Classe: Prodotto (o prodotto vettore) su $V_n(\mathbb{R})$

Definizione $V = V_n(\mathbb{R})$

come: $V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow V$ (n−1 volte)

$(v_1, \dots, v_{n-1}) \longmapsto \text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} e_1 & v_{11} & \cdots & v_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n & v_{n1} & \cdots & v_{n,n-1} \end{pmatrix}$

sviluppando secondo la prima colonna =

$= \begin{vmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n1} & \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{1,n-1} \\ \vdots \\ v_{n,n-1} \end{vmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \text{minore complementare} \\ \text{dell'elemento nella} \\ \text{posizione } (i,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{i+1} \det(\dots) \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{pmatrix}$ $\forall i$ = il 1 della i-esima riga

Esempi:

$(n=1)$ $V = V_1(\mathbb{R})$

$\text{cross}(\,) = 1$

$(n=2)$ $\text{cross}(v) = \begin{vmatrix} e_1 & v_1 \\ e_2 & v_2 \end{vmatrix} = v_2 e_1 - v_1 e_2 = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ è ⊥ a v

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\text{cross}(v) = v$ ruotato di $\frac{\pi}{2}$

"a sinistra"

$(n=3)$ $V \times V \to V$

$\text{cross}(v, w) = \begin{vmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\text{cross}(v,w) \perp$ a entrambi (3)

Problema (classe teorica):

π, π' piani affini $\leq \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ (risp. $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$)

(Facile) (1) Come si calcola la distanza?

in particolare se sono paralleli, non paralleli

(Complicato) (2) È possibile dare una definizione di angolo tra π e π'?

Alcune cose:

Rette rette

Retta e piano

Piani e piani

(Ricordare: π ha $\mathbb{R}^3$ sottospazio di un piano $\subset$ un piano!)

29/09/2023

Cross-product (Prodotto vettoriale) - Definizione

$V = V_n(\mathbb{R})$

cross: $V_n \times \cdots \times V$ (n−1 volte) $\longrightarrow V$

$(v_1, \dots, v_{n-1}) \longmapsto \text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} \cdots & v_{11} & \cdots \\ & \vdots & \\ & v_{n1} & \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \det \begin{pmatrix} \cdots & v_{1,n-1} \\ & \vdots \\ & v_{n,n-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \leftarrow e_1$ $\leftarrow e_n$

$\in W = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \middle| \begin{vmatrix} w_1 & v_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ w_n & v_{n1} & \end{vmatrix} = 0, \dots, \begin{vmatrix} w_1 & \cdots \\ \vdots & \\ w_n & \end{vmatrix} = 0 \right\}$

W = lo stesso di prima

= "minori complementari"

Note

- $\text{cross} = 0$ quando $\dim < n-1$
- $\text{cross} \neq 0$ se $\dim = n-1$ (se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono lin. indip.)
- $\text{cross} \perp$ a tutti i v_i (se $v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. indip.)

(la cosa che ci interessa)

$\text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) \in V$ è l'unico vettore tale che

$\forall w \in V \quad w \cdot \text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \begin{vmatrix} w & v_1 & \cdots & v_{n-1} \end{vmatrix}$

$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ Infatti se vale questa proprietà allora w appartiene allo spazio definito prima (colonna).

$\sum w_i \cdot (-1)^{i+1} |M_i| \cdot (e_i \cdot w) \begin{pmatrix} |M_1| \\ -|M_2| \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} |M_n| \end{pmatrix}$

Proprietà del cross product

1) **multilineare**:

$\forall i$: $\text{cross}(v_1, \dots, \underbrace{\lambda v_i + w_i}_{i\text{-esima}}, \dots, v_{n-1}) = \lambda \text{cross}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_{n-1}) + \text{cross}(v_1, \dots, w_i, \dots, v_{n-1})$

2) **alternante**:

$\forall i < j$ $v_i = v_j \Rightarrow \text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0$

$\left(W = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle \right)$ $\dim W \leq n-2$ $\Rightarrow$ tutti i minori $(n-1)\times(n-1)$ sono nulli (anche non quadrati)

Teorema: $\det(v_1, \dots, v_n) = 0 \iff v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipendenti

(in particolare $\text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = -\text{cross}(v_2, v_1, \dots, v_{n-1})$

$\text{cross}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = -\text{cross}(v_2, v_1, \dots, v_{n-1})$

per permutazioni di $v_1, \dots, v_{n-1}$)

3) **ortogonalità**:

$\text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle^\perp$

Infatti $v_i \cdot \text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_i & v_1 & \cdots & v_{n-1} \end{vmatrix} = 0$

4) se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono lin. indip. allora $\text{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) \neq 0$ e forma una "specie di base" di V "più specifica" con la base canonica

$\left(\text{Infatti } \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} \neq 0 \right)$

$\left(\text{Infatti } \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} \cdot (e_1 \cdots e_n) = \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{pmatrix} \right)$

$\det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n-1} & \\ \text{cross} & \cdots \end{pmatrix} = \text{cross} \cdot \text{cross} > 0$

$\left(\text{Infatti } \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{pmatrix} \right)$

$\left(\text{Infatti } \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} \cdot (e_1 \cdots e_n) = \det \begin{pmatrix} \text{cross} \\ \vdots \\ \text{cross} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{pmatrix} \right)$

$\det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n-1} & \\ \text{cross} & \cdots \end{pmatrix} = \text{cross} \cdot \text{cross} > 0$

$\left(\text{Infatti } \det(\text{cross}^2 \cdot v_1 \cdots v_{n-1}) = \text{cross} \cdot \text{cross} > 0 \right)$

$\det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n-1} & \\ \text{cross} & \cdots \end{pmatrix} = \det(\text{cross}^2 \cdot v_1 \cdots v_{n-1})$

$\left(\text{Infatti } \det(\text{cross}^2 \cdot v_1 \cdots v_{n-1}) = \text{cross} \cdot \text{cross} > 0 \right)$

$\det(v, w, \dots, v_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \det(e_3, \dots, v_{n-1})$

$\left(\text{Infatti } \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n-1} & \\ \text{cross} & \cdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n-1} & \\ \text{cross} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots \\ \vdots & \\ e_n & \end{pmatrix} \right)$

$\det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_{n-1} & \\ \text{cross} & \cdots \end{pmatrix} = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross}) = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross}) \cdot \det(e_1, \dots, e_n)$

$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross}) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross})$

$\det(e_1, \dots, e_n) = 1$

$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross}) = \det(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross})$

$\det(e_1, \dots, e_n) = 1$

$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross}) = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, \text{cross}) \cdot \det(e_1, \dots, e_n)