(Version 2026.1)

Capitolo 6

Campi tensoriali, forme differenziali e integrazione

6.1 Campi tensoriali

6.1.A Tensori su spazi vettoriali. Anche se siamo interessati al caso geometrico di campi tensoriali su varietà, diamo prima uno sguardo al caso algebrico di tensori su spazi vettoriali.

Definizione 6.1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $r, s \in \mathbb{N}$.*

i. Se $r+s \geq 1$, un tensore di tipo $\binom{r}{s}$ *su V è una mappa multilineare*

$$t : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

(r copie di V^*, s di V). Si dice anche che t è r-volte controvariante ed *s-volte* covariante.

ii. I tensori di tipo $\binom{0}{0}$ su V sono i numeri reali e sono chiamati scalari.

iii. Lo spazio di tutti i tensori di tipo $\binom{r}{s}$ su V è denotato $\mathcal{T}^r_s(V)$

Esempi 0. $\mathcal{T}^0_0(V) = \mathbb{R}$.

1. $\mathcal{T}^0_1(V) = V^*$ perché una mappa lineare $V \to \mathbb{R}$ è un covettore. In questa identificazione la valutazione di $\beta \in \mathcal{T}^0_1(V)$ su un vettore $v \in V$ coincide con l'accoppiamento $\langle \beta, v \rangle_V$.

2. $\mathfrak{T}^1_0(V) \approx V$ perché una mappa lineare $V^* \to \mathbb{R}$ è un elemento di V^{**} che è canonicamente identificabile con V.[1] Anche in questa identificazione la valutazione di $u \in \mathfrak{T}^1_0(V)$ su un covettore $\alpha \in V^*$ coincide con l'accoppiamento $\langle \alpha, u \rangle_V$.

3. Le forme bilineari $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ considerate nella Sezione 4.1.A sono tensori di tipo $\binom{0}{2}$. In particolare, ogni prodotto scalare è un tensore 2 volte covariante, ma in più è simmetrico e definito positivo.

4. Siccome il determinante di una matrice è una funzione lineare delle colonne della matrice, la funzione

$$\det : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \det(v_1, \ldots, v_n) := \det[v_1, \ldots, v_n]\,, \tag{6.1.1}$$

che a ogni n-upla di vettori di $\mathbb{R}^n$ associa il determinante della matrice che li ha per colonne, è un tensore di tipo $\binom{0}{n}$.

5. Il *prodotto tensore* di due covettori $\beta^1, \beta^2 \in V^* = \mathfrak{T}^0_1(V)$ è il tensore $\beta^1 \otimes \beta^2 \in \mathfrak{T}^0_2(V)$ definito da

$$\beta^1 \otimes \beta^2(v_1, v_2) := \beta^1(v_1)\beta^2(v_2)\,.$$

Il *prodotto tensore* di due vettori $u_1, u_2 \in V = \mathfrak{T}^1_0(V)$ è il tensore $u_1 \otimes u_2 \in \mathfrak{T}^2_0(V)$ definito da

$$u_1 \otimes u_2(\alpha^1, \alpha^2) := u_1(\alpha^1)u_2(\alpha^2)$$

ove per un vettore u e covettore α, $u(\alpha)$ sta per $\alpha(u) = \langle \alpha, u \rangle$.

Ogni spazio tensoriale $\mathfrak{T}^r_s(V)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite puntualmente, cioè

$$\begin{aligned}(c_1 t_1 + c_2 t_2)(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) :=& \\ c_1 t_1(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) &+ c_2 t_2(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s)\end{aligned}$$

per tutti i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}^r_s(V)$, $\alpha^1 \ldots, \alpha^r \in V^*$ e $v_1 \ldots, v_s \in V$. Per costruirne una base introduciamo il *prodotto tensore*

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes \beta^1 \otimes \ldots \otimes \beta^s \in \mathfrak{T}^r_s(V)$$

di r vettori $u_1, \ldots, u_r \in V = \mathfrak{T}^1_0(V)$ e di s covettori $\beta^1 \ldots \beta^s \in V^* = \mathfrak{T}^0_1(V)$, definito da[2]

$$\begin{aligned}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes \beta^1 \otimes \ldots \otimes \beta^s)(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) :=& \\ u_1(\alpha^1) \cdots u_r(\alpha^r)\beta^1(v_1) \cdots \beta^s(v_s)\,.&\end{aligned}$$

[1] $\approx$ sta per l'esistenza di un isomorfismo di spazi vettoriali, si veda più avanti.

[2] In questo capitolo utilizziamo costantemente la convenzione di somma su indici ripetuti, uno in alto ed uno in basso. Precisiamo, tuttavia, che essa non si applica ad indici che hanno un valore fissato, come r ed s, e dunque per esempio a $u_r(\alpha^r)$ e $\beta^s(v_s)$ in questa formula.

(Per brevità, nel seguito non considereremo esplicitamente il caso $r = s = 0$. Tuttavia, tutto ciò che diremo si applica anche a quel caso se si fa la convenzione che il prodotto tensore di zero fattori valga 1).

Proposizione 6.2 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, $\mathcal{T}^r_s(V)$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^{r+s}. Se $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ è una base di V, con base duale $\mathcal{B}^* = (b^1, \dots, b^n)$, allora*

$$\mathcal{B}^r_s := \{b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_r} \otimes b^{j_1} \otimes \cdots \otimes b^{j_s} : i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n\}$$

è una base di $\mathcal{T}^r_s(V)$.

Dimostrazione. Per provare che $\mathcal{B}^r_s$ è una base di $\mathcal{T}^r_s(V)$ bisogna mostrare che, per ogni $t \in \mathcal{T}^r_s(V)$, esistono e sono unici i coefficienti $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \in \mathbb{R}$, $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n$, tali che

$$t = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} b_{i_1} \otimes \dots b_{i_r} \otimes b^{j_1} \otimes \dots \otimes b^{j_s} \,. \tag{6.1.2}$$

Si noti che, se vale questa uguaglianza, allora i coefficienti $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ sono necessariamente unici, perché valutandola su $b^{i_1}, \dots, b^{i_r}, b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$ si ha

$$t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = t(b^{i_1}, \dots, b^{i_r}, b_{j_1}, \dots, b_{j_s}) \,. \tag{6.1.3}$$

Per ogni scelta di $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in V^*$ e $v_1, \dots, v_s \in V$ si ha, per la multilinearità di t,

$$\begin{aligned} & t(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \\ & \quad = t(b_{i_1}(\alpha^1) b^{i_1}, \dots, b_{i_r}(\alpha^r) b^{i_r}, b^{j_1}(v_1) b_{j_1}, \dots, b^{j_s}(v_s) b_{j_s}) \\ & \quad = t(b^{i_1}, \dots, b^{i_r}, b_{j_1}, \dots, b_{j_s})\, b_{i_1}(\alpha^1) \dots b_{i_r}(\alpha^r) b^{j_1}(v_1) \dots b^{j_s}(v_s) \\ & \quad = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} (b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_r} \otimes b^{j_1} \otimes \dots \otimes b^{j_s})(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \end{aligned}$$

dove, nell'ultima espressione, si è usata la (6.1.3) e il fatto che $b_{i_1}(\alpha^1) \dots b_{i_r}(\alpha^r) b^{j_1}(v_1) \dots b^{j_s}(v_s) = (b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_r} \otimes b^{j_1} \otimes \dots \otimes b^{j_s})$ $(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s)$. Per l'arbitrarietà di $\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s$ questo prova la (6.1.2). La dimensione di $\mathcal{T}^r_s(V)$ uguaglia la cardinalità di $\mathcal{B}^r_s$, che è n^{r+s}. ■

I coefficienti $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ si chiamano le *componenti* del tensore relative alla base considerata di V. Le loro formule di trasformazione sotto cambiamenti della base si ricavano facilmente in modo analogo a quanto fatto,

nella sezione 4.1.B, per vettori e covettori. Precisamente, consideriamo due basi $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n\}$ di V e le loro basi duali $\mathcal{B}^* = \{b^1, \dots, b^n\}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}^* = \{\widetilde{b}^1, \dots, \widetilde{b}^n\}$. Per usare le convenzioni sulle sommatorie di indici ripetuti, denotiamo L^h_k le componenti di una matrice L, con l'indice "controvariante" in alto che indica la riga e quello "covariante" in basso che indica la colonna. Come sappiamo dalla sezione 4.1.B, se[3]

$$\widetilde{b}_i = L^j_i b_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,, \tag{6.1.4}$$

allora

$$\widetilde{b}^i = (L^{-1})^i_j b^j \,, \qquad i = 1, \dots, n \tag{6.1.5}$$

e le componenti di vettori e covettori trasformano, rispettivamente, in modo controvariante (cioè $\widetilde{v}^i = (L^{-1})^i_j v^j$) e covariante (cioè $\widetilde{\alpha}_i = L^j_i \alpha_j$). Generalizzando questi due casi si ha che le componenti di un tensore t relative alle due basi sono legate da

$$\widetilde{t}^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \;=\; (L^{-1})^{i_1}_{h_1} \dots (L^{-1})^{i_r}_{h_r} L^{k_1}_{j_1} \dots L^{k_s}_{j_s} t^{h_1,\dots,h_r}_{k_1,\dots,k_s} \,. \tag{6.1.6}$$

Osservazione: I tensori compaiono in matematica intorno alla metà dell'ottocento in ambito geometrico-differenziale, cioè come campi tensoriali su varietà, più che in ambito algebrico, cioè come tensori su spazi vettoriali. La definizione originale, ancor oggi a volte adottata in ambiti applicativi, fa riferimento alla (6.1.6): un tensore di tipo $\binom{r}{s}$ è un oggetto che trasforma in quel modo sotto un cambio di base. Precisamente, è l'oggetto definito dall'assegnazione di una n^{r+s}-pla di numeri in ogni base di V, con la condizione che le n^{r+s}-ple relative alle diverse basi siano collegate dalla (6.1.6). I tensori così definiti agiscono su r covettori ed s vettori per contrazione delle componenti, dunque multilinearmente. La (6.1.6) assicura che il risultato non dipenda dalla base scelta, rendendo dunque il tensore una mappa multilineare su V.

[3] Si noti che, con le convenzioni fatte adesso, questa L è la trasposta di quella della sezione 4.1.B, perché l'elemento L^i_j che appare nella (6.1.4) è il L_{ji} che appare nella (4.1.5).