphi(r_2) = s_2$



$O \longmapsto s_1 \cap s_2$
$e_1 \longmapsto \alpha w_1$
$e_2 \longmapsto \beta w_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \square & \alpha\square & \beta\square \end{pmatrix}$$

w_1 w_2



$O \longmapsto P+\alpha w_1$
$e_1 \longmapsto \beta w_1$
$(O+e_2) \longmapsto P'+\gamma w_1$
$e_2 = (O+e_2)-O \longmapsto (P'+\gamma w_1)-(P+\alpha w_1)$
$P'-P+(\gamma-\alpha)w_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$P+\alpha w_1$ βw_1

Isometrie φ tali che $\varphi(r_i) = s_i$ $i=1,2$

r_1, r_2 si intersecano con angolo ϑ
s_1, s_2 " " angolo ϑ $\Leftarrow$ se esiste φ isometrie
$\overset{?}{\Rightarrow}$

$r_1, r_2 \longmapsto O+\langle e_1\rangle$
$O+\langle\binom{\alpha}{\beta}\rangle$ $\alpha^2+\beta^2=1$
in modo che $\cos(\vartheta(r_1, r_2)) = |\alpha|$
$= \cos(\vartheta(e_1, \binom{\alpha}{\beta}))$
$= \dfrac{e_1 \cdot \binom{\alpha}{\beta}}{\|e_1\| \, \|\binom{\alpha}{\beta}\|}$

r_1, r_2 parallele distanza d
s_1, s_2 " " d } $\Leftarrow$ se esiste φ isometrie
$\Rightarrow$

$r_1, r_2 \longmapsto O+\langle e_1\rangle$
$(O+de_2)+\langle e_1\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & \square & \square \end{pmatrix}$$

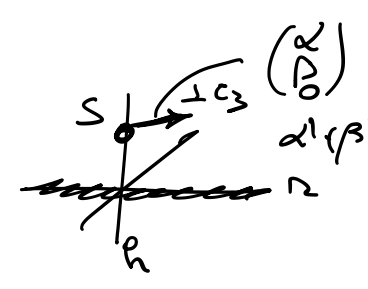
↑ un punto su r $\pm w$

Rette in dimensione 3:

$\exists$ affinità φ: $\varphi(r_i) = s_i$ $i=1,2$ sse r_1, r_2 hanno stessa posizione reciproca di s_1, s_2

$\exists$ isometrie φ: $\varphi(r_i) = s_i$ $i=1,2$ sse $d(r_1, r_2) = d(s_1, s_2)$
$\vartheta(r_1, r_2) = \vartheta(s_1, s_2)$

(e in questo caso possiamo trovare
$\varphi: r_1 \longmapsto O+\langle e_1\rangle$
$r_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d(r_1,r_2) \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$



tale che angolo e_1, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ sia $\vartheta(r_1, r_2)$)

$d(r_1, r_2)$ e $\vartheta(r_1, r_2)$ determinano le posizioni reciproche affini di r_1, r_2:

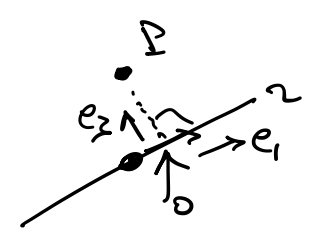
$d(r_1 r_2)$ ⟶ 0 incidenti $\vartheta(r_1 r_2)$ ⟶ 0 $r_1 = r_2$; $\neq 0$ ×
$d(r_1 r_2)$ ⟶ >0 non incid $\vartheta(r_1, r_2)$ ⟶ 0 //; $\neq 0$ sghembe

Altro esercizi:

Data una retta r in $\mathbb{E}^3$,
sia $P \in \mathbb{E}^3$: descrivere tutte le rette per P aventi distanza fissata (sia k) dalla retta r.

: descrivere tutte le rette per P aventi angolo fissato (sia ϑ) con la retta r.

Suggerimento: scegliamo un riferimento in modo che
$r = O + \langle e_1\rangle$
$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$



rette per P: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\rangle$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$

calcolo $d(r, P+\langle\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\rangle)$
e impongo che sia $= k$ fissata
dà condizioni su α, β, γ...

siccome abbiamo punti e vettori, usiamo

$$d(r, P+\langle\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\rangle) = \frac{\left|\left|P-O \;\; e_1 \;\; \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right|\right|}{\left\| e_1 \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ d & 0 & \gamma \end{vmatrix}\right|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \right\|} = \frac{d|\beta|}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

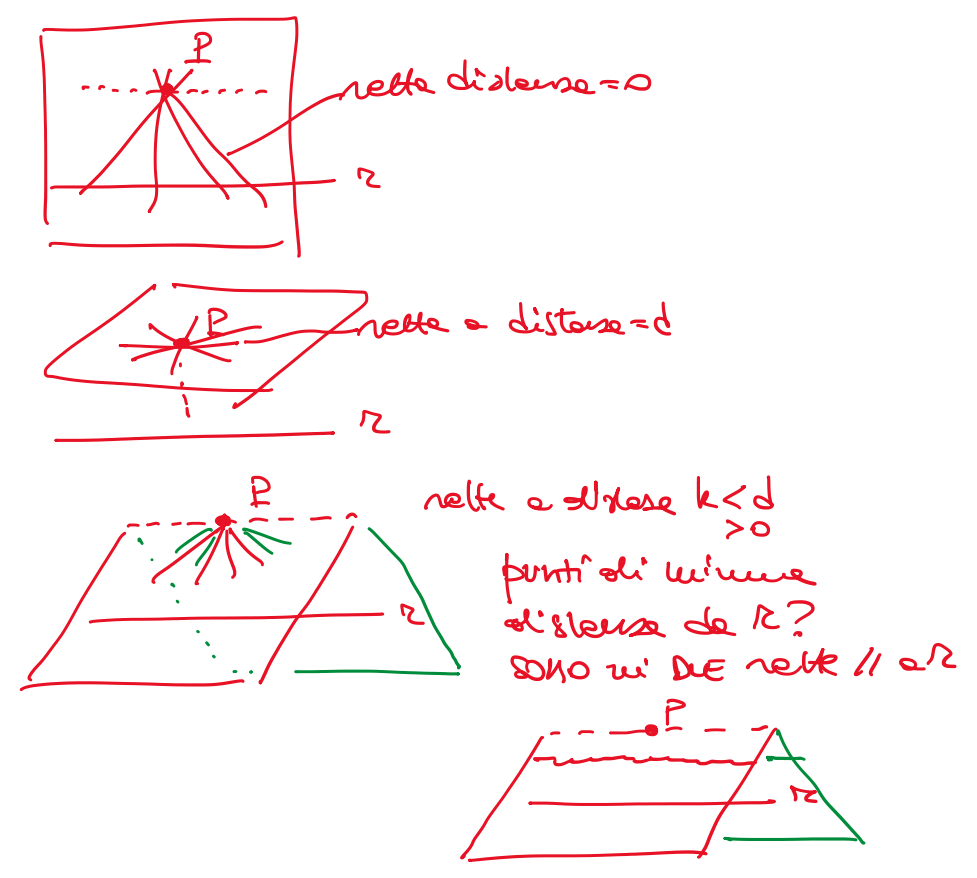
dunque $d(r, P+\langle\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\rangle) = k$
sse $\dfrac{d^2\beta^2}{\beta^2+\gamma^2} = k^2$ sse $\beta^2(k^2-d^2)+k^2\gamma^2=0$

quindi sono le rette con direzione $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tali che $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$
e $(k^2-d^2)\beta^2+k^2\gamma^2=0$
(soluzioni solo se $k^2-d^2 \leq 0$, cioè $k^2 \leq d^2$ ovviamente: la distanza è $\leq d(P, r)$)

→ se $k=0$, allora $\beta=0$, rette direzione $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$, cioè rette del fascio per P nel piano $P \vee r$ (tranne la // r)

→ se $k=d$ allora $\gamma=0$, rette direzione $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè rette del fascio per P nel piano $\perp$ "retta per P e $\perp r$"

→ se $0<k<d$ i vettori $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ soddisfano $k^2\gamma^2-(d^2-k^2)\beta^2=0$
$(k\gamma+\sqrt{d^2-k^2}\beta)(k\gamma-\sqrt{d^2-k^2}\beta)=0$
quindi sono le rette del fascio per P in due piani di asse $P+\langle e_1\rangle$ (retta per P parallela a r) (tranne la // r)


P
rette distanza = 0
r
P
rette a distanza = d
r
P
rette a distanza $\underset{>0}{k}<d$
punti di minima distanza da r?
sono in due rette // a r !
r
P
r

Esercizi dei compiti:

⊛ in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$: $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$

posizione reciproca, distanza, coppie di minima distanza
isometrie ϕ: $\phi(\pi) = \pi$, $\phi(\sigma) = \sigma$?
(o tali che $\phi(\pi) = \sigma$ e $\phi(\sigma) = \pi$?).

⊛ in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$: $r = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$

posizione reciproca, distanza, punti di minima distanza, trovare equazione cartesiana per $\{X \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R}): d(X,r) = d(X,s)\} \subseteq \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

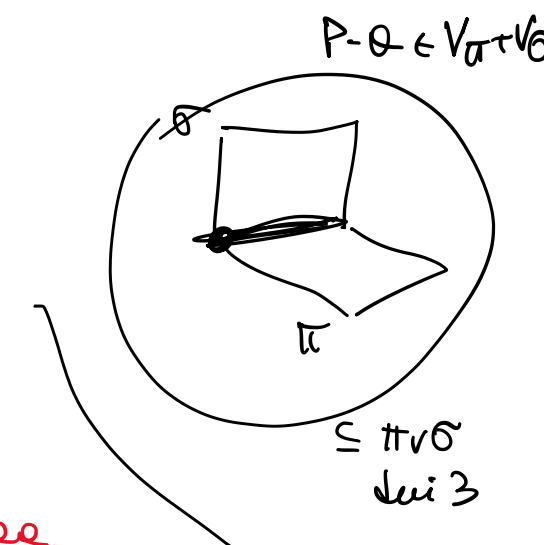
⊛ Composizioni di isometrie in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$: determinare che tipo di isometrie (nella classificazione di Eulero) sono
- le composizioni di due riflessioni (rispetto a piani)
- le composizione di due rotazioni di $\pi/2$ attorno a due rette ortogonali

posizione reciproca:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad V_\sigma \cap V_\pi = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

π e σ si intersecano sse $P-Q \in V_\pi + V_\sigma$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi \cap \sigma$ = retta $= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle \\ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle \end{aligned}}$$

$\pi \vee \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

$d(\pi, \sigma) = 0$
punti minima distanza = punti retta $\cap$.

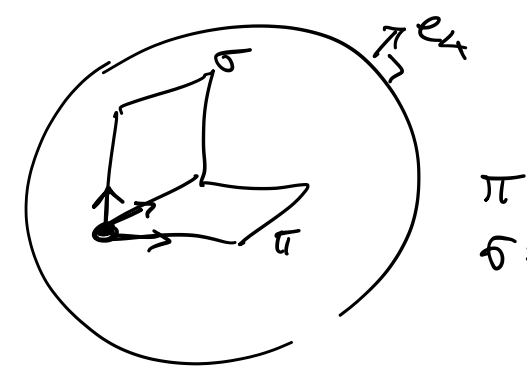
angolo tra π e σ = angolo tra i vettori $\perp$ a π e a σ nello spazio $\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

vettore $\perp \pi$: $\underbrace{\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle}_{\text{dim } 3} \cap \underbrace{\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle}_{\text{dim } 2}^{\perp} = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

vettore $\perp \sigma$: $\langle \quad \rangle \cap \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

$\vartheta(\pi, \sigma) = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \cos\vartheta = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\| \; \| \cdot \| \; \|} = \dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0$

$\pi \cap \sigma$:



$\pi = O + \langle e_1, e_2\rangle$
$\sigma = O + \langle e_1, e_3\rangle$
$\mathcal{U} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

cerchiamo isometrie φ: $\varphi(\pi) \subseteq \pi$
$\varphi(\sigma) \subseteq \sigma$

allora: $\varphi(\pi \cap \sigma) \subseteq \pi \cap \sigma$ $\Rightarrow$ $\varphi(O) \in \pi \cap \sigma = O+\langle e_1\rangle$
$\Rightarrow f(e_1) = \pm e_1$

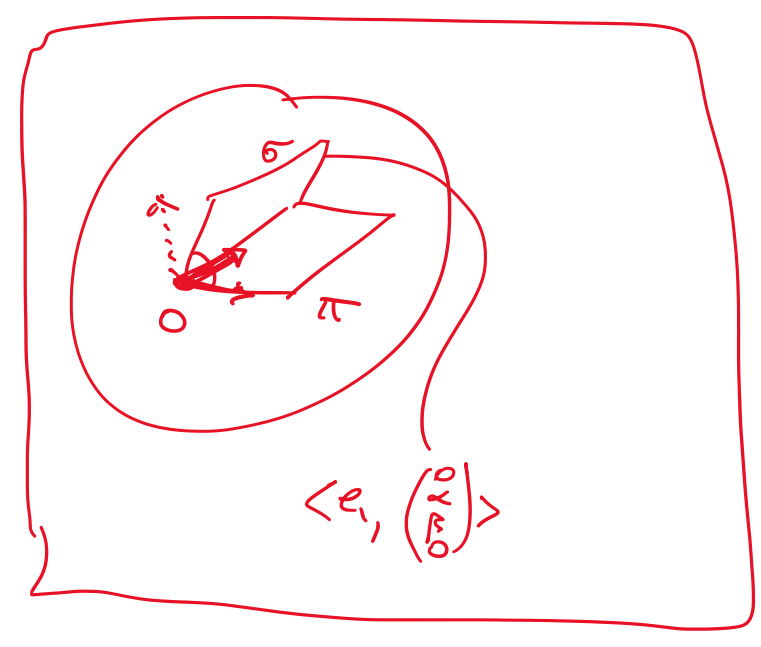
$\varphi(\pi) \subseteq \pi = O+\langle e_1, e_2\rangle$ $\Rightarrow$ $f(e_2) \perp f(e_1) = \pm e_1$, $\in \langle e_1, e_2\rangle$
$\Rightarrow f(e_2) = \pm e_2$

$\varphi(\sigma) \subseteq \sigma$ $\Rightarrow$ $f(e_3) \perp e_1$, $\in \langle e_1, e_3\rangle$
$\Rightarrow f(e_3) = \pm e_3$

siccome $\langle e_1, e_2, e_3\rangle^{\perp} \xmapsto{f} \langle e_1, e_2, e_3\rangle^{\perp}$
$\Rightarrow f(e_4) = \pm e_4$

$$\Rightarrow \alpha_{\mathcal{U}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

un parametro α continuo e la scelta di $\pm$ in tutti i modi possibili (24).


σ
O
π
$\langle e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$

Nota: se i 2 piani non fossero stati ortogonali, le risposta era diversa, con meno isometrie:
se $e_2 \mapsto e_2$, $e_3 \mapsto -e_3$ allora $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} \notin V_\sigma$ ....

Nota: se avessimo cercato affinità tali che $\varphi(\pi) = \pi$, $\varphi(\sigma) = \sigma$ e più avremmo trovato più possibilità

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma_1 & \varsigma_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & \varsigma_2 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \neq 0 \end{pmatrix}$$

Nota: $\Phi := \{\varphi: \varphi(\pi) \subseteq \pi, \varphi(\sigma) \subseteq \sigma\}$

$\Psi := \{\psi: \psi(\pi) = \sigma, \psi(\sigma) = \pi\}$ = si scrive come $\psi_0 \circ \varphi$ al variare di φ in Φ

$\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \Psi$

$\psi_1, \psi_2 \in \Psi \Rightarrow \psi_1 \circ \psi_2 \in \Phi$

Quindi basta capire se $\Psi \neq \emptyset$ o $= \emptyset$.
una tale ψ si trova subito
$O \longmapsto O$
$e_1 \longmapsto e_1$
$e_2 \longmapsto e_3$
$e_3 \longmapsto e_2$
$e_4 \longmapsto e_4$
} $\pi \longmapsto \sigma$, $\sigma \longmapsto \pi$ //