Lezioni : mercoledì 2 ore oblique con Rodà
ricevimento : lunedì prima/dopo lezione
tutorato : lu. pomeriggio (da 6 marzo).

Prerequisiti per tutti : RETROSPETTIVA del 1° semestre

Secondo semestre :

① Geometria AFFINE : di grado zero dell'algebra lineare

② Geometria EUCLIDEA / HILBERTIANA : su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
vi introducendo strumenti di misura
(prodotto scalare, lunghezze → distanze, angoli, volumi)
spunti ORTOGRAFICI di MATRICI

③ Geometria PROIETTIVA

Spazi Affini (su un campo K)

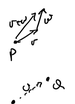
idea: concretizzare un insieme di punti "uniforme",
in cui ci possiamo spostare da uno all'altro liberamente

uno spazio affine (su K, di dimensione n) è una terna
$\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$ dove $\mathbb{A}$ è un INSIEME (PUNTI), V è sp. vett su K di dim n (SPAZIO DELLE TRASLAZIONI di $\mathbb{A}$), $+$ è AZIONE FEDELE E TRANSITIVA di V su $\mathbb{A}$ (APPLICARE),
cioè :

$$+ : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \qquad (P, v) \longmapsto P+v$$

funzione tale che:

① nullitorietà : $P + 0 = P \quad \forall P \in \mathbb{A}$
② associatività : $(P+v)+w = P+(v+w) \quad \forall P \in \mathbb{A}, \forall v,w \in V$ (AZIONE FEDELE)



③ differenza : $\forall P,Q \in \mathbb{A}, \exists! v \in V : Q = P+v$] TRANSITIVA

Osservazioni :

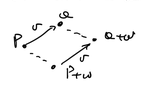
(0) $P+v = P$ sse $v = 0$ ($\Leftarrow$ ④ assioma
$\Rightarrow$ ③ $\exists!$: $P, P, \exists! v : P+v=P$)

(1) $P+w = P+v$ sse $w=v$ (viene da ③)

(2) $P+v = Q+v$ sse $P=Q$ ($P+v = Q+v \Rightarrow$
$(P+v)+(-v) = (Q+v)+(-v) \Rightarrow$
$P+(v-v) = Q+(v-v) \Rightarrow P+0 = Q+0$
$P \quad\quad Q$)

(3) "differenza di punti" :
da ② $\forall P,Q \in \mathbb{A}, \exists! v : P+v = Q$
scriviamo anche che il vettore $v = Q-P$
DIFFERENZA di PUNTI
è un vettore!
$P+(Q-P) = Q$

$v = P-Q$ (non in modo unico!)
$= P'-Q'$

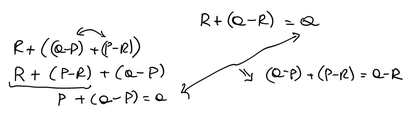


$Q = P+v$
$\Downarrow$
$(Q+w) = (P+v)+w$
$= P+(v+w)$
$= P+(w+v)$
$= (P+w)+v$

è una funzione $- : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$
$(P, Q) \longmapsto Q-P = v$ vettore
quali proprietà ha questa funzione?
① $Q-P = 0$ nullo sse $P=Q$
⋮

nota : $(Q-P)+(P-R) = Q-R \qquad P,Q,R \in \mathbb{A}$
Somma di vettori:
non ha senso cancellare le ( ),
non ha senso "cancellare P",
ma il risultato è corretto!

Difficile per verificare che due vettori
$(Q-P)+(P-R)$ e $Q-R$
sono uguali, basta vedere che
"applicati allo stesso punto danno lo stesso punto":



$R + ((Q-P)+(P-R))$
$R + (P-R) + (Q-P)$
$P + (Q-P) = Q$
$R + (Q-R) = Q$
$(Q-P)+(P-R) = Q-R$

---

nota : Dalla definizione segue che $\mathbb{A}$ e V sono in corrispondenza biunivoca!

perché scelto $P_0 \in \mathbb{A}$ abbiamo una funzione

$$\mathbb{A} \longrightarrow V \qquad P \longmapsto P-P_0$$

che è biiettiva.

$P_0 + v \longleftarrow v$

ma dipende dalla scelta di un punto $B \in \mathbb{A}$ ("origine").
Non c'è una unica biiezione di $\mathbb{A}$ in V.

① V stesso spazio vettoriale :

$(\mathbb{A}, V, +) = (V, V, +)$ dove $+ : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}$; $V \times V \to V$; somma di vettori!
$\mathbb{A}$ $\quad\quad$ V
$\mathbb{A}(V)$

Spazio affine associato allo spazio vettoriale V:
V è giustino dipendere
$\mathbb{A}(V)$ è insieme (con azione fedele) di V

② Usando $V = V_n(K) = K^n$ spazio vettoriale standard
otteniamo :

$$\mathbb{A}^n(K) = (\mathbb{A}^n, V_n, +)$$

Spazio affine standard di dimensione n su K.

Ogni spazio affine con cui biiezione con $\mathbb{A}^n(K)$, ma : CHE SCELTE POSSIAMO FARE per avere questo BIIEZIONE?

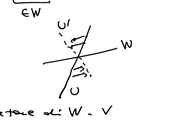
③ $W \leq V$ sottospazio vettoriale di V

$\mathbb{A} = \{ U : U \leq V, \ U \oplus W = V \}$ ($U \cap W = 0$, $U + W = V$)
insieme di TUTTI i complementari di W
è spazio affine con spazio vettoriale delle traslazioni

$T = \mathrm{Hom}_K(V/W, W)$ che ha dimensione $(\dim_K V - \dim_K W) \cdot \dim_K W = (n-m)m$

e azione :

$$\mathbb{A} \times T \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$(U, \Psi) \longmapsto U + \Psi := \{ u + \Psi([u]) \mid u \in U \}$$
($u \in U$, $\Psi : V/W \to W$, $[u] \mapsto \Psi([u]) \in W$)



devo dimostrare :
⓪ $U+\Psi$ è davvero un complementare di W in V
① nullitorietà : $U + 0 = \{u+0 \mid u \in U\} = U$
② $\vee$
③ dati U, U' due complementari di W ($V = U \oplus W = U' \oplus W$)
allora (ricordiamo che $U \hookrightarrow V \to V/W$ è $\cong$)
otteniamo

$(u-u' \in W)$; $V/W \Rightarrow V/W \xrightarrow{\Psi} W$, $[v] \mapsto \underbrace{\varphi([v]) - \Psi'([v])}_{\in W}$; $u - u'$

e risulta $U + \Psi = U'$.

Lo spazio T delle traslazioni per $\mathbb{A} = \{\text{campi di } W\}$
$T = \mathrm{Hom}_K(V/W, W)$
è isomorfo come sp. vettoriale a

$$\mathbb{T} = \{ \varphi : V \to V : \varphi \text{ automorfismo}, \ \varphi|_W = \mathrm{id}_W, \ \varphi_{V/W} : V/W \to V/W \text{ è } \mathrm{id}_{V/W} \} \subseteq \mathrm{Aut}_K(V)$$

con l'operazione di PRODOTTO = COMPOSIZIONE

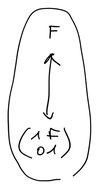
Scelte basi $\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\text{base di } W}, v_{m+1}, \dots, v_n$ di V

allora abbiamo $v_1, \dots, v_m$ base di W
$[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ base di V/W

e $T = \mathrm{Hom}_K(V/W, W) \cong M_{m, n-m}(K)$ con operazione di somma
e
$\mathbb{T} = \{ \varphi \in \mathrm{Aut}(V) : \varphi|_W = \mathrm{id}_W, \ \varphi_{V/W} = \mathrm{id}_{V/W} \} \cong \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_m & F \\ \hline 0 & \mathbb{1}_{n-m} \end{array} \right) : F \in M_{m,n-m}(K) \right\}$

$[v_i] \mapsto [v_i + w]$?

$\left(\begin{array}{c|c} 1 & F \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & G \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & F+G \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$
$\left(\begin{array}{c|c} 1 & G \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & F \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ "



F
$\left(\begin{array}{c|c} 1 & F \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

$\mathbb{A} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{A}$
$(U, \Psi) \longmapsto \Psi(U)$
$\Psi : V \to V$
$\forall u \in U : \Psi(u) = u + \Psi([u])$
$\Psi = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id}_U & * \\ \hline 0 & \mathrm{id}_{V/U} \end{array}\right)$

Isomorfismo $(T, +) \cong (\mathbb{T}, \circ)$
$0 \longleftrightarrow 1$
$F+G \longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & F \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & G \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$
(moltiplicazione per scalari in K?)

— 27/02/2023 —

Problema : (nota : per convenzione ~~definiamo~~ $\emptyset$ è sp. affine e diciamo $\dim(\emptyset) = -1$)
dato $\varphi : V \to W$ applicazione lineare,
gli insiemi
inverse sinistre $= \{ \Psi : W \to V \mid \Psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V \} \subseteq \mathrm{Hom}_K(W, V)$
inverse destre $= \{ \chi : W \to V \mid \varphi \circ \chi = \mathrm{id}_W \}$
NON sono sottospazi vettoriali,
MA sono spazi affini (di che dimensione?).

NOTA $\emptyset$ NON è spazio vettoriale,
perché non contiene 0
(el. neutro per $+$).

Spazio affine $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$ su K di dim $n = \dim_K V$: $\mathbb{A}$ insieme, V sp vett / K, $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ azione fed. transitiva

allora • $\mathbb{A} \cong V$ insiemistica : scelto $P_0 \in \mathbb{A}$: $\mathbb{A} \to V$, $P \mapsto P - P_0$, $P_0 + v \leftarrow v$

• "differenza tra punti dà vettori"
$\forall P, Q \in \mathbb{A} : \ v = Q - P$ unico tale che $P + v = Q$

Esempio più facile di sp affine : $\mathbb{A} = K^n$, $V = K^n$, $+$:
$\mathbb{A}^n(K)$
" $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$

Domanda : V spazio vettoriale
2 basi, $v_1, \dots, v_n \Rightarrow V \cong V_n(K) = K^n$
$v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum x_i v_i = v$ ($x_i = \alpha_i(v)$)

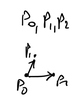
cambiando base cambia l'isomorfismo

$\mathbb{A}$ spazio AFFINE, come fare per dire
conosciuto ad ogni punto $\Sigma \in \mathbb{A}$?
Come fare una biiezione $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}^n(K)$

Def : $n+1$ punti $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$ è in POSIZIONE GENERALE
se : $\underbrace{P_1 - P_0, P_2 - P_1, \dots, P_n - P_0}_{n \text{ vettori}}$ sono LIN. INDIP.

Esempi : P_0, P_1 sono pos. generale sse $P_0 - P_1 \neq 0$
sse $P_0 \neq P_1$

P_0, P_1, P_2 sono pos. generale sse $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$ sono lin. indip



NON sono in pos. generale :
$P_1 - P_0$, $P_2 - P_0$ dipendenti
(P_0, P_1, P_2 allineati)

Sia $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$ spazio affine, ($\dim V = n$)
un RIFERIMENTO AFFINE su $\mathbb{A}$ è il dato di

① $n+1$ punti $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$ in pos generale

② un punto $O \in \mathbb{A}$ e una base $v_1, \dots, v_n$ di V.

(1) $P_0, P_1, \dots, P_n \rightsquigarrow O = P_0$, $v_1 = P_1 - P_0$, $v_2 = P_2 - P_0$, $\dots$, $v_n = P_n - P_0$
(2) ($v_1, \dots, v_n$ base di V)

(2) $O, v_1, \dots, v_n \rightsquigarrow P_0 = O$, $P_1 = O + v_1$, $P_2 = O + v_2$, $\dots$, $P_n = O + v_n$
(posizione generale)

Notazione : $O = P_0$ ORIGINE del Riferimento
$P_1, \dots, P_n$ "punti unità del riferimento".

Se $\mathbb{A}$ sp. affine, $R = (O, v_1, \dots, v_n)$ riferimento in $\mathbb{A}$,
allora :

$\forall P \in \mathbb{A} : \ \underbrace{P - O}_{\in V} = \sum x_i v_i$

e diciamo che le n-ple $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sono le COORDINATE
di $P \in \mathbb{A}$ nel riferimento R : $\alpha_R(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
cioè $P = O + \sum x_i v_i$

Questo dà biiezione $\mathbb{A} \xrightarrow{\alpha_R} \mathbb{A}^n(K)$, $P \mapsto \alpha_R(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$O + \sum x_i v_i \longleftarrow$

Problema : se $R = (O, v_1, \dots, v_n)$ e $R' = (O', v_1', \dots, v_n')$ sono due riferimenti in uno spazio affine $\mathbb{A}$:
che relazioni ci sono tra $\alpha_R(P)$ e $\alpha_{R'}(P)$

nota : $R = (O, v_1, \dots, v_n)$ $\quad$ $R' = (O', v_1, \dots, v_n)$

$P - O = (O' - O) + (P - O')$
$\alpha_R(P) = \alpha_R(O' - O) + \alpha_R(P)$

morale: cambiare l'origine cambia le coordinate per una TRASLAZIONE (somma a tutte le coord di punti lo stesso vettore $O' - O$).

NOTA : $\alpha_R(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ($P_0 - P_0 = 0$), $\alpha_R(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $\alpha_R(P_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$P_i - P_0 = \sum x_i v_i = 1 \cdot v_i + 0 \cdots$
$R = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ $\quad$ $\alpha_R(P) : P - P_0 = \sum x_i v_i$

Criteri per posizione generale:

$P_0, \dots, P_n$ punti sono pos. gen. $\Leftrightarrow$ $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ lin. indip
sse $\dim_K(P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0) = n$
sse $\mathrm{rg}\left(\alpha_O(P_1 - P_0), \dots, \alpha_O(P_n - P_0) \right) = n$ ($n \times n$)
sse la matrice $\left(\alpha_O(P_1 - P_0) \cdots \alpha_O(P_n - P_0) \right)$ ha almeno 1 minore max $\neq 0$
(minori = DETERMINANTI di SOTTOMATRICI QUADRATE di ORDINE MASSIMO $n \times n$ perché la matrice è $n \times n$)

$\mathrm{rg}(P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0) = n$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_0 & P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix} = n+1$

$\begin{pmatrix} P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ P_0 & P_1 P_0 & \cdots & P_n - P_0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_0 & P_1 & & P_n \end{pmatrix}$
rango n $\quad$ rango $n+1$

Esempi :

3 punti $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{A}$ (non tutti =)

sono allineati sse $\mathrm{rg}(P_1 - P_0, P_2 - P_0) = 1$
sse $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} = 2$
sse tutti i minori 3×3 sono 0

se $\dim \mathbb{A} = 2$: sse $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} = 0$

P_0, P_1 e v risulta : $P_1 - P_0$, v sono dipendenti

$\mathrm{rg}(P_1 - P_0 \ \ v) = 1$
$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P_0 & P_1 - P_0 & v \end{pmatrix} = 2$
$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ P_0 & P_1 & v \end{pmatrix} = 2$

NOTAZIONE : se $P \in \mathbb{A}$
e $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_R(P)$ allora scriviamo $\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ← $x_0 = 1$
se $v \in V$
e $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}}(v)$ allora scriviamo $\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ← $x_0 = 0$

Esempio : Supponiamo : se $\dim \mathbb{A} = n$
$P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$
allora non sono in posizione generale
sse
$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ P_0 & P_1 & & P_n \end{pmatrix} = 0$
sse $\det\left(P_1 P_0, P_2 P_0, \dots P_n - P_0 \right) = 0$