Riassunto: spazi affini $(\mathbb{A}, V, +)$

con $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$, $(P, v) \mapsto P+v$

e $- : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$, $(P, Q) \mapsto Q-P$ (= unico vettore v tale che $P+v=Q$ "porta P in Q").

"operazione tra punti": CALCOLO BARICENTRICO

$A, B \in \mathbb{A}$, $\alpha, \beta \in K$, $\alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathbb{A}$ ben definito

$= O + \alpha(A-O) + \beta(B-O) = B + \alpha(A-B)$

$= A + \beta(B-A)$ $(O \equiv A)$ $(O \equiv B)$

(in generale $P_i \in \mathbb{A}$, $\alpha_i \in K$, $\sum \alpha_i = 1 \Rightarrow \sum \alpha_i P_i \in \mathbb{A}$)

Sottospazi: $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{A}$ del tipo $P + W$ con $P \in \mathbb{A}$, $W \leq V$

$\{P+w \mid w \in W\}$

sse stabili per calcolo baricentrico

- Posizioni reciproche
- Collezioni di sottospazi
- Problemi di incidenza

Coordinate: $P_0, P_1, \dots, P_n$ riferimento in $\mathbb{A}$ (dim n)

ogni punto P ha:

coordinate affini $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i (P_i - P_0)$

coordinate "proiettive" $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

coordinate baricentriche $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $P = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i$ $(x_0 = 1 - x_1 - \dots - x_n)$

TRASFORMAZIONI AFFINI:

$\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$
$\mathbb{B} = (\mathbb{B}, W, +)$

$F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ spazi affini

si dice TRASF. AFFINE (AFFINITÀ se $\mathbb{A}=\mathbb{B}$ e F biettiva) se soddisfa a una delle seguenti condizioni (che sono equivalenti tra loro):

① "rispetta il calcolo baricentrico":

$F(\alpha A + \alpha' A') = \alpha F(A) + \alpha' F(A')$ $\forall A, A' \in \mathbb{A}$, $\forall \alpha, \alpha' \in K$, $\alpha+\alpha'=1$

(per INDUZIONE $F(\sum \alpha_i A_i) = \sum \alpha_i F(A_i)$ $\forall A_i \in \mathbb{A}$, $\forall \alpha_i \in K$, $\sum \alpha_i = 1$)

② esiste una APPLIC. LINEARE $\varphi : V \to W$ tale che

$F(P \underset{\mathbb{A}}{+} v) = F(P) \underset{\mathbb{B}}{+} \varphi(v)$ $\forall P \in \mathbb{A}$, $\forall v \in V$

$F(P+v) - F(P) = \varphi(v)$
$F(Q) - F(P) =$ ($P+v=Q$)

Osservazioni facili:

ⓐ $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è affinità

ⓑ $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, $G : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ tr. affini $\Rightarrow$ $G \circ F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}'$ è tr. affine

ⓒ $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ biettiva tr. affine $\Rightarrow$ $F^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ inversa insiemistica è tr. affine.

Equivalenza delle due condizioni:

② ⇒ ① esercizio

se $F(P+v) = F(P) + \varphi(v)$ $\forall P, v$ (φ lineare) ⇒ rispetta calcolo baric.

$F(\alpha A + \beta B) =$
$= F(A + \beta(B-A))$
$= F(A) + \varphi(\beta(B-A))$
$\vdots$
$= \alpha F(A) + \beta F(B)$

① ⇒ ② dato $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tale che $F(\alpha A + \beta B) = \alpha F(A) + \beta F(B)$, $A, B \in \mathbb{A}$

come trovo la funzione lineare φ del punto ②?

$\varphi : V \to W$

$v = A' - A$ $= Q - P$

$\varphi(v) := F(A') - F(A)$ definizione ?
$\varphi(v) = F(Q) - F(P)$

mostriamo che ① φ è ben definita
② φ è lineare
(③ $F(P+v) = F(P) + \varphi(v)$ DEFINIZIONE!)

①: se $v = A - A'$ allora $\varphi(v) = F(A) - F(A')$ } sono =?
e $v = P - Q$ allora $\varphi(v) = F(P) - F(Q)$
dobbiamo mostrare che il risultato è lo stesso!

$A - A' = P - Q$
$A = A' + P - Q$

$F(A) - F(A') = F(P) - F(Q)$?

$(F(A) - F(A')) - (F(P) - F(Q)) = \underline{0}$ come vettore ?

$F(A) - (F(A') + F(P) - F(Q)) = \underline{0}$?
$1 \quad 1 \quad -1$ (è somma baricentrica)

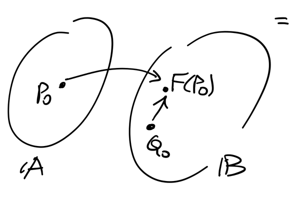
ipotesi: $F(A) - F(A' + P - Q) = F(A) - F(A) = 0$ ✓

Conclusione: $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ è lo stesso: $F(P+v) = F(P) + \varphi(v)$ $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V$

$F(P) - F(Q) = \varphi(P-Q)$ $\forall P, Q \in \mathbb{A}$

Quindi una trasformazione affine è determinata, scelto un punto $P_0 \in \mathbb{A}$ e $Q_0 \in \mathbb{B}$ da:

$F(P_0 + v) = F(P_0) + \varphi(v)$
$= Q_0 + (F(P_0) - Q_0) + \varphi(v)$
$w \in W$ $\quad \varphi : V \to W$



$\mathrm{Trasf}_K(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \overset{\simeq}{\longleftrightarrow} W \times \mathrm{Hom}_K(V, W)$
$F \longleftrightarrow (F(P_0) - Q_0, \varphi)$
$\qquad\qquad w$

RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE DELLE TRASFORMAZIONI AFFINI

$F' \longleftrightarrow (w', \varphi')$

$A \xrightarrow{F} \mathbb{A} \xrightarrow{F'} \mathbb{A}$, $F' \circ F$ come si scrive $(w', \varphi') \circ (w, \varphi)$?

Vediamo come scrivere la composizione:

$\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B} \xrightarrow{G} \mathbb{D}$, P_0, Q_0, R_0; $F \leftrightarrow (w, \varphi)$ $V \to W$; $G \leftrightarrow (w', \varphi')$ $W \to U$; $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\varphi'} U$

- $F(P) = Q_0 + w + \varphi(P - P_0)$
- $G(Q) = R_0 + w' + \varphi'(Q - Q_0)$

$(G \circ F)(P) = G(F(P))$ ← Q $\quad Q - Q_0 = w + \varphi(P - P_0)$
$= G(Q_0 + w + \varphi(P - P_0))$ punto vettore
$= R_0 + w' + \varphi'(w + \varphi(P - P_0))$
$= R_0 + w' + \varphi'(w) + \varphi'(\varphi(P - P_0))$

$\Rightarrow$ $(w', \varphi') \circ (w, \varphi) = (w' + \varphi'(w), \varphi' \circ \varphi)$
$G \circ F$

Scriviamo per $\mathbb{A} = \mathbb{B}$

$\mathrm{Trasf}(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \longleftrightarrow V \times \mathrm{Hom}_K(V, V)$

$F \longleftrightarrow (v, \varphi)$ $F(P) = P_0 + v + \varphi(P - P_0)$

TRASLAZIONI $P \mapsto P+v$ $\longleftrightarrow (v, id_V)$ $F(P) = P_0 + v + (P - P_0) = P + v$

funzioni tali che $F(P_0) = P_0$ $\longleftrightarrow (0, \varphi)$ $F(P) = P_0 + 0 + \varphi(P - P_0) = P_0 + \varphi(P - P_0)$
Affinità centrali di centro P_0

$F' \longleftrightarrow (v', \varphi')$
$F' \circ F$ $\quad (v', \varphi') \circ (v, \varphi) = (v' + \varphi'(v), \varphi' \circ \varphi)$
~~non è $(v'+v, \varphi' \circ \varphi)$~~

allora nota: $V \leq V \times \mathrm{Hom}(V, V)$: $v - (v, id)$
$\mathrm{Hom}_K(V, V) \leq V \times \mathrm{Hom}(V, V)$: $\varphi - (0, \varphi)$
sottogruppi, uno è normale, l'altro no : quali?

F biettiva $\longleftrightarrow (v, \varphi)$
$F^{-1} \longleftrightarrow (\quad)$? non è ~~$(-v, \varphi^{-1})$~~
$F^{-1} \circ F = id \longleftrightarrow (0, id_V)$

Nota ogni affinità si scrive come composizione di TRASLAZIONE e affinità centrale di centro P_0:

perché $(v, \varphi) = (v, id_V) \circ (0, \varphi)$
perché $= (v + id_V(0), id_V \circ \varphi) = (v, \varphi)$

$\overset{!}{=} (0, \varphi)(\ ?\ , id_V) = (0, \varphi)(\varphi^{-1}(v), id)$
$(0 + \varphi(?), \varphi \circ id_V)$
$(\varphi(?), \varphi)$
$\quad v$

nota $(v, id) \circ (0, \varphi) = (v, \varphi)$ $\neq$
$(0, \varphi) \circ (v, id) = (\varphi(v), \varphi)$

Controlliamo se i sottogruppi V e $\mathrm{Iso}(V, V)$ di $V \times \mathrm{Iso}(V, V) = \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ sono normali:

$(0, \varphi^{-1})(v, id_V)(0, \varphi)$
$(0, \varphi^{-1})(v + id(0), id \circ \varphi)$
$(0, \varphi^{-1})(v, \varphi)$
$(0 + \varphi^{-1}(v), \varphi^{-1} \circ \varphi)$
$(\varphi^{-1}(v), id)$

$V \trianglelefteq V \times \mathrm{Hom}_K(V, V) = \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$

$(-v, id)(0, \varphi)(v, id)$
$(-v, id)(0 + \varphi(v), \varphi \circ id)$
$(-v, id)(\varphi v, \varphi)$
$(-v + \varphi(v), id \circ \varphi)$
$(-v + \varphi(v), \varphi)$
$\neq 0$

$\mathrm{Hom}(V, V) \leq \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ (non normale)

$\mathrm{Trasf}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \simeq W \times \mathrm{Hom}(V, W) \cong K^{\dim(W)} \times M_{\dim W, \dim V}(K)$ ($P_0 \in \mathbb{A}$, $Q_0 \in \mathbb{B}$; base di V, base W)

$\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \simeq V \rtimes \mathrm{Aut}(V)$ $\cong K^n \rtimes GL_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} , v \in K^n, A \in GL_n(K) \right\} \leq GL_{n+1}(K)$

$(v, \varphi) \circ (v', \varphi') = (v + \varphi(v'), \varphi \varphi')$

$(v, A) \circ (v', A') = (v + Av', AA')$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + Av' & AA' \end{pmatrix}$

composizione ⟷ prodotto di matrici

e nota: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ P - P_0 \end{pmatrix} = v + A(P - P_0)$

azione sui punti è proprio applicare la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ ...

Rappresentazione matriciale delle trasformazioni affini

$\mathrm{Trasf}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \simeq W \times \mathrm{Hom}_K(V, W) \cong M_{\dim W, 1}(K) \times M_{\dim W, \dim V}(K)$

$\{P_0 \in \mathbb{A}, Q_0 \in \mathbb{B}\}$ $\quad$ {base V, base W}

$\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \quad v \in K^{\dim W}, A \in M_{\dim W, \dim V}(K) \right\}$

composizione ⟷ prodotto di matrici

Punti da approfondire:

① Esistenza e unicità di trasf. affini?

② Una tr. affine ha punti uniti? $(F(P) = P)$

③ Problemi di transitività: esistono tr. affini che soddisfano a condizioni fissate?

14/03/2023

Riassunto: $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ ($\mathbb{A}$ spazio affine $= (\mathbb{A}, V, +)$)

trasf. affine se rispetta calcolo baricentrico
sse $F(P+v) = F(P) + \varphi(v)$ dove $\varphi : V \to V$ lineare $\forall P \in \mathbb{A}$, $\forall v \in V$

Affinità sse è anche biettiva
sse φ è isomorfismo

scelto un riferimento affine $P_0, P_1, \dots, P_n$ in $\mathbb{A}$,

$\mathrm{Trasf}(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \simeq V \rtimes \mathrm{Hom}(V, V) \simeq K^n \rtimes M_n(K) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} : t \in K^n, A \in M_n(K) \right\}$

$F \longleftrightarrow (v_0, \varphi) \longleftrightarrow (\alpha(v_0), \alpha(\varphi))$ $= (t, A)$

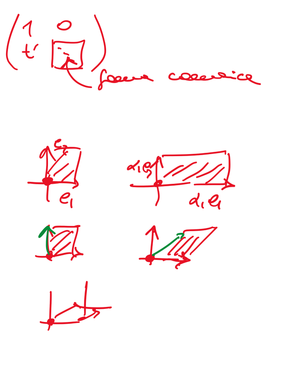
$F(P) = P_0 + v_0 + \varphi(v)$
$F(P_0 + v)$
$F(P_0) + \varphi(v)$
$P_0 + v_0$

PRODOTTO SEMIDIRETTO: $(t, A) \circ (t', A') = (t + At', AA')$

PRODOTTO DI MATRICI! $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t' & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t + At' & AA' \end{pmatrix}$

Intuizione: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t' & \boxed{\ } \end{pmatrix}$ forma canonica

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \ddots \alpha_n \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$



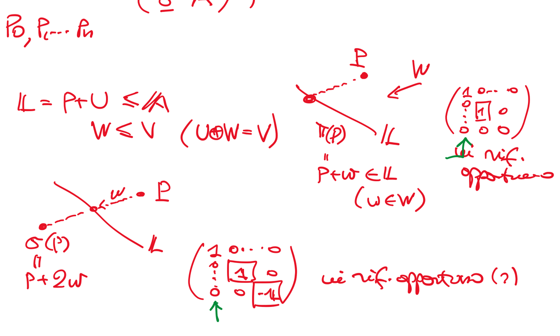
Casi particolari:

TRASLAZIONI $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ } decomposizione

Affinità centrali di centro P_0, rif. $P_0, P_1, \dots, P_n$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

Proiezioni affini: $\mathbb{L} = P + U \leq \mathbb{A}$, $W \leq V$ $(U \oplus W = V)$; $\pi(P)$, $P + w \in \mathbb{L}$ $(w \in W)$; rif. opportuno (?)

Simmetrie affini: $\sigma(P) = P + 2w$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \boxed{\mathbb{1}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\mathbb{1}} \end{pmatrix}$ in rif. opportuno (?)



Problema: dato $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affinità quando esistono punti $P \in \mathbb{A}$ uniti per F? $F(P) = P$

nota: se ce ne sono allora usando un riferimento affine che inizia con $P_0 = P$ otteniamo matrici del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & A \\ 0 & \end{pmatrix}$

perché $F(P_0) = P_0 + v_0 + \varphi(P_0 - P_0)$
$F(P) = P_0 + v_0 + \varphi(P - P_0)$
$F(P_0 + (P - P_0))$
$F(P_0 + v)$

dunque: $F(P_0) = P_0$ sse $v_0 = \underline{0}$

Soluzione: scelto un riferimento F si scrive come $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}$

e $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e allora $F(P) = P$ sse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

sse $\begin{pmatrix} 1 \\ t + Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

cioè $t + A\underline{x} = \underline{x}$

questo sistema ha soluzioni nelle incognite $\underline{x}$?
sse $A\underline{x} - \underline{x} = -\underline{t}$
sse $(A - \mathbb{1})x = -\underline{t}$

sistema LINEARE nelle x non omogeneo se $\underline{t} \neq \underline{0}$

se $A - \mathbb{1}$ è invertibile ($\equiv A$ non ha autovalore 1) allora esiste un punto unito $x = -(A - \mathbb{1})^{-1} \underline{t}$

altrimenti dipende da Rouché-Capelli: bisogna controllare se $t \in$ spazio colonne di $A - \mathbb{1}$.

(es. le simmetrie hanno punti uniti, le traslazioni non hanno punti uniti)

Problema più generale:

dato $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affinità, trovare sottospazi affini $\mathbb{L} \leq \mathbb{A}$ t.c. $F(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ ($\Rightarrow F(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ perché altrimenti avrebbe dim + piccola e F non sarebbe affinità)
(sottospazi uniti per F).

Problema: dato $\mathbb{L}, \mathbb{L}' \leq \mathbb{A}$, esiste una $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affinità tale che $F(\mathbb{L}) = \mathbb{L}'$?

dati $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_1', \mathbb{L}_2' \leq \mathbb{A}$, $\exists F$ affinità con $F(\mathbb{L}_1) = \mathbb{L}_1'$, $F(\mathbb{L}_2) = \mathbb{L}_2'$?

es: r, s sghembe $\leq \mathbb{A}^3$ $\xrightarrow{\exists ? F,\ F(r) = r',\ F(s) = s'}$ r', s' sghembe $\leq \mathbb{A}^3$

Caso particolare di affinità: OMOTETIE

$F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tr. affine è OMOTETIA se $\forall r$ retta $\leq \mathbb{A}$ otteniamo $r \parallel F(r)$

dimostriamo che F omotetia (sse) $\varphi = \alpha\, id_V$ $(\alpha \neq 0)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \alpha \ddots \alpha \end{pmatrix}$

(⇐) banale! $r = P + \langle v \rangle$ $\quad F(r) = F(P) + \langle \varphi v \rangle \parallel r$ ($\varphi v = \alpha v$)

(⇒) $\forall v \in V$ otteniamo $\varphi(v) = \alpha_v v$

ma: $\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') = \alpha_v v + \alpha_{v'} v'$
$\beta(v + v') = \beta v + \beta v'$ ⇒ v, v' lin. indip. $\alpha_v = \beta$, $\alpha_{v'} = \beta$.

dunque $\alpha_v = \alpha$ indipendente da v //

Problema:

omotetie $\leq$ Affinità
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \alpha \mathbb{1} \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 1$, $\neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}$

{omotetie e traslazioni} $\leq$ Affinità (gruppo per composizione!)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \alpha \mathbb{1} \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$ SOTTOGRUPPO!

Se F omotetia, $\alpha \neq 1$ allora F ha un unico punto unito "CENTRO dell'omotetia F"
(se $\alpha = 1$ allora F è TRASLAZIONE e non ha punti uniti se $F \neq id_{\mathbb{A}}$)

se F, G omotetie e $G \circ F$ { omotetie allora i 3 centri sono allineati! / traslazione allora la direzione di traslazione è quella dei 2 centri! }

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \alpha \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & \beta \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + \alpha w & \alpha\beta \mathbb{1} \end{pmatrix}$ { se $\alpha\beta = 1$: traslazione / se $\alpha\beta \neq 1$: omotetia }

20/03/2023