Geo1-22/3-62-GeoAffine-2

martedì 28 febbraio 2023 09:29

SOTTOSPAZI AFFINI, PROBLEMI DI POSIZIONE E DI INCIDENZA

Sp. vettoriali: basi – coordinate; sottospazi, ∩, +, Grassmann ⟷ Sp. Affini: riferim. – coordinate affini; sottospazi? reticolo? Grassmann? dimensioni?

Definizione: se $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$ spazio affine e $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{A}$ si dice che $\mathbb{L}$ è SOTTOSPAZIO AFFINE di $\mathbb{A}$ se o è $\emptyset$, oppure è $\mathbb{L}$ stesso uno spazio affine con $\mathbb{L} = (\mathbb{L}, W, +)$ e $W \leq V$

sse $\mathbb{L}$ è $\emptyset$ oppure $\mathbb{L} = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$ dove $P \in \mathbb{A}$, $W \leq V$.

(P: punto d'appoggio di $\mathbb{L}$; W: spazio delle TRASLAZIONI di $\mathbb{L}$ $= V_{\mathbb{L}}$)

$\dim(\mathbb{L}) = \begin{cases} -1 & \text{se } \mathbb{L} = \emptyset \\ \dim_K W & \text{se } \mathbb{L} = P + W \end{cases}$

Nota: il punto di appoggio NON è unico: $P + W = Q + W$ sse $P - Q \in W$; se invece $P - Q \notin W$ ...

NOTA: se $\mathbb{A} = V$ allora $\mathbb{L} = P + W$ sottospazio affine NON è sottospazio vettoriale (a meno che non contenga $0 \in V$) ma è una classe laterale di W (cioè un elemento di V/W)

CRITERIO DI UGUAGLIANZA: $\mathbb{L} = P + W$ e $\mathbb{L}' = P' + W'$ sono uguali sse $W = W'$ e $P - P' \in W$ (esercizio un sistemistico).

($\Rightarrow$ $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$ $\Rightarrow$ $P' \in \mathbb{L}' = \mathbb{L} (= P + W)$, $P' = P + w$ con $w \in W$, $P' - P = w \in W$)

Sia $\mathbb{A}$ spazio affine, siano $\mathbb{L} = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$, $\mathbb{L}' = P' + W'$; diciamo che $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{L}'$ sono:

1. incidenti se $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$
2. paralleli se $W \leq W'$ oppure $W' \leq W$
3. sghembi se $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset$ e $W \cap W' = \langle 0 \rangle$

CRITERIO DI INCIDENZA: $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ incidenti sse $P - P' \in W + W'$

$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$ sse $\exists Q \in \mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ sse $Q = P + w = P' + w'$ ($w \in W$, $w' \in W'$) sse $P + w = P' + w'$ per qualche $w \in W, w' \in W'$ sse $P - P' = -w + w' \in W + W'$

Esempi nel piano: sottospazi sono $\emptyset$, punti, rette, piano

punto e retta: P, $r = Q + \langle v \rangle$; $Q - P \in \langle v \rangle$

retta e retta: $r = P + \langle v \rangle$, $r' = P' + \langle v' \rangle$; rette //: $r = P + \langle v \rangle$, $r' = P' + \langle v \rangle$; rette incidenti: v, v' sono indip., $P - P' \in \langle v, v' \rangle = K^2$

Esempi nello spazio di dim 3: $\emptyset$, punti, rette, piani, spazio

rette e rette: $r = P + \langle v \rangle$, $r' = P' + \langle v' \rangle$; parallele se $\langle v \rangle = \langle v' \rangle$, distinte se $P - P' \notin \langle v \rangle$ ($P + \langle v, P - P' \rangle$), altrimenti sono =; altrimenti, v, v' sono indipendenti e dobbiamo vedere se $P - P' \in \langle v, v' \rangle$ → incidenti ($P + \langle v, v' \rangle$); $\notin \langle v, v' \rangle$ → sghembe

dimensione 4: la retta $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rangle = r$ e il piano $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle = \pi$ sono sghembi: $r \cap \pi = \emptyset$, $V_r \cap V_\pi = \langle 0 \rangle$

esempi di 2 piani che non sono incidenti né paralleli né sghembi:

$\pi = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \}$

$\pi' = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle = \{ \begin{pmatrix}\gamma\\0\\\delta\\1\end{pmatrix} \mid \gamma, \delta \in K \}$

Problema per tutti: non si può fare un esempio così (né incid., né parall., né sghembi) usando rette e/o iperpiani: posizioni di rette e $\mathbb{L}$? posizioni di iperpiano e $\mathbb{L}$?

Tutorato: lunedì, 1A150, 14:30–17:30 (15:30–17:30)

28/02/2023

Riassunto: $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$

sottospazi affini $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{A}$: $\emptyset$ oppure $P + W$: $P \in \mathbb{A}$, $W \leq V$; $\mathbb{L} = (\mathbb{L}, W, +)$

riferimento: $P_0, \dots, P_n$ n+1 punti p.g.; $O, v_1, \dots, v_n$ base V; COORDINATE: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}^n(K)$

$\dim \mathbb{L} = \dim_K W$: $\emptyset$ dim $\emptyset = -1$; punti dim = 0 ($P = P + \langle 0 \rangle$); rette dim = 1 ($P + \langle v \rangle$, $v \neq 0$); piani dim = 2 ($P + \langle v, w \rangle$, l. indip.); iperpiani dim = n−1 ($P + \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, l. indip.)

$\mathbb{L}, \mathbb{L}'$: incidenti $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$; paralleli $W \leq W'$ o $W' \leq W$; sghembi $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset$, $W \cap W' = \langle 0 \rangle$

Descrizione dei SOTTOSPAZI AFFINI

$\mathbb{L} = P + \langle v_1, \dots, v_r \rangle = \{ P + \sum_i \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in K \} \subseteq \mathbb{A}$

Fissate coordinate (un sist. di rif.) in $\mathbb{A}$, abbiamo $P = \begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}$, $v_i = \begin{pmatrix}x_{1i}\\\vdots\\x_{ni}\end{pmatrix}$ e allora i punti di $\mathbb{L}$ sono di coordinate $\begin{pmatrix}X_1\\\vdots\\X_n\end{pmatrix}$ t.c.

$\begin{pmatrix}X_1\\\vdots\\X_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix} + \sum_i \alpha_i \begin{pmatrix}x_{1i}\\\vdots\\x_{ni}\end{pmatrix}$

$\begin{cases} X_1 = p_1 + \sum_i \alpha_i x_{1i} \\ X_2 = p_2 + \sum_i \alpha_i x_{2i} \\ \vdots \\ X_n = p_n + \sum_i \alpha_i x_{ni} \end{cases}$ ⟿ eliminando i parametri α_i $\begin{cases} \ell_1(X_1, \dots, X_n) = k_1 \\ \vdots \\ \ell_{n-r}(X_1, \dots, X_n) = k_{n-r} \end{cases}$

n equazioni "dim $\mathbb{A}$ = dim V"; n−r equazioni nelle X_i, lineari non omog.; risolvendo (Rouché Capelli)

Esempi: nel piano la retta per $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$: $r = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle$; $\begin{cases} X = 1 + \alpha \\ Y = 2 + \alpha \end{cases}$ ⟿ $\alpha = X - 1$, $\{ Y = 2 + X - 1$, $\boxed{X - Y + 1 = 0}$

direttamente: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & 1 & 2 \\ Y & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ oppure $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ X & 1 & 1 \\ Y & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $-1 - X + Y = 0$

Retta $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ nello spazio $\mathbb{A}^3(K)$: $r = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$; altrimenti: $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & 1 & 1 \\ Y & 1 & 2 \\ Z & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ oppure $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ X & 1 & 0 \\ Y & 1 & 1 \\ Z & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Ora sappiamo che sottosp. affini = soluzioni di sistemi lineari non nec. omog. Dunque il teorema di Rouché Capelli dovrebbe dire tutto sulla posizione reciproca di sottospazi affini

Esempio: DUE RETTE NEL PIANO = sistema di 2 equazioni lin. in X, Y (2 incognite) di rango incompleto ≥ 1: $\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$ ⟶ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ rg incomp. ≥ 1

rg incomp.	rg completo
1	1, 2
2	2

DUE PIANI NELLO SPAZIO = due equazioni in 3 incognite $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ rg incomp. ≥ 1

rg inc	rg c
1	1, 2
2	2

GENERALIZZARE AGLI IPERPIANI!

DUE RETTE nello SPAZIO: $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ rg incomp. ≥ 2

rg incomp.	rg completo
2	2, 3
3	3, 4

PROBLEMI: CASI: piano e retta nello spazio $\mathbb{A}^3$; due piani nello spazio $\mathbb{A}^4$; retta e piano nello spazio $\mathbb{A}^4$

DISCUTERE LE POSIZIONI DI 3 SOTTOSPAZI, esempio:

STRUTTURA DI RETICOLO DEI SOTTOSPAZI AFFINI (E GRASSMANN AFFINE).

$\mathbb{L} = P + W$, $\mathbb{L}' = P' + W'$ $\leq \mathbb{A}$

1. esiste un più grande sottospazio affine contenuto sia in $\mathbb{L}$ sia in $\mathbb{L}'$? $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset$ oppure $\neq \emptyset$ allora $\mathbb{L} = Q + W$, $\mathbb{L}' = Q + W'$, allora $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = Q + (W \cap W')$ sottospazio affine. Sì, $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ è il più grande sottospazio affine contenuto in $\mathbb{L}$ e in $\mathbb{L}'$. $\mathbb{L} \wedge \mathbb{L}' := \mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ (inf, meet)
2. esiste un più piccolo sottospazio affine che contiene sia $\mathbb{L}$, sia $\mathbb{L}'$? si chiama $\mathbb{L} \vee \mathbb{L}'$ (sup, join). Chiaramente l'unione $\mathbb{L} \cup \mathbb{L}'$ NON va bene! perché NON è un sottospazio affine (di solito). Risposta: il più piccolo sottosp. affine che contiene $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{L}'$ deve contenere P, P', e poi nello sp. direttore deve contenere sia W sia W'; quindi: $\mathbb{L} \vee \mathbb{L}' = P + \langle W, W', P' - P \rangle = P + (W + W' + \langle P' - P \rangle)$ dim?

L'insieme di tutti i sottospazi affini di $\mathbb{A}$ è ordinato per $\leq$ e ha operazioni $\wedge, \vee$ (è reticolo non distributivo). Domanda: e Grassmann?

Formula di Grassmann affine: dati $\mathbb{L} = P + W$, $\mathbb{L}' = P' + W'$ $\leq \mathbb{A}$ sottospazi affini allora

$\dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{L}' \geq \dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{L}') + \dim(\mathbb{L} \wedge \mathbb{L}')$

e vale l'uguaglianza sse i due sottospazi $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ sono o incidenti o sghembi.

dimostrazione: $\dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{L}' = \dim_K W + \dim_K W' = \dim_K(W + W') + \dim_K(W \cap W')$; ma dobbiamo considerare $\dim \mathbb{L} \vee \mathbb{L}' = \begin{cases} \dim(W+W')+1 & \text{se } \mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset \\ \dim(W+W') & \text{se } \mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset \end{cases}$, $\dim \mathbb{L} \wedge \mathbb{L}' = \begin{cases} -1 & \text{se } \mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset \\ \dim(W \cap W') & \text{se } \mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset \end{cases}$

se $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset$: $= (\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{L}') - 1) + \dim_K(W \cap W') = \dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{L}') + \dim(\mathbb{L} \wedge \mathbb{L}') + \dim_K(W \cap W') \geq \dim \mathbb{L} \vee \mathbb{L}' + \dim \mathbb{L} \wedge \mathbb{L}'$ (ed è = sse $\dim(W \cap W') = 0$ sse $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ sghembi!)

se $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$: $= \dim \mathbb{L} \vee \mathbb{L}' + \dim \mathbb{L} \wedge \mathbb{L}'$

"massima differenza nella ≥ è però $\dim_K(W \cap W')$"

Esempi: due rette parallele nel piano: $\dim r + \dim r' = 1 + 1 = 2 > \dim(r \vee r') + \dim(r \wedge r') = 2 - 1 = 1$

retta e piano // in spazio $\mathbb{A}^3$: $r = P + \langle v \rangle$, $\pi = Q + \langle v, w \rangle$: $3 = 1 + 2 > 3 - 1 = 2$

due piani in $\mathbb{A}^4$ non incid., non parall., non sghembi: $\pi: O + \langle e_1, e_2 \rangle$, $\pi': e_4 + \langle e_1, e_3 \rangle$, $\pi \cap \pi' = \emptyset$, $\pi \vee \pi' = O + \langle e_1, e_2, e_3, e_4 - 0 \rangle = \mathbb{A}^4$; $4 = 2 + 2 > 4 - 1 = 3$; $V_\pi \cap V_{\pi'} = \langle e_1 \rangle$

In $\mathbb{A}$ spazio affine, due spazi $\mathbb{L}, \mathbb{L}'$ si dicono COMPLEMENTARI se: sono sghembi e $\mathbb{L} \vee \mathbb{L}' = \mathbb{A}$ sse $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' = \emptyset$, $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{L}'} = \langle 0 \rangle$, $\mathbb{L} \vee \mathbb{L}' = \mathbb{A}$

NOTA: $\dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{L}' = \dim \mathbb{L} \vee \mathbb{L}' + \dim \mathbb{L} \wedge \mathbb{L}' = \dim \mathbb{A} + (-1) = n - 1$ (sghembi)

Esempio: due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$; un punto e una retta in $\mathbb{A}^2$; un punto e un piano in $\mathbb{A}^3$; una retta e un piano sghembi in $\mathbb{A}^4$; due piani sghembi in $\mathbb{A}^5$ (non esistono piani sghembi in dim ≤ 4)

01/03/2023

Riassunto: spazi affini $(\mathbb{A}, V, +)$; $P_0 \in \mathbb{A}$: $\mathbb{A} \simeq V$, $P \mapsto P - P_0$; $P_0, P_1, \dots, P_n$ riferimento ($P_0 = O$, $v_1, \dots, v_n$ base V): $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}^n(K) \simeq K^n$, $P \mapsto$ coordinate del vettore $P - P_0$

Sottospazi affini: $P + W$ con $P \in \mathbb{A}$, $W \leq V$ (= "traslati di sottospazi vettoriali")

criterio uguaglianza $P + W = P' + W'$ sse $W = W'$ e $P - P' \in W$.

incidenti: $L \cap L' \neq \emptyset$ sse $P - P' \in W + W'$; paralleli: $W \leq W'$ oppure $W' \leq W$; sghembi: $L \cap L' = \emptyset$, $W \cap W' = \langle 0 \rangle$; complementari: sghembi e $L \vee L' = \mathbb{A}$

meet = inf $L \wedge L' = L \cap L'$ (intersezione); join = sup $L \vee L'$ = più piccolo sottospazio affine che $\supseteq L \cup L'$ $= P + (W + W' + \langle P' - P \rangle)$

Grassmann: $\dim L + \dim L' \geq \dim L \vee L' + \dim L \wedge L'$; vale = sse incid. o sghembe; altrimenti diff. è $\dim_K W \cap W'$...

Equazioni di sottospazi (parametriche, non necessariamente cartesiane) e posizioni reciproche tramite discussione di sistemi (Rouché Capelli).

Problemi di incidenza e uso di famiglie di sottospazi.

Problema: siano r, s rette sghembe in $\mathbb{A}^3(K)$, sia $P \in r \vee s = \mathbb{A}^3(K)$, $P \notin r \cup s$ ($\dim(r \vee s) = \dim r + \dim s - \dim(r \wedge s) = 1 + 1 - (-1) = 3$; sghembe) allora esiste una unica retta t (TRASVERSALE COMUNE) che è passante per P complanare sia con r sia con s (può essere incidente con entrambe, o parallela a una o all'altra, ma non a entrambe!).

(Problemino: la relazione di parallelismo TRA SOTTOSPAZI DELLA STESSA DIMENSIONE è relazione di equivalenza; può tra spazi di dim diversa non è detto che sia transitiva)

dimostriamo l'esistenza di t: se esiste, allora deve:

1. $t \leq r \vee P$ (più piccolo sottospazio contenente r e P; $\dim(r \vee P) = \dim r + \dim P - \dim(r \wedge P) = 1 + 0 - (-1) = 2$ è piano!)
2. $t \leq s \vee P$ (... è piano!)

dunque $t \leq (r \vee P) \wedge (s \vee P)$; se mostriamo che questa è una retta, allora è l'unica possibile, ed è esattamente la t cercata:

(a) $\dim((r \vee P) \wedge (s \vee P)) = \dim(r \vee P) + \dim(s \vee P) - \dim((r \vee P) \vee (s \vee P)) = 2 + 2 - 3 = 1$ (incidenti, stanno in P); $(r \vee P) \wedge (s \vee P)$ è retta!
(b) passa per P (entrambi $r \vee P$ e $s \vee P \ni P$)
(c) complanare con r perché $t \leq r \vee P$
(d) complanare con s perché $t \leq s \vee P$

Problema: generalizzare in $\mathbb{A}^n$ con $n \geq 3$; esempio: $\mathbb{A}^4$: π, r piano e retta sghembi, $P \notin \pi \cup r$; esiste qualche trasversale comune per P, π, r? $\mathbb{A}^5$: π, σ piani sghembi, $P \notin \pi \cup \sigma$

Come si fa a calcolare davvero t? $t = (P \vee r) \wedge (P \vee s)$ intersezione di 2 piani, basta trovare $P \vee s$, $P \vee r$.

Se $r = R + \langle v \rangle$, $s = S + \langle w \rangle$ allora $r \vee P = P + \langle v, R - P \rangle = R + \langle v, P - R \rangle$; $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ X & R & P & v \end{pmatrix} = 0$; si trovano le 2 equazioni per t.

Se $r: \begin{cases} aX + bY + cZ = d \\ a'X + b'Y + c'Z = d' \end{cases}$, $r \vee P$? I piani che contengono la retta r sono tutti e soli quelli di equazione $\alpha(aX + bY + cZ - d) + \alpha'(a'X + b'Y + c'Z - d') = 0$ con $(\alpha, \alpha') \neq (0, 0)$ (perché contengono r (tutti i punti di r annullano); poi se $\pi \supseteq r$ allora il sistema rimane di rango 2 perciò la 3ª equazione è combinazione delle prime). Per trovare quello che passa per P basta imporre la condizione $\alpha(aX_P + bY_P + cZ_P - d) + \alpha'(a'X_P + b'Y_P + c'Z_P - d') = 0$; basta usare $\alpha = A'$, $\alpha' = -A$: $\alpha A + \alpha' A' = 0$

Esempio: $r = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$, equazioni r: $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ X & -1 & 0 \\ Y & 1 & 1 \\ Z & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ⟶ $\begin{cases} X + 1 = 0 \\ Y - Z = 0 \end{cases}$

$s = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$, equazioni s: $\begin{cases} X = 1 \\ Y = 1 + \alpha \\ Z = 1 \end{cases}$ ⟶ $\begin{cases} X - 1 = 0 \\ Z - 1 = 0 \end{cases}$

$P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Controllo $P \in r$? no; $P \in s$? no. Allora calcolo la retta $t = (r \vee P) \wedge (s \vee P)$

piano $r \vee P$: fascio $\alpha(X + 1) + \beta(Y - Z) = 0$ (piani che ⊇ r); passaggio per P: $\alpha(2) + \beta(-1) = 0$, dunque uso $\alpha = 1$, $\beta = 2$; $r \vee P$ ha equazione $(X + 1) + 2(Y - Z) = 0$: $\boxed{X + 2Y - 2Z + 1 = 0}$

$s \vee P$: $\alpha(X - 1) + \beta(Z - 1)$; pass. per P: $\alpha(0) + \beta(2) = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$; $s \vee P$ ha equazione $X - 1 = 0$

$t: \begin{cases} X + 2Y - 2Z + 1 = 0 \\ X - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} Y - Z + 1 = 0 \\ X - 1 = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$ è // r, incidente con s...

Famiglie di SOTTOSPAZI:

dato un punto nel piano: FASCIO DI RETTE per il punto $P = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\end{pmatrix}$ ≡ famiglia delle rette per P; $P: \begin{cases} X = X_0 \\ Y = Y_0 \end{cases} = \begin{cases} X - X_0 = 0 \\ Y - Y_0 = 0 \end{cases}$; fascio $\alpha(X - X_0) + \beta(Y - Y_0) = 0$ con $\alpha, \beta \in K^2 \neq 0,0$

Attenzione: date due rette $aX + bY + c = 0$, $a'X + b'Y + c' = 0$, cosa descrivono le equazioni $\alpha(aX + bY + c) + \beta(a'X + b'Y + c') = 0$? FASCIO PROPRIO / FASCIO IMPROPRIO

dato un punto nello spazio è ∩ di 3 piani: $P = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\\Z_0\end{pmatrix} \equiv \begin{cases} X - X_0 = 0 \\ Y - Y_0 = 0 \\ Z - Z_0 = 0 \end{cases}$; $\alpha(X - X_0) + \beta(Y - Y_0) + \gamma(Z - Z_0) = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in K^3 \neq 0,0,0$ è un piano che $\ni P$ (la rete di piani per P) dipende da 3 parametri a meno di costante.

Dati tre piani in $\mathbb{A}^3$: $aX + bY + cZ + d = 0$, $a'X + b'Y + c'Z + d' = 0$, $a''X + b''Y + c''Z + d'' = 0$; quali piani sono descritti dall'equazione $\alpha(\ ) + \beta(\ ) + \gamma(\ ) = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in K \neq 0,0,0$? Se i 3 piani si intersecano in un punto, allora è la rete di piani per quel punto. Altrimenti?

data una retta nello spazio, come trovare tutti i piani che contengono quella retta? $r \begin{cases} aX + bY + cZ + d = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z + d' = 0 \end{cases}$ allora il fascio di piani per r è $\alpha(aX + bY + cZ + d) + \beta(a'X + b'Y + c'Z + d') = 0$ con $\alpha, \beta \in K^2 \neq 0,0$ (usare α, β oppure $\lambda\alpha, \lambda\beta$ con $\lambda \neq 0$ dà lo stesso piano!) $(\alpha, \beta) \in (K^2 \setminus \{(0,0)\}) / K^\times$

MORALE: così è facile descrivere FAMIGLIE DI IPERPIANI (oggetti con 1 sola equazione).

Es. fascio di rette in un piano in $\mathbb{A}^3$: $\pi (\ell = 0)$; $\begin{cases} \ell = 0 \\ \alpha(m) + \beta(n) = 0 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in K^2 \neq 0,0$

Problema: come descrivere la FAMIGLIA delle RETTE per 1 punto in $\mathbb{A}^3(K)$?

Qui non conviene usare le equazioni (3 rette, 2 equazioni ciascuna ⟿ 6 equazioni?) ma usare la descrizione vettoriale: $P = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\\Z_0\end{pmatrix}$, usiamo un vettore $v = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ $\alpha, \beta, \gamma \in K^3 \neq 0,0,0$ come "direzione possibile", abbiamo $P + \langle v \rangle = \begin{pmatrix}X_0\\Y_0\\Z_0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \rangle$; equazioni da $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ X & X_0 & \alpha \\ Y & Y_0 & \beta \\ Z & Z_0 & \gamma \end{pmatrix} = 2$, dipendono da 3 parametri α, β, γ non tutti nulli, a meno di costante moltiplicativa

Problema: date r, s, u tre rette in $\mathbb{A}^3(K)$ 2 a 2 sghembe; per ogni punto $U \in u$ esiste una unica retta t_U passante per U complanare con r, s $= (U \vee r) \wedge (U \vee s)$

allora: ① le rette t_U sono 2 a 2 sghembe (se $U \neq U'$ allora $t_U, t_{U'}$ sghembe) ② descrivere l'unione di queste rette

$U = U(\alpha) \in u$, $U = U_0 + \alpha v_0$ se $u = U_0 + \langle v_0 \rangle$

$t_U: (U \vee r) \wedge (U \vee s): \begin{cases} \ell_1(\alpha, X, Y, Z) = 0 \\ \ell_2(\alpha, X, Y, Z) = 0 \end{cases}$

ora $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in$ Unione delle rette t_U ($U \in u$) $= \bigcup_{U \in u} t_U$ sse $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in$ una delle rette sse $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ soddisfa a $\begin{cases} \ell_1(\alpha, X, Y, Z) = 0 \\ \ell_2(\alpha, X, Y, Z) = 0 \end{cases}$ per qualche $\alpha \in K$ (per qualche $U \in u$) sse $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $\begin{cases} m(X,Y,Z)\alpha + m'(X,Y,Z) = 0 \\ n(X,Y,Z)\alpha + n'(X,Y,Z) = 0 \end{cases}$ per qualche α sse $\begin{vmatrix} m(X,Y,Z) & m'(X,Y,Z) \\ n(X,Y,Z) & n'(X,Y,Z) \end{vmatrix} = 0$ equazione di 2° grado nelle X, Y, Z!

Esempio: $r = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle = \begin{cases} X + 1 = 0 \\ Y - Z = 0 \end{cases}$; $s = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle = \begin{cases} X - 1 = 0 \\ Z - 1 = 0 \end{cases}$; $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$, $U(\lambda) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\lambda\\2+\lambda\\3+\lambda\end{pmatrix}$

$r \vee U(\lambda)$: fascio piani per r $\alpha(X + 1) + \beta(Y - Z) = 0$; passaggio per $U(\lambda)$: $\alpha(\lambda + 2) + \beta(-1) = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = \lambda + 2$; equazione $(X + 1) + (\lambda + 2)(Y - Z) = 0$, $X + (\lambda + 2)Y - (\lambda + 2)Z + 1 = 0$

$s \vee U(\lambda)$: $\alpha(X - 1) + \beta(Z - 1) = 0$; $\alpha(\lambda) + \beta(2 + \lambda)$, $\alpha = 2 + \lambda$, $\beta = -\lambda$; equazione $(2 + \lambda)(X - 1) - \lambda(Z - 1) = 0$, $(2 + \lambda)X - \lambda Z - 2 = 0$

retta $t(\lambda) \begin{cases} X + (\lambda + 2)Y - (\lambda + 2)Z + 1 = 0 \\ (2 + \lambda)X - \lambda Z - 2 = 0 \end{cases}$ ⫴ $\begin{cases} \lambda(Y - Z) + (X + 2Y - 2Z + 1) = 0 \\ \lambda(X - Z) + (2X - 2) = 0 \end{cases}$

Unione delle rette $t(\lambda)$ al variare di λ: $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in \bigcup_{\lambda \in K} t(\lambda)$ sse esiste λ tale che $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in t(\lambda)$ sse esiste λ soluzione del sistema sse il rango $\begin{pmatrix} Y - Z & X + 2Y - 2Z + 1 \\ X - Z & 2X - 2 \end{pmatrix}$ è 1 (sistema ha soluzione in λ) sse $\begin{vmatrix} Y - Z & X + 2Y - 2Z + 1 \\ X - Z & 2X - 2 \end{vmatrix} = 0$ sse $(Y - Z)(2X - 2) - (X - Z)(X + 2Y - 2Z + 1) = 0$ (equazione di 2° grado nelle X, Y, Z).

6 marzo 2023