Todos: ein Endomorph. Vektorraum ist Polynom
- Eigenwerte, -vektor, -räume?
- ein Vektor, Skalar, Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum
- Ein Vektor ist Eigenvektor zu Eigenwert 0 $\Leftrightarrow$ Kern
- ein Vektor ist Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Bild
- Ein Vektor ist Eigenvektor zu Eigenwert λ $\Leftrightarrow$ Kern($\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}$)

Definition $V = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Abbildungsvorschrift für "Produkte skalarer" mit Vektoren (= "Vektorfaktor") heißt Funktion

$$\begin{array}{rccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (\vec{v}, \vec{w}) & \longmapsto & \vec{v} \cdot \vec{w} & \text{"Produkt von } \vec{v} \text{ und } \vec{w}\text{"} \\ & & \text{"Skalarprodukt"} & \\ & & \text{"inneres Produkt"} & \end{array}$$

$$\text{z.B. } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{dann } \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$$

$$(n, \mathbb{K}^n) \qquad \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{smallmatrix}\right)$$

Notiz: Wichtig ist Verwendung von Vektoren und Basis Unabhängigkeit

Beispiele (wichtige Beispiele, die Eigenschaften erfüllen)

(1) $\mathbb{K}$ = Körper, $V = \mathbb{K}^n$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

(3) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \sum_{i=1}^{n} i \cdot v_i w_i$$

(4) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2$$

(5) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 - v_1 w_2 - v_2 w_1 + 2 v_2 w_2$$

(6) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2$$

(7) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2 + v_3 w_3$$

(8) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2 + v_3 w_3$$

(9) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2 + 3 v_3 w_3$$

(10) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := 2v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2 v_2 w_2 + 3 v_3 w_3 + v_1 w_3 + v_3 w_1$$

Rechenregeln (Regeln, die für alle Skalarprodukte gelten)

(a) $\vec{v} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \vec{v} \cdot \vec{w}_2 \quad \forall \vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V$
$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w} + \vec{v}_2 \cdot \vec{w} \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w} \in V$

Beide Regeln beweist man durch Ausschreiben der Produkte und Summen.

Notiz: $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w}$
$= \vec{v} \cdot \vec{v} + 2 \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w}$

(b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

(c) $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0 \quad \forall \vec{v} \in V$

(d) $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0 \quad \forall \vec{v} \neq \vec{0}$

(e) $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(a), (b) $\Rightarrow$ Skalarprodukt ist bilinear

(c), (d), (e) $\Rightarrow$ Skalarprodukt ist positiv definit

(b) $\Rightarrow$ Skalarprodukt ist symmetrisch

Definition Sei $\vec{v} \in V$. Dann heißt $\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ die Länge von $\vec{v}$.

Andere Bezeichnung: Norm von $\vec{v}$

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \qquad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.

Anwendung: Dreiecksungleichung

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| \qquad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$$

Beweis: Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} + 2 \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &\leq \|\vec{v}\|^2 + 2 \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 \\ &= (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2 \end{aligned}$$

Wurzel ziehen $\Rightarrow$ Behauptung

Orthogonalität

Definition: Seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$ Vektoren. $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen orthogonal, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Schreibweise: $\vec{v} \perp \vec{w}$

"Linear dazu" meint hier $\vec{v} \perp \vec{w}$

$\cos(\theta_{\vec{v},\vec{w}}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$

Motivation: $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien Vektoren. $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein Parallelogramm auf.

Seien $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig. Dann ist $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow$ das Parallelogramm ist ein Rechteck.

Satz des Pythagoras: Seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$ orthogonal. Dann gilt $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} + 2 \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 + 0 + \|\vec{w}\|^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \end{aligned}$$

Satz von Pythagoras: Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Dann gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$.

Beweis: Seien $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig. $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien Vektoren, die die Seiten a und b aufspannen.

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 \\ &= (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{v} - 2 \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 - 2 \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\theta) + \|\vec{w}\|^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta) \end{aligned}$$

Satz von geometrischen Mittel und Arithmetischen Mittel: Seien $a, b \geq 0$. Dann gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Beweis: Seien $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal mit $\|\vec{v}\| = a$, $\|\vec{w}\| = b$.

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &\geq 2ab \\ \Rightarrow \|\vec{v} + \vec{w}\| &\geq \sqrt{2ab} \\ \Rightarrow \frac{\|\vec{v} + \vec{w}\|}{2} &\geq \sqrt{\frac{ab}{2}} \end{aligned}$$

Andererseits: $\frac{\|\vec{v} + \vec{w}\|}{2} \leq \frac{\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|}{2} = \frac{a+b}{2}$

Insgesamt: $\sqrt{\frac{ab}{2}} \leq \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Orthogonalbasen

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Basis $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ von V heißt Orthogonalbasis, wenn $\vec{b}_i \perp \vec{b}_j$ für alle $i \neq j$.

Eine Orthogonalbasis heißt Orthonormalbasis, wenn zusätzlich $\|\vec{b}_i\| = 1$ für alle i.

Notiz: Eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ erfüllt $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt für alle $\vec{v} \in V$:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v} \cdot \vec{b}_i) \vec{b}_i$$

Beweis: Sei $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{b}_j &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i \right) \cdot \vec{b}_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j) \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis.

Beweis: Gram-Schmidt-Verfahren

Sei $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis von V.

Setze $\vec{c}_1 := \vec{b}_1$.

Für $i = 2, \ldots, n$ setze

$$\vec{c}_i := \vec{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\vec{b}_i \cdot \vec{c}_j}{\vec{c}_j \cdot \vec{c}_j} \vec{c}_j$$

Dann ist $(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ eine Orthogonalbasis von V.

Setze $\vec{d}_i := \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|}$.

Dann ist $(\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n)$ eine Orthonormalbasis von V.

Orthogonale Abbildungen

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt orthogonal, wenn $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ für alle $\vec{v} \in V$.

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(1) φ ist orthogonal.

(2) φ ist winkeltreu.

(3) φ ist längentreu. (d.h. $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$)

(4) φ ist skalarprodukttreu. ($\varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$)

(5) φ ist Gramsche Determinante. ($\det(\varphi) = \pm 1$)

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): φ sei orthogonal. Es gilt $\cos(\theta_{\vec{v},\vec{w}}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$

$$\cos(\theta_{\varphi(\vec{v}),\varphi(\vec{w})}) = \frac{\varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{w})}{\|\varphi(\vec{v})\| \cdot \|\varphi(\vec{w})\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \cos(\theta_{\vec{v},\vec{w}})$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\vec{v} \in V$. Dann ist $\vec{v} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ und $\vec{w} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 &= \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{v}\| &= \|\vec{w}\| \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{w})\|^2 - \|\varphi(\vec{v})\|^2 - \|\varphi(\vec{w})\|^2 \right) \\ &= \varphi(\vec{v}) \cdot \varphi(\vec{w}) \end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (5): Folgt aus der Determinantenmultiplikationsregel.

(5) $\Rightarrow$ (1): Folgt aus der Determinantenmultiplikationsregel.

(4) $\Rightarrow$ (1): Folgt aus $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

(1) $\Rightarrow$ (4): Folgt aus der Polarisierungsformel.

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(1) φ ist orthogonal und bijektiv.

(2) φ ist orthogonal und injektiv.

(3) φ ist orthogonal und surjektiv.

(4) φ ist orthogonal und $\det(\varphi) \neq 0$.

(5) Die Spalten der Darstellungsmatrix von φ bilden eine Orthonormalbasis von V.

(6) Die Zeilen der Darstellungsmatrix von φ bilden eine Orthonormalbasis von V.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2), (3): Klar.

(2) $\Rightarrow$ (4): Sei φ orthogonal und injektiv. Dann ist φ bijektiv. Es gilt $\det(\varphi) \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei φ orthogonal und surjektiv. Dann ist φ bijektiv. Es gilt $\det(\varphi) \neq 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sei φ orthogonal und $\det(\varphi) \neq 0$. Dann ist φ bijektiv.

(1) $\Rightarrow$ (5): Sei φ orthogonal und bijektiv. Dann ist φ bijektiv. Es gilt $\det(\varphi) \neq 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sei φ orthogonal und $\det(\varphi) \neq 0$. Dann ist φ bijektiv.

(1) $\Rightarrow$ (6): Sei φ orthogonal und bijektiv. Dann ist φ bijektiv. Es gilt $\det(\varphi) \neq 0$.

(6) $\Rightarrow$ (1): Sei φ orthogonal und $\det(\varphi) \neq 0$. Dann ist φ bijektiv.

Orthogonale Projektion

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann heißt $U^\perp := \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \perp \vec{u} \ \forall \vec{u} \in U\}$ das orthogonale Komplement von U.

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Beweis: Sei $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ eine Orthonormalbasis von U. Ergänze sie zu einer Basis $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k, \vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n)$ von V. Dann ist $(\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis von $U^\perp$.

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann heißt die Abbildung $\pi_U : V \to V$, $\vec{v} \mapsto \vec{u}$, wobei $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in U^\perp$, die orthogonale Projektion auf U.

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist π_U linear und $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$.

Beweis: Sei $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in U^\perp$. Dann ist $\pi_U(\vec{v}) = \vec{u}$.

$$\begin{aligned} \pi_U(\pi_U(\vec{v})) &= \pi_U(\vec{u}) \\ &= \vec{u} \\ &= \pi_U(\vec{v}) \end{aligned}$$

Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist π_U die eindeutige lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$ und $\ker(\varphi) = U^\perp$.

Beweis: Sei $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in U^\perp$. Dann ist $\varphi(\vec{v}) = \vec{u}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(\vec{v})) &= \varphi(\vec{u}) \\ &= \vec{u} \\ &= \varphi(\vec{v}) \end{aligned}$$

Sei $\vec{v} \in \ker(\varphi)$. Dann ist $\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$ mit $\vec{0} \in U$, $\vec{v} \in U^\perp$.

Sei $\vec{v} \in U^\perp$. Dann ist $\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$ mit $\vec{0} \in U$, $\vec{v} \in U^\perp$.

Sei $\vec{v} \in U$. Dann ist $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ mit $\vec{v} \in U$, $\vec{0} \in U^\perp$.

Sei $\vec{v} \in V$. Dann ist $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in U^\perp$.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}) &= \varphi(\vec{u} + \vec{w}) \\ &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{w}) \\ &= \vec{u} + \vec{0} \\ &= \vec{u} \end{aligned}$$

Sei $\vec{v} \in V$. Dann ist $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in U^\perp$.

$$\begin{aligned} \pi_U(\vec{v}) &= \vec{u} \\ &= \varphi(\vec{v}) \end{aligned}$$