4. L'insieme $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ delle derivazioni su un'algebra $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra di Lie dell'algebra di Lie $\mathrm{Lin}(\mathcal{A})$ degli operatori lineari su $\mathcal{A}$, che ha come parentesi di Lie il commutatore.

Infatti le derivazioni sono un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Lin}(\mathcal{A})$ e per mostrare che è una sottoalgebra di Lie basta verificare che il commutatore di due derivazioni è una derivazione. Siccome il commutatore è una differenza di composizioni di operatori lineari, è lineare. Resta quindi solo da verificare la regola di Leibniz. Per $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ e $a, b \in \mathcal{A}$ si ha

$$[D_1, D_2]_-(ab) = D_1D_2(ab) - D_2D_1(ab)\,.$$

Qui

$$\begin{aligned} D_1D_2(ab) &= D_1(D_2(a)b + aD_2(b)) \\ &= (D_1D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) + D_1(a)D_2(b) + aD_1D_2(b)\,. \end{aligned}$$

Similmente

$$D_2D_1(ab) = (D_2D_1(a))b + D_1(a)D_2(b) + D_2(a)D_1(b) + aD_2D_1(b)$$

e dunque

$$\begin{aligned} [D_1, D_2]_-(ab) &= (D_1D_2(a))b - (D_2D_1(a))b + aD_1D_2(b) - aD_2D_1(b) \\ &= [D_1, D_2]_-(a)b + a[D_1, D_2]_-(b)\,. \end{aligned}$$

5.4.E L'algebra di Lie dei campi vettoriali. Dall'esempio 4 della sezione precedente segue che le derivazioni su $C^\infty(M)$ sono un'algebra di Lie con il commutatore come parentesi di Lie. L'isomorfismo di spazi vettoriali $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ della Proposizione 5.12 può essere usato per trasportare la struttura di algebra di Lie da $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ a $\mathfrak{X}(M)$. Specificamente, dati due campi vettoriali X e Y su M, $\mathcal{L}_X$ e $\mathcal{L}_Y$ sono derivazioni su $C^\infty(M)$ e così è $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]_-$. Esiste dunque un unico campo vettoriale $[X, Y]$ su M tale che

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]_- = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X \;:\; C^\infty(M) \to C^\infty(M) \quad (5.4.7)$$

Definizione 5.15 *La mappa*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

definita da (5.4.7) si chiama la parentesi di Lie *(o anche il commutatore) di* $\mathfrak{X}(M)$.

Ovviamente, $\mathfrak{X}(M)$ con questa parentesi di Lie è un'algebra di Lie.

Determiniamo le componenti $[X,Y]^i_\phi$ di $[X,Y]$ in una carta (U,ϕ) di M, con al solito $\phi = (x^1,\dots,x^n)$. Usando la (5.4.3) abbiamo $[X,Y]^i_\phi = \mathcal{L}_{[X,Y]}x^i = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y x^i - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X x^i$ e dunque

$$[X,Y]^i_\phi = \mathcal{L}_X Y^i_\phi - \mathcal{L}_Y X^i_\phi \,. \tag{5.4.8}$$

Per la (5.1.6) (vedere anche l'esercizio 5.4.1.1) ne segue che la rappresentativa locale $\widehat{[X,Y]}$ è allora

$$\widehat{[X,Y]}^{\,i} = \widehat{X}^j \frac{\partial \widehat{Y}^i}{\partial x^j} - \widehat{Y}^j \frac{\partial \widehat{X}^i}{\partial x^j} \,, \qquad i = 1,\dots,n \,, \tag{5.4.9}$$

ovvero

$$\widehat{[X,Y]} = \widehat{Y}'\widehat{X} - \widehat{X}'\widehat{Y} \,. \tag{5.4.10}$$

Esempi 1. Sia (U,ϕ) una carta, con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$. Allora

$$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0 \qquad \forall i,j \,.$$

Infatti i loro rappresentativi nella carta (U,ϕ) sono i campi vettoriali costanti $e_1,\dots,e_n$ e questo segue da una qualunque delle (5.4.8)-(5.4.10).

2. Consideriamo i campi vettoriali $Y_1 = x\partial_x + y\partial_y$ e $Y_2 = -y\partial_x + x\partial_y$ in $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$. Nella carta globale standard con coordinate (x,y) i rappresentativi di Y_1 e Y_2 sono i campi vettoriali (x,y) e $(-y,x)$, rispettivamente. Usando la (5.4.10) calcoliamo

$$\begin{aligned} [Y_1,Y_2](x,y) &= Y_2'(x,y)Y_1(x,y) - Y_1'(x,y)Y_2(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Esercizi 5.4.1 *(i) Verificare che*

$$[X,Y]^i_\phi = X^j_\phi\Big(\frac{\partial(Y^i_\phi \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \circ \phi\Big) - Y^j_\phi\Big(\frac{\partial(X^i_\phi \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \circ \phi\Big) \,.$$

[Suggerimento: usare la (5.4.1)]

5.4.F La derivata di Lie dei campi vettoriali. Vi è un possibile approccio alternativo alla definizione di una derivazione dei campi vettoriali, analoga alla $\mathcal{L}_X f = \frac{d}{dt}(\Phi^X_t)^* f|_{t=0}$ della derivata di Lie su $C^\infty(M)$ (si veda la Proposizione 5.13).

Definizione 5.16 *Per $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, la* derivata di Lie di Y lungo X *è il campo vettoriale $\mathcal{L}_X Y$ su M definito da*

$$\mathcal{L}_X Y|_p := \frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* Y(p)|_{t=0} \qquad \forall p \in M\,. \tag{5.4.11}$$

Proposizione 5.17 *Per ogni $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]\,. \tag{5.4.12}$$

Dimostrazione. [La dimostrazione è un conto un po' faticoso, e dal quale non si impara molto, per cui non è richiesta per l'esame] È appena più semplice fare la verifica con le rappresentative locali. Fissiamo una carta (U, ϕ), un punto $p \in U$ e denotiamo con $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ le rappresentative di X e Y. La rappresentativa di $[X, Y]$ è data dalla (5.4.10), quella di Φ_t^X è $\Phi_t^{\widehat{X}}$ (esercizio; questa formula vale per t in un intorno di 0) e quella di $(\Phi_t^X)^* Y$, valutata in $x = \phi(p)$, è

$$(\Phi_t^{\widehat{X}})^* \widehat{Y}(x) = (\Phi_t^{\widehat{X}})'(x)^{-1} \widehat{Y}(\Phi_t^{\widehat{X}}(x))$$

(esercizio). Siccome $\Phi_0^{\widehat{X}} = \mathrm{id}$ e quindi $(\Phi_0^{\widehat{X}})' = \mathbb{I}$,

$$\tfrac{d}{dt}(\Phi_t^{\widehat{X}})^* \widehat{Y}(x)|_{t=0} \;=\; \tfrac{d}{dt}((\Phi_t^{\widehat{X}})'(x)^{-1})|_{t=0} \widehat{Y}(x) + \tfrac{d}{dt} \widehat{Y}(\Phi_t^{\widehat{X}}(x))|_{t=0}$$

Se poniamo $A(t) := (\Phi_t^{\widehat{X}})'(x)$, il primo termine dopo l'uguale è $\frac{d}{dt}(A(t)^{-1})|_{t=0} \widehat{Y}(x)$. Si ha, scambiando l'ordine delle derivate,

$$\tfrac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = \tfrac{d}{dt}((\Phi_t^{\widehat{X}})'(x))|_{t=0} = (\tfrac{d}{dt}(\Phi_t^{\widehat{X}})|_{t=0})'(x) = \widehat{X}'(x)\,.$$

Derivando $A(t)^{-1} A(t) = \mathbb{I}$ si ha $\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}(\frac{d}{dt} A(t)) A(t)^{-1}$ e dunque, siccome $A(0) = \mathbb{I}$,

$$\tfrac{d}{dt} A(t)^{-1}|_{t=0} = -\tfrac{d}{dt} A|_{t=0} = -\widehat{X}'(x)\,.$$

D'altra parte, $\frac{d}{dt} \widehat{Y}(\Phi_t^{\widehat{X}}(x))|_{t=0} = \widehat{Y}'(x) \widehat{X}(x)$ e così

$$\tfrac{d}{dt}(\Phi_t^{\widehat{X}})^* \widehat{Y}(x)|_{t=0} \;=\; -\widehat{X}'(x) \widehat{Y}(x) + \widehat{Y}'(x) \widehat{X}(x) \;=\; \widehat{[X, Y]}(x)\,.$$

■

Dunque, parentesi di Lie e derivata di Lie di campi vettoriali sono la stessa cosa e i due termini sono usati come sinonimi. (La distinzione riguarda solo la loro origine; in letteratura, peraltro, l'uso dei due termini non è standardizzato e varia da testo a testo).

Osservazioni: (i) Può non essere completamente evidente che, per ogni p, la derivata in (5.4.11) produca effettivamente un vettore di T_pM. Usando la (5.3.9) si ha

$$(\Phi_t^X)^* Y(p) = \Big(p\,,\, (T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})\Big) \tag{5.4.13}$$

e dunque, per p fissato, la (5.4.11) è, esplicitamente,

$$\mathcal{L}_X Y|_p = \tfrac{d}{dt}(T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})|_{t=0}\,.$$

Per ogni t si ha

$$(T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)}) \in T_pM$$

(come pure evidenziato dalla (5.4.13)) e quindi

$$t \mapsto (T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})$$

è una curva in T_pM. Di conseguenza, la derivata che compare in (5.4.11) è la derivata di una curva nello spazio vettoriale T_pM e pertanto è identificabile con un vettore di T_pM.

(ii) Secondo le nostre convenzioni, la derivata $\frac{d}{dt}$ è definita per funzioni a valori in uno spazio tangente, non a valori nel fibrato tangente, e questo è il motivo per cui nella (5.4.11) si è inserita la restrizione "$|_p$". Tuttavia, è usuale scrivere la (5.4.11) e altre formule simili senza tale specificazione, dunque

$$\mathcal{L}_X Y = \tfrac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* Y|_{t=0}\,. \tag{5.4.14}$$

5.4.G Alcune proprietà delle derivate di Lie. Vediamo ora alcune proprietà di questi oggetti, oltre alla bilinearità, all'antisimmetria e al fatto che soddisfano la identità di Jacobi (ereditate dal commutatore in $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$.

Premettiamo una proprietà della derivata di Lie di funzioni (che avremmo dovuto vedere nella sezione precedente): se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed $f \in C^\infty(M)$ allora

$$F_*(\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_{F_*X}(F_* f)\,. \tag{5.4.15}$$

Per la dimostrazione, vedere gli esercizi.

Proposizione 5.18 *Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $F : M \to N$ un diffeomorfismo. Allora:*

i. $\mathcal{L}_X(fY) = f\mathcal{L}_X Y + (\mathcal{L}_X f)Y$.

ii. $F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y]$.

iii. $\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*Y = (\Phi_t^X)^*\mathcal{L}_X Y$ *(o equivalentemente* $\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)_*Y = -(\Phi_t^X)_*\mathcal{L}_X Y$*) per tutti i* t.

Dimostrazione. (i.) Questo segue, per esempio, dall'espressione in coordinate (5.4.10).

(ii.) Basta provare che $\mathcal{L}_{F_*[X,Y]}f = \mathcal{L}_{[F_*X,F_*Y]}f$ per ogni $f \in C^\infty(N)$. Si usano la (5.4.15) e la (5.4.7).

(iii.) Per ogni $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(\Phi_t^X)^*Y(p)|_t &= \tfrac{d}{ds}(\Phi_{t+s}^X)^*Y(p)|_{s=0} \\
&= \tfrac{d}{ds}(\Phi_s^X \circ \Phi_t^X)^*Y(p)|_{s=0} \\
&= \tfrac{d}{ds}(\Phi_t^X)^*(\Phi_s^X)^*Y|_{s=0} \\
&= (\Phi_t^X)^*\tfrac{d}{ds}(\Phi_s^X)^*Y|_{s=0} \\
&= (\Phi_t^X)^*\mathcal{L}_X Y\,.
\end{aligned}$$

La commutazione di $\frac{d}{ds}$ e $(\Phi_t^X)^*$ si può vedere in diversi modi, per esempio osservando che il pull-back agisce come un operatore lineare sui vettori tangenti, e la derivata di un operatore lineare coincide con l'operatore stesso.[5] Il segno meno nell'espressione con il push-forward ha la stessa genesi che nell'esempio 3 della sezione 5.4.C. ■

Esempio Consideriamo i campi vettoriali $Z_1 = Y_1$ e $Z_2 = fY_2$ con Y_1 e Y_2 come nell'esempio della Sezione 5.4.E e $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1/2}$. Allora (omettendo di indicare il punto in cui sono calcolati i diversi oggetti)

$$\begin{aligned}
[Z_1, Z_2] &= [Y_1, fY_2] \\
&= f[Y_1, Y_2] + \mathcal{L}_{Y_1} fY_2 \\
&= 0 + (Y_1 \cdot \nabla f)Y_2 \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -xf^3 \\ -yf^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\
&= -(x^2+y^2)f^3 \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = -fY_2
\end{aligned}$$

[5] Se si preferisce si può fare tutto il conto nello spazio tangente, partendo dalla (5.4.13): $\frac{d}{dt}(T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})|_t = \frac{d}{ds}(T_p(\Phi_s^X \circ \Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})|_{s=0} = \frac{d}{ds}(T_{\Phi_t^X(p)}\Phi_s^X)^{-1} \circ (T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})|_{s=0} = (T_{\Phi_t^X(p)}\Phi_s^X)^{-1} \circ \frac{d}{ds}(T_p\Phi_t^X)^{-1}(Y|_{\Phi_t^X(p)})|_{s=0} = (T_{\Phi_t^X(p)}\Phi_s^X)^{-1}(\mathcal{L}_X Y|_{\Phi_t^X(p)}) = (T\Phi_t^X)^* \circ \mathcal{L}_X Y|_p$.

Osservazione: L'identità di Jacobi per la derivata di Lie in $\mathfrak{X}(M)$ implica che, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ si ha

$$\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z] \qquad \forall Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M) \tag{5.4.16}$$

(vedere gli esercizi). Dunque, per X fissato, $\mathcal{L}_X$ soddisfa la regola di Leibniz rispetto al prodotto dato dalla parentesi di Lie ed è dunque una derivazione sull'algebra (non commutativa) $(\mathfrak{X}(M), [\ ])$.

Esercizi 5.4.2 *(i) Verificare la (5.4.15). [Suggerimento: Calcolare $\mathcal{L}_{F_*X}(F_*f)$ usando la definizione, esprimendo $d(F_*f)|_q$ in termini di $T_q(F^*f)$ ed osservando che, con $p = F^{-1}(q)$, $(F_*X)(q) = T_pF(X|_p)$ e $T_q(F^{-1}) \circ T_pF = T_p(F^{-1} \circ F) = \mathrm{id}_{T_pM}$].* [R]

(ii) Verificare la (5.4.16). [Suggerimento: usare identità di Jacobi ed antisimmetria] [R]

5.4.H Commutazione di flussi. Si dice che due campi vettoriali X e Y *commutano* se $[X,Y] = \mathcal{L}_X Y = 0$ e che i loro flussi *commutano* se

$$\Phi^X_t \circ \Phi^Y_s = \Phi^Y_s \circ \Phi^X_t \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}\,. \tag{5.4.17}$$

Proposizione 5.19 *Per ogni coppia di campi vettoriali X e Y su una varietà, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i. I flussi di X ed Y commutano.

ii. $(\Phi^X_t)_* Y = Y$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$.

iii. X e Y commutano.

Dimostrazione. L'equivalenza di i. and ii. segue dalla Proposizione 5.10 la quale (con $F = \Phi^X_t$ e t sostituito da s) implica che, fissato t, l'unico campo vettoriale Z tale che $\Phi^Z_s = \Phi^X_t \circ \Phi^Y_s \circ (\Phi^X_t)^{-1}$ per tutti gli s è $Z = (\Phi^X_t)_* Y$.

L'equivalenza di ii. e iii. segue dal punto iii. della Proposizione 5.18, cioè dalla $\frac{d}{dt}(\Phi^X_t)_* Y = -(\Phi^X_t)_*[X,Y]\ \forall t$. Essa infatti implica che $[X,Y] = 0$ se e solo se $t \mapsto (\Phi^X_t)_* Y$ è costante; ma per $t = 0$, $(\Phi^X_t)_* Y = Y$. ■

Flussi commutanti appaiono in diversi contesti (per esempio nello studio delle simmetrie, come vedremo).

Consideriamo innanzitutto il legame fra i flussi dei campi coordinati e le coordinate su una varietà. Se (U, ϕ) è una carta di una varietà M, con $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, i campi coordinati $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ commutano a due a due e così i loro flussi commutano. Fissiamo un punto $p_0 \in U$ e un

rettangolo aperto n-dimensionale $R \subset \phi(U)$ che contiene $x_0 := \phi(p_0)$. Si vede facilmente che, per ogni $p \in \phi^{-1}(R)$, posto $\phi(p) = x$, si ha

$$p = \Phi^{\partial_{x^n}}_{x^n - x^n_0} \circ \cdots \circ \Phi^{\partial_{x^1}}_{x^1 - x^1_0}(p_0) \tag{5.4.18}$$

e, inoltre, l'ordine nel quale i flussi sono composti è irrilevante perché i campi coordinati commutano a due a due. Per provare la (5.4.18) basta osservare che, in R, si raggiunge x da x_0 spostandosi di $x^i - x^i_0$ in ciascuna direzione e_i, e che ciascuno di questi spostamenti è dato dalla mappa al tempo $x^i - x^i_0$ del flusso del campo vettoriale e_i. Dunque

$$x = \Phi^{e_n}_{x^n - x^n_0} \circ \cdots \circ \Phi^{e_1}_{x^1 - x^1_0}(x_0)\,. \tag{5.4.19}$$

Questo risultato si trasporta da $\phi(U)$ a U con ϕ^{-1} (si vedano gli esercizi). Dunque, le coordinate $x^1 - x^1_0, \ldots, x^n - x^n_0$ di un punto p, relative a quelle di un prefissato punto p_0, sono i *tempi* necessari a raggiungere p, a partire da p_0, muovendosi con i flussi dei campi coordinati, in qualunque ordine. In particolare, le curve $t \mapsto \Phi^{\partial_{x^i}}_t(p_0)$ sono le curve coordinate di (U, ϕ) passanti per p_0.

Una questione collegata riguarda i riferimenti mobili. Il loro interesse risiede nel fatto che essi forniscono una base per ogni spazio tangente, e dunque coordinate nelle fibre del fibrato tangente e dei fibrati tensoriali che costruiremo a partire da esso, e queste coordinate si utilizzano per lavorare con gli oggetti geometrici (i campi tensoriali, incluse per esempio le metriche riemanniane), definiti su di essi. In questa prospettiva può essere utile scegliere riferimenti "adattati" all'oggetto che si vuole studiare (per esempio ortonormale, se si ha a che fare con una metrica riemanniana). D'altra parte, anche i riferimenti coordinati sono utili, per esempio perché i campi coordinati ∂_{x^i} agiscono sulle funzioni (e non solo) come derivate parziali, si veda la (5.4.1). Ci si chiede allora sotto quali condizioni i campi vettoriali $Y_1, \ldots, Y_n$ che formano un dato riferimento mobile siano, almeno localmente, i campi coordinati di un sistema di coordinate locali. Ovviamente, una condizione necessaria è che i campi vettoriali $Y_1, \ldots, Y_n$ commutino a due a due. Questa condizione è anche sufficiente:

Proposizione 5.20 *Supponiamo che $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{X}(M)$ siano linearmente indipendenti in ogni punto di un aperto $A \subseteq M$ e commutino a due a due ($[Y_i, Y_j]|_A = 0\ \forall i, j = 1, \ldots, n$). Allora, per ogni $p \in A$*

esiste una carta (U, ϕ) *di* M *con* $p \in U \subseteq A$ *tale che, scrivendo* $\phi = (x^1, \dots, x^n)$*, si ha* $Y_i = \partial_{x^i}$ *per ogni* $i = 1, \dots, n$*.*

Omettiamo la dimostrazione, anche se non è particolarmente difficile (usa il teorema della funzione inversa).

Osservazioni: (i) Un riferimento mobile $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ in un aperto U di una varietà M è detto *olonomo* se, localmente, in un intorno di ogni punto di U, esiste una carta con funzioni coordinate $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ tali che $Y_i = \partial_{x^i}$, $i = 1, \dots, n$, *anolonomo* in caso opposto. Il significato di questi termini è simile, ma non coincidente, con quello dei vincoli (an)olonomi in meccanica.

(ii) Nella Proposizione 5.19, se X ed Y non sono completi (come inevitabilmente succede, per esempio, per i campi coordinati se $\phi(U)$ è limitato) allora la (5.4.17) vale per tutti i t, s per cui la composizione dei due flussi locali è definita.

(iii) Anche un riferimento anolonomo $Y_1, \dots, Y_n$ definisce per concatenazione dei flussi (in un qualche ordine scelto) delle coordinate locali, ma i relativi campi coordinati (che commutano a due a due) non possono coincidere tutti con gli Y_i (che non commutano a due a due).

Esempi 1. I due campi vettoriali $Y_1 = x\partial_x + y\partial_y$ e $Y_2 = -y\partial_x + x\partial_y$ in $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ considerati nell'esempio della sezione 5.4.E commutano e quindi, almeno localmente, sono i campi coordinati di una carta. Per determinarla, determiniamo i loro flussi. Scriviamo $z = (x, y)$. Allora l'ODE $\dot z = Y_1(z)$ è $\dot z = z$, cosicché

$$\Phi^{Y_1}_{t_1}(z_0) = e^{t_1} z_0 \,.$$

Invece $\dot z = Y_2(z)$ è $\dot x = -y$, $\dot y = x$, cioè l'equazione dell'oscillatore armonico dell'Esempio 1 della Sezione 5.3.B, ed il suo flusso è

$$\Phi^{Y_2}_{t_2}(z_0) = R_{t_2} z_0$$

ove R_α è la matrice di rotazione antioraria di angolo α. Dunque

$$\Phi^{Y_2}_{t_2} \circ \Phi^{Y_1}_{t_1}(z_0) = e^{t_1} R_{t_2} z_0 \,.$$

È chiaro che, concatenando questi due flussi, con un'opportuna dilatazione rdiale ed un'opportuna rotazione si raggiunge, a partire da un qualunque punto $z_0 \neq (0, 0)$, ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. E ovviamente l'ordine delle due operazioni non conta. In questo modo si possono dunque definire delle coordinate (t_1, t_2) (locali: t_2 dovrà essere ristretto ad un intervallo di lunghezza $< 2\pi$) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per esempio, prendendo $z_0 = (1, 0)$ si ha

$$\Phi^{Y_2}_{t_2} \circ \Phi^{Y_1}_{t_1}(1, 0) = (e^{t_1} \cos t_2, e^{t_1} \sin t_2)$$

e (t_1, t_2) sono le cosiddette coordinate logaritmico-polari.

2. Consideriamo ora i due campi vettoriali $Z_1 = Y_1$ e $Z_2 = fY_2$ con $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ come nell'esempio della sezione 5.4.G. Siccome non commutano, non si possono trovare coordinate locali delle quali Z_1 e Z_2 siano

i campi coordinati. È facile mettere questo in relazione alla non-commutazione dei flussi: Φ^{Z_1} agisce con dilatazioni e, siccome Z_2 è un riscalamento di Y_2, Φ^{Z_2} agisce per rotazioni. Ma, a causa della normalizzazione ad 1 di Z_2, $\Phi^{Z_2}_{t_2}$ è una rotazione di angolo t_2/r (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$), che percorre quindi un arco di lunghezza $|t_2|$, e di conseguenza i due flussi non commutano (fare una figura).

3. Su S^1 esiste un campo vettoriale $\frac{\partial}{\partial\theta}$, ovunque diverso da 0, che in ogni carta angolare (esempio 2 della sezione 2.1.A) coincide con il campo vettoriale coordinato.

Consideriamo infatti un atlante con due carte angolari (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2), scriviamo $\phi_i = \theta_i$. In ciascuna carta (U_i, ϕ_i) consideriamo il campo vettoriale coordinato ∂_{θ_i}, la cui rappresentativa locale nella stessa carta è il campo vettoriale costante

$$\widehat{X}_i(\theta_i) := 1 \qquad \forall \theta_i \in \phi_i(U_i)\,.$$

Chiaramente,

$$\widehat{X}_2(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\theta)) = \widehat{X}_1(\theta) \qquad \forall \theta \in \phi_1(U_1 \cap U_2)\,.$$

Siccome la funzione di transizione $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ fra due carte è una traslazione in ciascuna componente connessa di $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ (Sezione 2.1.A) ed esercizio 2.1.1.i), la sua matrice Jacobiana è l'identità. Per la Proposizione 5.3, esiste allora un campo vettoriale X su S^1 con rappresentative locali $\widehat{X}_1$ e $\widehat{X}_2$, e che dunque in ciascun U_i coincide con ∂_{θ_i}. Per l'arbitrarietà delle carte angolari considerate, X coincide con ∂_θ in ogni carta angolare con angolo θ. È allora usuale denotarlo $\frac{\partial}{\partial\theta}$. L'esistenza di questo campo vettoriale ha delle conseguenze interessanti.

Innanzitutto, siccome S^1 ha dimensione uno e $\frac{\partial}{\partial\theta}$ è ovunque diverso da zero, $\{\frac{\partial}{\partial\theta}\}$ costituisce un riferimento mobile globale su S^1, che dunque è parallelizzabile.

In secondo luogo, l'esistenza di $\frac{\partial}{\partial\theta}$ permette di considerare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale "costante" $a\frac{\partial}{\partial\theta}$ su S^1. Le sue curve integrali γ soddisfano, in ogni carta angolare (U, α), l'equazione

$$\tfrac{d}{dt}(\alpha \circ \gamma)(t) = a \qquad \text{per ogni } t \text{ per cui } \gamma(t) \in U\,.$$

Per questo motivo, interpretando il campo vettoriale $a\frac{\partial}{\partial\theta}$ come un'ODE su S^1, lo si scrive generalmente

$$\dot\theta = a\,, \qquad \theta \in S^1\,. \tag{5.4.20}$$

Identificando S^1 con $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, la curva integrale di $a\frac{\partial}{\partial\theta}$ con punto iniziale $[\theta_0]$ è

$$\gamma(t) = [\theta_0 + ta], \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove [ ] denota la classe di equivalenza modulo 2π.

4. Le coordinate polari nel piano ammettono un'interpretazione globale, legata al fatto che il piano privato dell'origine è omeomorfo al cilindro $\mathbb{R}_+ \times S^1$. Identifichiamo S^1 con $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ e consideriamo la mappa

$$F : \mathbb{R}_+ \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \qquad F(r, [\theta]) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,, \tag{5.4.21}$$

chiaramente ben definita, che è un diffeomorfismo (si vedano gli esercizi). Di conseguenza, quando si usano le coordinate polari si può ignorare la necessità di restringere l'angolo ad un intervallo di lunghezza $< 2\pi$ a patto di pensarlo come un punto su S^1.

Dal punto di vista computazionale, lavorare con l'angolo in S^1 non pone particolari problemi. Una possibilità (che spiegheremo più avanti) è lavorare sul "rivestimento" $\mathbb{R}$ di S^1. Ma qui vogliamo osservare che, in particolare, ogni ODE in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ può essere vista come un campo vettoriale su $\mathbb{R}_+ \times S^1$ nel quale compare il campo $\frac{\partial}{\partial\theta}$ su S^1. Infatti

$$F^*\frac{\partial}{\partial x}(r,[\theta]) = \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,, \qquad F^*\frac{\partial}{\partial y}(r,[\theta]) = \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,,$$

e da qui poi si calcola l'espressione di ogni campo vettoriale $a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}$ su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

5. Il campo vettoriale $\frac{\partial}{\partial\theta}$ dell'esempio 3 è definito su ciascuno degli n fattori del toro $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$. Su $\mathbb{T}^n$ vi sono dunque n campi vettoriali globali che denotiamo $\frac{\partial}{\partial\theta^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\theta^n}$ che commutano e definiscono un riferimento (olonomo). Per ogni $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, il campo vettoriale

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial\theta^i}$$

si scrive come ODE nella forma

$$\dot\theta = a\,.$$

La sua curva integrale con punto iniziale $[\theta_0]$ è la curva $\gamma(t) = [\theta_0 + ta]$, $t \in \mathbb{R}$. In particolare, per $n = 2$ e $[\theta_0] = [0]$ si ritrova (a parte la diversa normalizzazione di S^1, qui di lunghezza 2π e lì di lunghezza 1) la curva $t \mapsto (\omega_1 t, \omega_2 t) \bmod 1$ dell'Esempio 8 Sezione 3.4.C, con $\omega_j = a_j/(2\pi)$.

Esercizi 5.4.3 *(i) Dedurre la (5.4.18) dalla (5.4.19). [Suggerimento: si noti che $\phi_*\partial_{x^i} = e_i$]* [R]

(ii) Ripetere l'esempio 1 usando coordinate polari. Cioè, posto $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, calcolare F^*Y_1, F^*Y_2 e i loro flussi, verificarne la commutazione, e determinare le coordinate indotte in questo modo. [R]

(iii) Verificare che la mappa (5.4.21) è un diffeomorfismo. [Suggerimento: su S^1 usare una carta angolare]. [R]

5.5 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi 5.2.1

(i) Sia $c = \phi\circ\gamma|_{I_U}$. Siccome $c : I_U \to \mathbb{R}^n$, $Tc : TI_U = I_U \times \mathbb{R} \to T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Con queste identificazioni,

$$Tc(t,1) = (c(t), c'(t))\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} Tc(t,1) &= T\phi \circ T\gamma(t,1) \\ &= T\phi(\gamma(t), T_t\gamma(1)) \\ &= T\phi(\gamma(t), X|_{\gamma(t)}) \\ &= T\phi \circ X(\gamma(t)) \\ &= T\phi \circ X \circ \phi^{-1} \circ \phi(\gamma(t)) \\ &= (T\phi \circ X \circ \phi^{-1})(c(t)) \\ &= (c(t), \widehat{X}_\phi(c(t))) \end{aligned}$$

e dunque $c'(t) = \widehat{X}_\phi(c(t))$.

Esercizi 5.4.2

i. Per ogni $q \in N$, posto $p = F^{-1}(q)$, si ha $(F_*X)(q) = TF \circ X \circ F^{-1}(q) = TF \circ X(p) = TF(p, X|_p) = (F(p), T_pF(X|_p))$ e quindi $(F_*X)|_q = T_pF(X|_p)$. Pertanto, usando anche $T_q(F^{-1}) \circ T_pF = T_p(F^{-1} \circ F) = \mathrm{id}_{T_pM}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F_*X}(F_*f)(q) &= \langle d(F_*f)|_q, (F_*X)|_q \rangle \\ &= T_q(F_*f)(T_pF(X|_p)) \\ &= T_q(f \circ F^{-1}) \circ T_pF(X|_p) \\ &= T_{F^{-1}(q)}f \circ T_q(F^{-1}) \circ T_pF(X|_p) \\ &= T_pf(X|_p) \\ &= \mathcal{L}_Xf(p) \\ &= (\mathcal{L}_Xf) \circ F^{-1}(q) \\ &= (F_*(\mathcal{L}_Xf))(q)\,. \end{aligned}$$

(ii) L'identità di Jacobi $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ implica $\mathcal{L}_X[Y,Z] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] = [Y,[X,Z]] + [[X,Y],Z] = [Y,\mathcal{L}_XZ] + [\mathcal{L}_XY,Z]$.

Esercizi 5.4.3

(i) Dalla (5.1.2) segue che $\phi_*\partial_{x^i} = e_i$ e dunque $\Phi_t^{e_i} = \phi \circ \Phi_t^{\partial_{x^i}} \circ \phi^{-1}$. Pertanto,

$$\begin{aligned} p &= \phi^{-1}(x) \\ &= \phi^{-1} \circ \Phi^{e_n}_{x^n - x_0^n} \circ \cdots \circ \Phi^{e_1}_{x^1 - x_0^1}(x_0) \\ &= \phi^{-1} \circ \Phi^{e_n}_{x^n - x_0^n} \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \cdots \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \Phi^{e_1}_{x^1 - x_0^1} \circ \phi(p_0) \\ &= \Phi^{\partial_{x^n}}_{x^n - x_0^n} \circ \cdots \circ \Phi^{\partial_{x^1}}_{x^1 - x_0^1}(p_0) \end{aligned}$$

(ii) I conti sono molto simili a quelli dell'esempio 1 della sezione 5.3.B. $F'(r,\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}$ e dunque $Y_1(r,\theta) = F'(r,\theta)^{-1}Y_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ e, similmente, $Y_2(r,\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le equazioni dei due flussi sono pertanto $\frac{dr}{dt_1} = r$ e $\frac{d\theta}{dt_2} = 1$, da cui $\Phi_{t_1}^{F^*Y_1}(r,\theta) = (e^{t_1}r, \theta)$ e $\Phi_{t_2}^{F^*Y_2}(r,\theta) = (r, \theta + t_2)$. La loro composizione, in ogni ordine, dà $(e^{t_1}r, \theta + t_2)$. Per $r_0 = 1$, $\theta_0 = 0$ si ritrovano le coordinate logaritmico-polari.

(iii) La continuità e la biettività di F sono ovvie. Consideriamo su $\mathbb{R}_+ \times S^1$ l'atlante prodotto dell'identità su $\mathbb{R}_+$ con un atlante angolare di S^1 (si veda l'esempio 7 della sezione 2.2.C). Muniamo inoltre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ della carta globale data dall'identità. La

rappresentativa locale $F \circ \phi^{-1}$ di F relativa a una coppia di carte (U, ϕ) e $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathrm{id})$ è la funzione

$$(r, \theta) \mapsto F \circ \phi^{-1}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

ed è differenziabile. La sua matrice Jacobiana $(F \circ \phi^{-1})'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ è ovunque invertibile. Dunque F è un diffeomorfismo locale. Essendo biiettiva, è un diffeomorfismo.