Problema su tutti:
TROVARE UN RETTANGOLO DEL PIANO EUCLIDEO
non vuoto bisogna dimostrarlo
non vuoto bisogna costruirlo (no matematicamente)
trovare se ne costruiscono infiniti/finiti

Come che tipo posso dire che se interseco due cose semplici ottengo ancora una cosa semplice
(es: se interseco due rette ottengo un punto)
(es: se interseco due piani ottengo una retta)
(es: se interseco due rette in spazio ottengo un punto)

CAMPI $(K, +, \cdot)$ dove $K \neq \emptyset$, operazioni $+ : K \times K \to K$ (associativa, commutativa, esistenza elemento neutro 0, esistenza opposto $\forall a \in K \; \exists -a \in K$ t.c. $a + (-a) = 0$) e $\cdot : K \times K \to K$ (associativa, commutativa, esistenza elemento neutro 1, esistenza inverso $\forall a \neq 0 \; \exists a^{-1} \in K$ t.c. $a \cdot a^{-1} = 1$), distributività $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Esempi: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \ldots$

CARATTERISTICA DEI CAMPI: K campo, serve un unico omomorfismo di anelli $\varphi : \mathbb{Z} \to K$ (esiste perché $\varphi(n) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ volte}}$ e unico perché $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1$)
- φ è un omomorfismo di anelli: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
- φ è anche di gruppi: $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
- per il primo teorema di omomorfismo $\mathbb{Z}/\ker(\varphi) \hookrightarrow K$ (l'immagine $\mathrm{Im}(\varphi)$ è isomorfa a $\mathbb{Z}/\ker(\varphi)$)
- siccome $\mathbb{Z}/\ker(\varphi) \hookrightarrow K$ (l'immagine è un dominio perché sottoanello di un campo)
- $\ker(\varphi) = \{0\}$ oppure $\ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$ dove p primo (perché $\mathbb{Z}$ è un dominio a ideali principali)
- $\ker(\varphi) = \{0\}$: K contiene una copia di $\mathbb{Z}$, quindi contiene una copia di $\mathbb{Q}$
  (dove i campi di caratteristica 0)
- $\ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$: K contiene una copia di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, quindi contiene una copia di $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
  (dove i campi di caratteristica p)
  in cui $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ volte}} = 0$, cioè $\forall a \in K \; pa = 0$

DEFINIZIONI UTILI

$\forall \cdot \forall \Rightarrow \forall$ (dim$_K$(Vect)) spazi $A \in M_n(K)$ ($\forall$ = vettori)

Funzioni: n-lineari alternanti: $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ volte}} \to K$ (lineari in ogni argomento, scambi di v_i, v_j cambiano segno, almeno 2 vettori uguali $\Rightarrow$ funzione nulla, se sono un insieme lin. ind. $\Rightarrow \neq 0$)

$\det_K(\forall \to \forall)$ dove $\det(\mathrm{Id}) = 1$
- $\exists$ ed è unico: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\,\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$
- $\det(A) = 0 \iff \exists v \neq 0$ t.c. $Av = 0$ (cioè $\ker(A) \neq \{0\}$)
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (prodotto degli autovalori)
- $\det(A) = 0 \iff$ le colonne di A sono linearmente dipendenti $\iff$ le righe di A sono linearmente dipendenti

Spec: $\forall \cdot \forall \Rightarrow \forall$ dove $\det(\forall) = \det(\forall)$ dipende solo da $\forall$, non da $\forall$ e $\det(\forall) \neq 0$ (non dà $\forall$ e $\det(\forall) = 0$)

Polinomi: $\det(A - xI) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dipende solo da $\forall$, non da $\forall$ e $\det(\forall) \neq 0$ (non dà $\forall$ e $\det(\forall) = 0$)
- $\det(A) = \det(B_1) \cdots \det(B_k)$ (dove $B_1, \ldots, B_k$ sono matrici a scalini ridotte ottenute a partire da A)
- $\det(A) = 0 \iff \det(\forall) = \det(\forall) = 0$ (cioè $\det(\forall) = \det(\forall)$ = moltiplicazione per $\det(\forall) = 0$)
- $\det(A) \neq 0 \iff \det(\forall) \neq 0$ (non moltiplica)
- $\forall$ non ha $\det(\forall) = 0$

Polinomi: $\det(\lambda I - A) = c_A(\lambda)$ (polinomio caratteristico) = prodotto di elementari: $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall) \det(\forall)$ (dove $\det(\forall) = \det(\forall)$ = moltiplicazione per $\det(\forall) = -1$)
- $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall)$ (non moltiplica)
- $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall)$ (non moltiplica)
- $\forall$ non ha $\det(\forall) = 0$

Vandermonde: $\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ (se tutti x_i sono $\neq$)

Autovalori: usa $\det$ per trovarli: $\det(\lambda I - A) = 0$ (polinomio caratteristico) = prodotto di elementari: $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall) \det(\forall)$ (dove $\det(\forall) = \det(\forall)$ = moltiplicazione per $\det(\forall) = -1$)
- $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall)$ (non moltiplica)
- $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall)$ (non moltiplica)
- trovati gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ trovi gli autospazi $V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)$ risolvendo il sistema omogeneo associato
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(\forall) = \det(\forall) \det(\forall)$ (non moltiplica)