Dispense per il corso di Fisica Matematica

per il corso di laurea in Matematica

A.A. 2025-2026

Francesco Fassò
Università di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levita-Civita"
fasso@math.unipd.it

ESTRATTO

Copyright © 2001-2026 Francesco Fassò. Tutti i diritti riservati

ESTRATTO

ESTRATTO

Prefazione

Questo corso è dedicato ad un primo studio di due branche della matematica strettamente interrelate: la teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie, o *Sistemi Dinamici*, e la Meccanica Classica da un punto di vista matematico, tradizionalmente e variamente chiamata (sia pure con differenze di significato) *Meccanica Razionale*, *Meccanica Classica*, *Meccanica Analitica* e, più recentemente, anche *Meccanica Geometrica*. Forse la definizione più appropriata sarebbe semplicemente *Meccanica Matematica*. Vi sono almeno tre aspetti interconnessi in questa teoria.

- Lo sviluppo di tecniche matematiche per lo studio dei problemi meccanici (Sistemi Dinamici, Meccanica Lagrangiana, Meccanica Hamiltoniana).
- La costruzione di una formulazione logico-deduttiva della materia (un modello di spazio-tempo, il postulare le equazioni del moto, un modello di vincoli, classi importanti di sistemi vincolati—quali i corpi rigidi).
- L'applicazione di queste tecniche a problemi meccanici specifici (meccanica celeste, moti di corpi rigidi, etc).

Il risultato è una teoria—forse un mondo—molto ricco, dalle molteplici sfaccettature, che utilizza un mix di tecniche matematiche ad ampio spettro (dall'analisi, dall'algebra, dalla geometria) spesso sinergicamente congiunto ad analisi numeriche, e alla modellizzazione più propriamente meccanica di sistemi etc. Naturalmente, la teoria risultante ha aspetti anche molto avanzati, e qui potremo dare uno sguardo solo alle basi.

Il corso è strutturato in quattro parti.

La prima copre l'introduzione delle necessarie tecniche dalla moderna teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie (la teoria dei Sistemi Dinamici), indispensabili per lo studio della dinamica definita dai sistemi meccanici e di interesse, anche applicativo, più ampio.

Le restanti sono dedicate alla meccanica.

La seconda copre la costruzione dei due *modelli* di sistemi meccanici che si studieranno, quelli liberi e quelli vincolati.

La terza è dedicata alla formulazione Lagrangiana della Meccanica Classica. Il suo interesse va oltre l'ambito puramente meccanico, perchè gioca un ruolo di base in analisi (calcolo delle variazioni), geometria (geodetiche), nonché in fisica teorica.

La quarta è una prima, brevissima introduzione alla formulazione Hamiltoniana, che è non solo la formulazione più potente per lo studio dei sistemi meccanici, ma una gemma sia dal punto di vista matematico che fisico.

Avvertenze e convenzioni

Assumeremo note, da parte dello studente, delle conoscenze di base di calcolo differenziale in più variabili (matrici Jacobiane, massimi e minimi, sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, diffeomorfismi etc.), ovviamente di algebra lineare (autovalori e autovettori etc.), di topologia di $\mathbb{R}^n$ (intorni, continuità, qualcosa sulla compattezza) e di equazioni differenziali ordinarie (esistenza ed unicità, soluzioni massimali, tecniche di soluzione elementari), conoscenze che normalmente si acquisiscono nel primo biennio dei corsi di laurea in Matematica e Fisica, e spesso anche di Ingegneria. Tuttavia riesamineremo alcuni di questi argomenti, e sottolineeremo alcuni aspetti—probabilmente meno noti—particolarmente sulle sottovarietà (fibrato tangente, sollevamento tangente di mappe, ...); una delle ricadute di questo corso sarà anche il raggiungimento di una miglior "familiarità di uso" con questi oggetti.

Di solito, nei testi di analisi si pone attenzione alla determinazione delle condizioni di regolarità minima di tutti gli oggetti (funzioni, campi vettoriali, sottovarietà etc.) sotto le quali valgono i singoli risultati. Nello studio dei Sistemi Dinamici e della Meccanica si considera invece di solito il solo caso C^∞. Un vantaggio di questa assunzione è la semplicità di esposizione: per esempio, derivando funzioni C^∞ non si perde un'ordine di derivabilità. Inoltre, questo (e anzi addirittura il caso reale analitico) è quello che più tipicamente si incontra nelle applicazioni. E infine, di norma non vi sono grandi differenze nelle proprietà di funzioni, equazioni differenziali etc. in classe C^∞ e in ogni classe C^k con $k \geq 1$ o 2, mentre per esempio per le equazioni differenziali vi è molta differenza fra C^1 e C^0, e per i massimi e minimi di funzioni fra C^2 e C^1. Per questo motivo, a meno che sia specificato diversamente, nel seguito si dovrà sempre assumere che tutti gli oggetti considerati siano di classe C^∞, che chiameremo anche *lisci* (traduzione dell'universalmente adottato termine inglese "smooth") o semplicemente *differenziabili*.

Avvertiamo anche che per "intorno" intenderemo "intorno aperto". Inoltre tenderemo ad usare il termine "funzione" per denotare le funzioni a valori in $\mathbb{R}$ e "mappa" per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ (e più in generale a valori in una sottovarietà). Se una mappa è un diffeomorfismo, la chiameremo anche "trasformazione".

Gli esercizi contrassegnati con un asterisco hanno un carattere più marcatamente teorico o complementare. In alcuni esercizi la lettera [R] indica la presenza della soluzione e la lettera [S] la presenza di suggerimenti, che si trovano alla fine di ogni capitolo. La scelta di non dare la soluzione di tutti gli esercizi è voluta: il convincersi da soli se la soluzione trovata per un esercizio sia giusta o meno comporta una maggior comprensione.

ESTRATTO

ESTRATTO

Indice

I Primo sguardo ai Sistemi Dinamici **1**

1 Analisi nello spazio delle fasi **3**
1.1 Campi vettoriali ed equazioni differenziali 3
1.1.A Curve, vettori tangenti, fibrato tangente. 3
1.1.B Campi vettoriali ed ODE. 4
1.2 Richiami di teoria di base delle ODE 6
1.2.A Il teorema di esistenza ed unicità. 6
1.2.B Determinismo. 7
1.2.C Soluzioni massimali. 8
1.2.D Traslabilità temporale delle soluzioni. 9
1.2.E La proprietà di gruppo. 10
1.2.F Campi vettoriali completi. 10
1.2.G Soluzione delle equazioni in dimensione **1**. 12
1.2.H Esempio: l'equazione logistica. 14
1.3 Analisi nello spazio delle fasi 16
1.3.A Il flusso di un campo vettoriale. 16
1.3.B Spazio delle fasi ed orbite. 16
1.3.C Equilibri ed attrattività. 18
1.3.D Soluzioni periodiche. 20
1.3.E Ritratti in fase in dimensione uno. 21
1.3.F Esempio: effetto Allee in ecologia. 22
1.3.G Equazioni del secondo ordine come sistemi del primo ordine sul fibrato tangente. 24
1.3.H Equazioni non autonome. 29
1.4 Linearizzazione agli equilibri 30
1.4.A Linearizzazione ad un equilibrio. 30
1.4.B Linearizzazione delle equazioni del secondo ordine. . . . 32
1.4.C Richiami: differenziali, matrici jacobiane, gradienti. . . 34
1.4.D Richiami: punti critici di funzioni reali. 35
1.5 Teoria qualitativa delle equazioni lineari 36
1.5.A Esponenziale di matrice. 36
1.5.B Flusso dei sistemi lineari. 37

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

1.5.C Sottoinsiemi e sottospazi invarianti. 39
1.5.D Struttura dei sistemi lineari diagonalizzabili. 40
1.5.E Sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$ (matrice diagonalizzabile). 44
1.5.F Sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$ (matrice non diagonalizzabile). . . 48
1.5.G Esempi in dimensione 3. 49
1.5.H Esempio: Rotazioni in $\mathbb{R}^3$. 51
1.5.I Sottospazi stabile, instabile e centrale. 54
1.5.J Dal lineare al nonlineare (solo uno sguardo). 56
1.6 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi 58

2 Proprietà del flusso **63**
2.1 Il flusso di un campo vettoriale. 63
2.1.A Flusso e sue mappe a tempo fissato. 63
2.1.B Proprietà del flusso. 64
2.1.C Esempio: integrazione numerica di equazioni differenziali. 66
2.2 Dipendenza dai dati iniziali 67
2.2.A Stima sulla separazione delle soluzioni. 67
2.2.B Dipendenza sensibile dai dati iniziali. Dinamica caotica. 70
2.3 Dipendenza dai parametri 74
2.3.A Dipendenza differenziabile dai parametri. 74
2.3.B Biforcazioni. 75
2.3.C Esempio: sfruttamento costante di risorse naturali. . . 76
2.3.D Diagramma di biforcazione. 78
2.4 Coniugazioni di flussi 80
2.4.A Diffeomorfismi e sistemi di coordinate. 80
2.4.B Coniugazioni di campi vettoriali e flussi. 82
2.4.C Push-forward e pull-back di funzioni e campi vettoriali. 85
2.4.D Sollevamento tangente di mappe. 86
2.4.E Cambiamenti di coordinate nelle equazioni del secondo ordine. 88
2.4.F Cambiamenti di coordinate dipendenti dal tempo. . . . 91
2.4.G Coordinate polari (e simili). 93
2.4.H Il teorema di rettificabilità locale. 95
2.5 Riscalamenti di campi vettoriali e riparametrizzazioni del tempo 97
2.5.A Riscalamenti e riparametrizzazioni. 97
2.5.B Riduzione del numero dei parametri. 99
2.6 Richiami sulle sottovarietà 100
2.6.A Sommersioni ed immersioni. 101
2.6.B Sottovarietà di $\mathbb{R}^m$. 102
2.6.C Parametrizzazioni e rappresentative locali. 104
2.6.D Gli spazi tangenti ad una sottovarietà. 105
2.6.E Il teorema delle sommersioni. 108

ESTRATTO

2.6.F Complemento: caratterizzazione geometrica delle sottovarietà. . . . 110
2.7 Sottovarietà invarianti e quasi-invarianti . . . 111
2.7.A Equazione ristretta. . . . 114
2.7.B Complemento: equazioni differenziali su sottovarietà chiuse. . . . 117
2.8 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi . . . 118

3 Integrali primi e simmetrie 123
3.1 Integrali primi . . . 123
3.1.A Integrali primi. . . . 123
3.1.B La derivata di Lie. . . . 124
3.1.C Foliazione invariante. . . . 126
3.1.D Abbassamento della dimensione per mezzo di integrali primi. Equazione ristretta. . . . 129
3.1.E Integrali primi e attrattività degli equilibri. . . . 132
3.2 Esempio: il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra . . . 133
3.2.A Il sistema. . . . 133
3.2.B Ritratto in fase. . . . 133
3.2.C Complemento: dettagli sull'integrale primo. . . . 136
3.3 Esempio: Equazione di Newton unidimensionale . . . 137
3.3.A Ritratto in fase. . . . 137
3.3.B Linearizzazione. . . . 141
3.3.C Abbassamento della dimensione ed equazione ristretta. Legge oraria. . . . 142
3.3.D Sistemi meccanici con dissipazione. . . . 146
3.4 Simmetrie . . . 148
3.4.A Trasformazioni di simmetria di un campo vettoriale. . . . 148
3.4.B Azioni di $\mathbb{R}$ e S^1. . . . 150
3.4.C Riduzione. . . . 152
3.4.D Cosa è lo spazio delle fasi ridotto? . . . 154
3.5 Esempio: il modello epidemiologico SIR . . . 156
3.5.A Il modello. . . . 156
3.5.B Riduzione e studio del sistema ridotto. . . . 158
3.5.C Implicazioni epidemiologiche. . . . 159
3.6 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi . . . 160

4 Stabilità degli equilibri 165
4.1 Stabilità alla Lyapunov . . . 165
4.2 Il metodo delle funzioni di Lyapunov . . . 169
4.3 Il metodo spettrale . . . 175
4.4 Esempio: car following—modello con piccolo ritardo . . . 178
4.5 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi . . . 180

ESTRATTO

II Sistemi Meccanici **183**

5 Sistemi meccanici liberi **185**
5.1 Sistemi meccanici . . . 185
5.1.A Nozioni ed ipotesi di base. . . . 185
5.1.B Sistemi di riferimento e derivate temporali. . . . 186
5.1.C Forze e sistemi meccanici. . . . 189
5.1.D Equazioni del moto. Spazi delle configurazioni e degli atti di moto. . . . 190
5.1.E Forze interne ed esterne. . . . 191
5.2 Le equazioni del moto in riferimenti diversi . . . 193
5.2.A Velocità angolare di un riferimento rispetto ad un altro. 194
5.2.B Dipendenza delle forze dal sistema di riferimento. . . . 197
5.2.C Perché la velocità angolare è un vettore? . . . 201
5.3 Leggi di bilancio ed integrali primi nei sistemi meccanici . . . 203
5.3.A Quantità di moto e momento angolare. . . . 204
5.3.B Forze conservative ed energia potenziale. . . . 208
5.3.C Forse dipendenti dalla velocità "a potenza nulla". . . . 213
5.4 Esempio: moti in campi centrali . . . 214
5.4.A Restrizione a un problema piano. . . . 214
5.4.B Costanza della velocità areolare. . . . 215
5.4.C Collisioni? . . . 217
5.5 Complementi . . . 218
5.5.A Osservazioni sullo spazio assoluto. . . . 218
5.5.B Riferimenti inerziali. . . . 219
5.5.C Prodotto vettore di $\mathbb{V}^3$ . . . 219
5.6 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi . . . 221

6 Sistemi meccanici vincolati **225**
6.1 Introduzione . . . 225
6.2 Vincoli olonomi . . . 231
6.2.A Fibrato tangente di una sottovarietà. . . . 231
6.2.B Vincoli olonomi. . . . 232
6.3 Reazioni vincolari ideali . . . 237
6.4 Esistenza delle reazioni vincolari ideali. Equazioni di Lagrange di I specie. . . . 241
6.5 Vincoli olonomi mobili ideali . . . 244
6.5.A Sottovarietà mobili e atti di moto vincolati. . . . 244
6.5.B Vincoli olonomi mobili ideali. . . . 247
6.5.C Equazioni di Lagrange di I specie. . . . 248
6.6 Complementi . . . 249
6.6.A Osservazioni aggiuntive sui vincoli olonomi. . . . 249
6.6.B Cosa sono i vincoli anolonomi? . . . 251
6.7 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi . . . 256

ESTRATTO

7 Le equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi **257**
7.1 Equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi 257
7.1.A Parametrizzazione degli atti di moto: coordinate sul fibrato tangente. 257
7.1.B Energia cinetica dei sistemi olonomi. 262
7.1.C La derivata lungo le curve (o totale). 269
7.1.D Le equazioni di Lagrange (vincoli e coordinate fissi). . 271
7.1.E Equazioni di Lagrange (vincoli o coordinate mobili) . . 277
7.2 La Lagrangiana 280
7.2.A Forze generalizzate che ammettono energia potenziale. 280
7.2.B Forze che ammettono potenziale dipendente dalle velocità. 288
7.2.C Particella carica in campo elettromagnetico. 295
7.2.D Non-unicità dei potenziali dipendenti dalle velocità. . . 297
7.2.E Aggiunta di vincoli. 298
7.3 Complemento storico: il principio dei lavori virtuali e il principio di d'Alembert 299
7.4 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi 300

III La formulazione Lagrangiana **305**

8 Meccanica Lagrangiana **307**
8.1 Sistemi Lagrangiani 307
8.1.A Sistemi lagrangiani. Lagrangiane regolari. 307
8.1.B Sistemi lagrangiani meccanici. 309
8.1.C L'integrale di Jacobi. 310
8.1.D Coordinate ignorabili e momenti coniugati. 314
8.1.E Push-forward di campi vettoriali (e sistemi) lagrangiani. 316
8.1.F Non-unicità della Lagrangiana e Lagrangiane equivalenti. 320
8.1.G Riparametrizzazioni costanti del tempo. 323
8.1.H Time reversal. 324
8.1.I Complemento: equazioni di Lagrange su (fibrati tangenti di) varietà. 324
8.2 Equilibri e stabilità nei sistemi meccanici lagrangiani 326
8.2.A Configurazioni di equilibrio. 326
8.2.B Il caso meccanico. 327
8.2.C Stabilità ed instabilità nel caso meccanico: risultati di base. 330
8.2.D Stabilità ed instabilità: risultati avanzati per sistemi lagrangiani naturali. 333
8.2.E Linearizzazione agli equilibri di sistemi lagrangiani naturali. 336
8.2.F Stabilizzazione girostatica. 340

ESTRATTO

8.3 Piccole oscillazioni 341
8.3.A Premessa. 341
8.3.B Struttura delle piccole oscillazioni. 342
8.3.C Esempi. 346
8.3.D Piccole oscillazioni e sistemi di oscillatori disaccoppiati. 349
8.4 Simmetrie 1: Il teorema di Noether 350
8.4.A Il doppio ruolo delle simmetrie per i sistemi lagrangiani. 350
8.4.B Sollevamento tangente di un'azione. 351
8.4.C Il teorema di Noether. 351
8.5 Simmetrie 2: La riduzione alla Routh 356
8.5.A Simmetrie e coordinate ignorabili. 356
8.5.B Riduzione alla Routh. 358
8.5.C Integrabilità per quadrature. 364
8.6 Esempio: il pendolo sferico. 364
8.7 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi. 368

9 Alcuni sistemi meccanici classici 373
9.1 Oscillatori, moti quasi–periodici e tori invarianti 373
9.1.A Il sistema. 373
9.1.B Moti lineari su tori. 374
9.1.C Il caso nonrisonante: moti quasi–periodici. 377
9.1.D Caso risonante. 378
9.2 Punto in campo centrale e problema di Kepler 379
9.2.A Punto in campo centrale: restrizione al problema piano. 380
9.2.B Campo centrale piano: riduzione ad un grado di libertà. 381
9.2.C Kepler: sistema ridotto. 382
9.2.D Kepler: ricostruzione. 383
9.2.E Kepler: periodicità dei moti limitati. 384
9.2.F Kepler: il vettore di Laplace-Runge-Lenz. 386
9.2.G Kepler: traiettorie e leggi di Kepler. 387
9.2.H Kepler: Dimostrazione dell'equazione delle traiettorie. . 389
9.2.I Moti limitati in un generico campo centrale. 391
9.3 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi 394

10 Formulazione variazionale delle equazioni di Lagrange 395
10.1 Il principio di Hamilton 395
10.1.A Calcolo delle variazioni. 395
10.1.B Il caso del funzionale d'azione. 398
10.1.C Commenti. 400
10.2 Meccanica e geometria: geodetiche 401
10.2.A Geodetiche di una sottovarietà di $\mathbb{R}^m$. 401
10.2.B Metriche riemanniane su varietà. 406
10.2.C Dinamica e geodetiche. 410
10.2.D Complemento: spazio cotangente e prodotto tensore. . 411

ESTRATTO

10.3 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi. 412

11 Corpi rigidi come sistemi olonomi **415**
11.1 Un modello di corpo rigido 415
11.1.A Corpi rigidi: definizione e varietà delle configurazioni. . 415
11.1.B Atti di moto rigido e vettori tangenti a Q_{CR}. 417
11.1.C Idealità del vincolo di rigidità. 419
11.2 Le equazioni del moto di un corpo rigido 423
11.2.A Le equazioni del moto di un corpo rigido sono le equazioni cardinali. 423
11.2.B Momento angolare ed energia cinetica dei corpi rigidi. . 425
11.2.C Assi e momenti principali di inerzia. 427
11.2.D L'approssimazione di corpi rigidi continui. 429
11.3 Corpi rigidi vincolati 430
11.3.A Corpi rigidi con un punto fisso. 431
11.3.B Corpi rigidi vincolati a compiere moti piani: descrizione lagrangiana. 431
11.3.C Rotolamento. 433
11.4 Il corpo rigido di Euler–Poinsot e quello 'libero' 436
11.4.A Il sistema. 436
11.4.B Integrali primi. Equazione di Euler. 438
11.4.C Rotazioni uniformi. Moto di un corpo 'sferico'. 439
11.4.D Moto di un corpo 'simmetrico'. 440
11.4.E Caso di un corpo 'triassiale'. 442
11.4.F Complemento: Moto del corpo simmetrico nello spazio. 445
11.5 La trottola di Lagrange 446
11.5.A Il sistema. 446
11.5.B Angoli di Euler. 446
11.5.C La Lagrangiana. 447
11.5.D Riduzione. 449
11.5.E Ricostruzione. 450
11.5.F Integrali primi. 452
11.6 Dimostrazione della Proposizione 11.1.3 453
11.6.A Premessa. 453
11.6.B Il caso di un corpo rigido piano. 453
11.6.C Il caso di un corpo rigido non piano. 456
11.7 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi 457

IV Cenno alla formulazione Hamiltoniana **461**

12 Meccanica Hamiltoniana **463**
12.1 Dai sistemi lagrangiani a quelli hamiltoniani. 463
12.1.A Trasformazione di Legendre. 463

FOTOCOPIATO

12.1.B Equazioni di Hamilton. 464
12.1.C Complemento: geometria della trasformazione di Legendre. 469
12.2 Proprietà di base dei sistemi hamiltoniani 471
12.2.A Sistemi hamiltoniani. 471
12.2.B Qualche proprietà dinamica. 472
12.2.C Struttura simplettica e campi vettoriali hamiltoniani. . 474
12.2.D Linearizzazione e matrici hamiltoniane. 476
12.2.E Parentesi di Poisson. 477
12.3 Trasformazioni simplettiche 481
12.3.A Matrici e diffeomorfismi simplettici. 481
12.3.B Trasformazione dei campi vettoriali hamiltoniani sotto diffeomorfismi simplettici. 485
12.3.C Criteri di simpletticità. 487
12.3.D Esempio: trasformazioni puntuali estese. 492
12.3.E Funzioni generatrici di trasformazioni simplettiche. . . 495
12.3.F Trasformazioni canoniche e trasformazioni simplettiche con valenza. 497
12.4 Simpletticità del flusso hamiltoniano e conservazione del volume 499
12.4.A Simpletticità dei flussi hamiltoniani. 499
12.4.B Conservazione del volume. 500
12.5 Esempio: sistemi meccanici unidimensionali con dinamica periodica 502
12.5.A Sistemi completamente integrabili. 502
12.5.B Sistemi con dinamica periodica e $n = 1$. 503
12.5.C L'equazione di Hamilton-Jacobi. 505
12.5.D Coordinate tempo-energia. 505
12.5.E Coordinate angolo-azione. 508
12.6 Complemento: trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo 509
12.6.A Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo: Definizione e caratterizzazione. 509
12.6.B La condizione di Lie e le sue conseguenze. 511
12.7 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi 514

ESTRATTO

Parte I. Primo sguardo ai Sistemi Dinamici

> *.... non dimenticando il detto di Poincaré, che un sistema di equazioni differenziali è solo più o meno integrabile.* (G.D. Birkhoff, 1927)
>
> *La teoria delle equazioni differenziali ordinarie è uno degli strumenti fondamentali delle scienze matematiche. Questa teoria permette di studiare tutti i possibili processi evolutivi che hanno la proprietà di essere: deterministici, a dimensione finita e differenziabili.* (V.I. Arnold, 1976)

Il nostro principale interesse sono gli aspetti matematici della meccanica classica, ed in particolare gli strumenti matematici necessari a studiare e comprendere le proprietà dinamiche dei sistemi meccanici, per lo più conservativi, liberi o vincolati. Da un punto di vista matematico si tratta dunque di studiare le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali di un tipo particolare, le equazioni di Newton con forze derivanti da energia potenziale e le loro generalizzazioni per sistemi vincolati (le equazioni di Lagrange o di Hamilton). In questa prima parte si pongono le basi per questo lavoro.

Anche al livello introduttivo al quale si pone questo corso, questo studio richiede un'ampia classe di tecniche matematiche—analitiche, geometriche, algebriche—che sono studiate nei corsi di matematica del biennio di molti corsi di laurea, ma che includono anche metodi, idee e tecniche dedicati allo studio delle equazioni differenziali ordinarie (che chiameremo semplicemente equazioni differenziali). Questi metodi appartengono alla moderna teoria dei *sistemi dinamici*, inscindibilmente legata alla meccanica classica e di interesse sia per sè sia per altre aree della matematica e delle applicazioni. In effetti, le equazioni differenziali sono uno strumento molto potente, e quasi ubiquo, per la modellizzazione di un vasto campo di fenomeni fisici, chimici, biologici, ingegneristici, economici, demografici, etc.

Nei corsi di analisi lo studio delle equazioni differenziali si focalizza da un lato su teoremi generali (esistenza ed unicità, dipendenza differenziabile dai dati iniziali, ...) e da un altro su tecniche di risoluzione per particolari classi di equazioni, specificamente quelle a variabili separabili e quelle lineari. Tuttavia, esclusi pochi casi, sostanzialmente appunto queste particolari classi, determinare analiticamente le soluzioni di un'equazione differenziale è in generale estremamente difficile, se non addirittura impossibile. Per questo motivo, a partire dall'inizio del XX secolo, con Poincaré, ha assunto sempre maggio-

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

ESTRATTO

re importanza il loro studio *qualitativo,* basato sull'idea che, anche se non è possibile determinare le soluzioni, se ne possono comunque comprendere delle proprietà di tipo qualitativo, geometrico, che, seppure meno dettagliate delle espressioni analitiche, forniscono informazioni significative—per esempio, quale sia il comportamento asintotico. Questa prima parte del corso è dedicata ad una prima introduzione a queste metodologie, che raramente vengono studiate in altri corsi, naturalmente in un'ottica focalizzata al tipo di equazioni, e di problemi, che si incontrano in meccanica. In essa introdurremo nozioni e punti di vista che saranno costantemente utilizzati nel seguito.

ESTRATTO

ESTRATTO

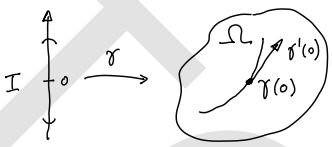
Capitolo 1

Analisi nello spazio delle fasi

1.1 Campi vettoriali ed equazioni differenziali

1.1.A Curve, vettori tangenti, fibrato tangente. Nello studio della meccanica e della dinamica è spesso necessario adottare una prospettiva geometrica—da un punto di vista geometrico, un'equazione differenziale è un campo vettoriale. Ricordiamo allora preliminarmente alcune nozioni note dai corsi di analisi e geometria, che andranno tenute costantemente a mente.

In tutto questo capitolo, e nei successivi, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto connesso e $d \geq 1$.

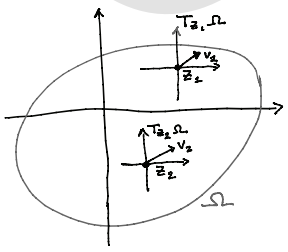


Una *curva per un punto* $z \in \Omega$ è una mappa (differenziabile) $t \mapsto \gamma(t)$ da un intervallo reale I che contiene 0 a Ω tale che $\gamma(0) = z$.

Si definiscono come *vettori tangenti* ad Ω in un suo punto z le derivate (o velocità) $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$ delle curve per z. (Naturalmente diverse curve possono avere la stessa derivata, e ciò che conta è la derivata, non la particolare curva scelta per definirla).

L'insieme di tutti i così definiti vettori tangenti a Ω in z forma uno spazio vettoriale di dimensione $= \dim(\Omega)$, chiamato lo *spazio tangente* a Ω in z e denotato $T_z\Omega$:

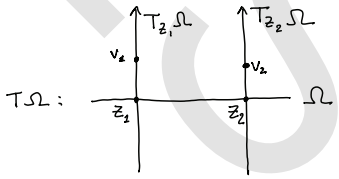
$$T_z\Omega := \{\gamma'(0) : \ \gamma \text{ curva per } z\} \tag{1.1.1}$$



Naturalmente $T_z\Omega$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ perché se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ allora $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$. Nel seguito faremo costantemente questa identificazione, $T_z\Omega \equiv \mathbb{R}^n$, ma, ciononostante, continueremo ad utilizzare la scrittura $T_z\Omega$ perché permette di tenere traccia del punto z.

Si può pensare ogni spazio tangente $T_z\Omega$ ed i suoi vettori come "attaccati" al punto z di Ω. Tuttavia, per poter lavorare con i vettori tangenti in diversi

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)



punti, conviene pensarli come elementi di un unico spazio, ovvero l'insieme

$$\big\{(z,v)\,:\,z\in\Omega\,,\ v\in T_z\Omega=\mathbb{R}^n\big\}=\Omega\times\mathbb{R}^n\,.$$

Questo spazio si chiama il *fibrato tangente* di Ω si denota $T\Omega$:

$$T\Omega\ :=\ \big\{(z,v)\,:\,z\in\Omega\,,\ v\in T_z\Omega\big\}\,. \tag{1.1.2}$$

Se si interpreta Ω come lo spazio degli "stati" di un sistema (per esempio, la posizione di un punto in $\mathbb{R}^3$) allora i punti di $T\Omega$ sono le coppie "stato-velocità" del sistema. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora $T\Omega$ è un aperto dello spazio $\mathbb{R}^{2n}$, di dimensione doppia.

> **Osservazione:** L'$\mathbb{R}^n$ nel quale è contenuto l'aperto Ω dovrebbe propriamente essere pensato come spazio affine, ma se appare più semplice si può tranquillamente pensarlo come spazio vettoriale. Rappresenteremo i punti di $\mathbb{R}^n$ (spazio affine) come n-uple, $z=(z_1,\dots,z_n)$. È usuale rappresentare come "vettori colonna" i vettori di $\mathbb{R}^n$ (spazio vettoriale), $\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ o $(v_1,\dots,v_n)^T$; questa rappresentazione è comoda quando compaiono prodotti "riga per colonna" con matrici. Tuttavia, per semplicità di notazione, quando non vi sia pericolo di ambiguità, li scriveremo come n-uple, $(v_1,\dots,v_n)$. Faremo lo stesso anche per i campi vettoriali.

Esercizi 1.1.1 *(i) Disegnare l'immagine della curva $\gamma(t)=(t,t^2)$ in $\Omega=\mathbb{R}^2\ni(x,y)$ e, su di essa, i vettori tangenti $\gamma'(0)$ e $\gamma'(-1)=(1,-2)$.* [R]

(ii) Provare che, se $\gamma: I\to\Omega$ è una curva, allora, per ogni $t\in I$,

$$\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}\Omega\,.$$

[Suggerimento: per ogni t fissato, considerare la curva $\eta: I\to\Omega$, $s\mapsto\eta(s):=\gamma(t+s)$]. [R]

(iii) Denoteremo $e_1,\dots,e_n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Mostrare che essi formano una base di ogni spazio tangente $T_z\Omega$. [Suggerimento: si considerino le "curve coordinate" $t\mapsto z+te_i$] [R]

(iv) Siano $u=\gamma'(0)\in T_z\Omega$, $v=\eta'(0)\in T_z\Omega$ e $c\in\mathbb{R}$. Determinare una curva ξ per z tale che $u+v=z'(0)$ ed una tale che $cu=\xi'(0)$.* [R]

1.1.B Campi vettoriali ed ODE. Un campo vettoriale X definito su un aperto (connesso: d'ora in poi lo daremo per sottinteso) $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ è una mappa che ad ogni punto z di Ω associa un vettore $X(z)\in T_z\Omega$. Se identifichiamo tutti gli spazi tangenti con $\mathbb{R}^n$, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.1.1 *Un* campo vettoriale *su un aperto Ω in $\mathbb{R}^n$ è una mappa (differenziabile)*

$$X\ :\ \Omega\to\mathbb{R}^n$$

ESTRATTO

Un campo vettoriale X definisce un'equazione differenziale del primo ordine, che è convenzionalmente scritta

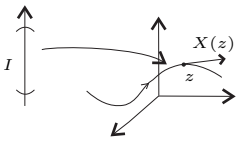
$$\dot{z} \;=\; X(z) \tag{1.1.3}$$

(il puntino denota la derivata temporale: questa notazione, di uso pressoché universale in meccanica e nel campo dei sistemi dinamici, è quella originaria di Newton).

La (1.1.3) è in realtà un tipo particolare di equazione differenziale perché, essendo risolta rispetto alla derivata, è in forma normale. Se $n > 1$, l'equazione (1.1.3) è anche chiamata *sistema* di n equazioni differenziali del primo ordine. Utilizzeremo indifferentemente entrambi i termini.

Chiameremo *dimensione* dell'equazione differenziale la dimensione n di Ω. (Nei corsi di analisi si dice anche che n è l'ordine dell'equazione, ma noi useremo questo termine con un altro significato, per sottolineare le specificità delle equazioni del secondo ordine come l'equazione di Newton).

Definizione 1.1.2 *Una* curva integrale *di un campo vettoriale X, o* soluzione *dell'associata equazione differenziale (1.1.3), è una curva differenziabile*[1]



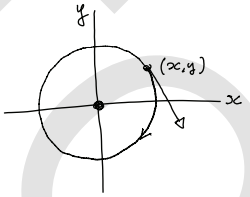
$$\gamma \;:\; I \to \Omega$$

che è definita in un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e soddisfa $\gamma' = X \circ \gamma$, ovvero

$$\gamma'(t) \;=\; X(\gamma(t)) \qquad \forall t \in I$$

(la sua velocità in ogni punto è uguale al valore in quel punto del campo vettoriale).

Avvertiamo che, a seconda del contesto, useremo varie notazioni per le soluzioni di un'equazione differenziale: $\gamma(t)$, $z(t)$, z_t e altre simili.



Esempio: In $\Omega = \mathbb{R}^2 \ni z = (x, y)$ consideriamo il campo vettoriale $X(x, y) = (y, -x)$. $X(0, 0)$ è il vettore nullo in $z = (0, 0)$. In ogni altro punto z, $X(z)$ è il vettore tangente al cerchio di centro l'origine passante per z e di norma $\|z\|$. Per ogni $r \geq 0$, la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-r\cos(t), -r\sin(t))$, soddisfa $\gamma'(t) = (r\sin(t), -r\cos(t)) = X(r\cos(t), r\sin(t))$ ed è dunque una curva integrale di X; la sua immagine è il punto $(0, 0)$ se $r = 0$, il cerchio di raggio r percorso in verso orario se $r > 0$.

Osservazione: La definizione 1.1.1 di campo vettoriale è sufficiente per i nostri scopi attuali, ma è un po' imprecisa. In ogni punto $z \in \Omega$, $X(z)$ uguaglia la velocità di una curva, ed è dunque un vettore di $T_z\Omega$:

$$X(z) \in T_z\Omega\,.$$

[1] Precisamente: C^{k+1} se X è C^k.

ESTRATTO

Per dare un senso a questo punto di vista si dovrebbe considerare come campo vettoriale non la mappa $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ma la mappa

$$X^\uparrow \,:\, \Omega \,\to\, T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n\,, \qquad X^\uparrow(z) \,=\, (z, X(z))$$

che ad ogni punto z associa la coppia formata dal punto z e dal vettore $X(z)$, ovvero un punto del fibrato tangente. Per ora si può ignorare questo aspetto, che riemergerà però più avanti.

1.2 Richiami di teoria di base delle ODE

L'analisi qualitativa delle equazioni differenziali, che è l'oggetto del nostro studio, poggia (inevitabilmente) su alcuni risultati generali sulle soluzioni delle equazioni differenziali, che devono essere ben chiari al lettore. Per completezza e uniformità di trattazione richiamiamo velocemente tali risultati in questo capitolo.[2]

1.2.A Il teorema di esistenza ed unicità. Gran parte del nostro studio farà riferimento al problema di Cauchy, che è relativo alla possibilità di trovare la soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ di un'ODE che passa, ad un assegnato istante iniziale t_0, per un assegnato "dato iniziale" $z_0 \in \Omega$: soddisfa cioè $\gamma(t_0) = z_0$. Uno dei risultati di base nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie è il fatto che, sotto ipotesi di regolarità abbastanza larghe, il problema di Cauchy ha sempre soluzione e, anzi, la soluzione è (in un senso da precisare appena) unica. Ci limitiamo a formulare questo risultato, rimandando per la dimostrazione ai testi di analisi:

Proposizione 1.2.1 (Teorema di Esistenza ed Unicità) *Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale (liscio). Allora:*

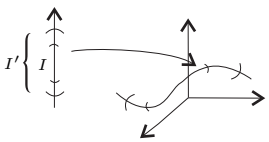
i. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \Omega$ esistono un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ che contiene t_0 ed una curva integrale $\gamma : I \to \Omega$ di X tale che $\gamma(t_0) = z_0$.

ii. Se $\gamma : I \to \Omega$ e $\tilde\gamma : \tilde I \to \Omega$ sono due curve integrali con lo stesso dato iniziale allo stesso istante iniziale allora $\gamma(t) = \tilde\gamma(t)$ per $t \in I \cap \tilde I$.

La prima parte del teorema assicura l'esistenza, per ogni dato ed istante iniziali (z_0, t_0), di una soluzione definita in un qualche "intervallo di esistenza" I. Tale intervallo non è certamente unico (si può sempre prenderne un sottointervallo) e, letteralmente, si dovrebbero considerare come distinte due soluzioni con uguali dato ed istante iniziali ma diversi intervalli di esistenza. La seconda parte

[2] Il lettore che abbia già familiarità con questi argomenti può limitarsi ad un veloce sguardo, più che altro al fine di familiarizzare con la notazione e la terminologia utilizzate. In particolare, le dimostrazioni delle Proposizioni in questa sezione, inserite per completezza, usano tecniche che non sono tipiche della trattazione successiva e possono essere trascurate.

ESTRATTO



del teorema afferma che due tali soluzioni coincidono nell'intersezione dei loro intervalli di esistenza, ovvero nell'intervallo nel quale sono entrambe definite. Come vedremo nella prossima sottosezione questo permette di estendere le soluzioni con assegnati dato ed istante iniziali ad un'unica soluzione "massimale", definita su un intervallo di esistenza non ulteriormente estendibile.

Il fatto che le soluzioni siano definite in un intervallo aperto che contiene l'istante iniziale significa che esse sono definite non solo nel futuro, ma anche nel passato. È cioè sempre ben posto chiedersi dove fosse, ad un istante $t < t_0$ appartenente all'intervallo di esistenza, la soluzione che a $t = t_0$ transita per un punto z_0. La storia passata di una soluzione può essere interessante quanto quella futura: per esempio, così come il comportamento di una soluzione per $t \to +\infty$ ci dice ove essa asintoticamente andrà, quello per $t \to -\infty$ ci dice da dove essa asintoticamente arrivi.

Osservazioni: (i) Il teorema di esistenza vale sotto la sola continuità del campo vettoriale. Per l'unicità, invece, la continuità non basta: un classico controesempio è l'equazione $\dot{z} = z^{1/3}$ in $z \in \mathbb{R}$, la quale ha (almeno) due soluzioni con dato iniziale $z_0 = 0$ a $t_0 = 0$: una è $t \mapsto 0$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e l'altra è data da $t \mapsto 0$ se $t \leq 0$ e $t \mapsto (\frac{2}{3}t)^{3/2}$ se $t > 0$. Una condizione sufficiente per l'unicità è la lipschitzianità locale del campo vettoriale, ovvero il fatto che per ogni palla chiusa B contenuta nel dominio Ω dell'equazione esista una costante k_B tale che $\|X(z) - X(z')\| \leq k_B \|z - z'\|$ per tutti gli $z, z' \in B$. La lipschizianità locale è assicurata, per esempio, se il campo vettoriale è di classe C^1. (Ovviamente $z^{1/3}$ è continua, ma non localmente lipschitziana, in zero).

(ii) La dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità fornisce una stima da sotto sull'ampiezza dell'intervallo di esistenza I. L'interesse di tale stima è principalmente tecnico (perché quello che interessa sono gli intervalli di esistenza massimali, dei quali parleremo più avanti). In particolare, questa stima implica che l'ampiezza dell'intervallo di esistenza I è "localmente uniforme", nel senso seguente: per ogni $z \in \Omega$ esistono un intorno V_z di z ed un $T_z > 0$ tali che per ogni $z_0 \in V$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ si ha $I \supset (t_0 - T_z, t_0 + T_z)$. Come conseguenza, la stima sull'intervallo di esistenza è uniforme sui compatti: *per ogni $K \subset \Omega$ compatto esiste $T_K > 0$ tale che, per ogni dato iniziale $z_0 \in K$ e ogni istante iniziale $t_0 \in \mathbb{R}$, vi è una soluzione con intervallo di esistenza $\supseteq (t_0 - T_K, t_0 + T_K)$.* (La dimostrazione si fa ricoprendo K con un numero finito di intorni V_{z_i} e prendendo $T_K = \min_i T_{z_i}$).

1.2.B Determinismo. Da un punto di vista interpretativo, l'esistenza ed unicità delle soluzioni codifica il *determinismo* di ogni sistema descritto da un'equazione differenziale: se i punti dello spazio delle fasi rappresentano gli "stati" del sistema, allora la conoscenza dello stato iniziale determina completamente lo stato del sistema ad ogni istante successivo ($t > t_0$) ed antecedente ($t < t_0$); dunque, lo stato presente del sistema determina cioè l'intera evoluzione futura e passata.

ESTRATTO

Storicamente, il determinismo dell'evoluzione descritta da un'equazione differenziale fu chiaramente riconosciuto e descritto da Laplace (inizi XIX secolo) nel caso della meccanica, nella quale l'evoluzione è regolata dall'equazione (differenziale) di Newton, e che all'epoca era considerata la teoria fondamentale della Natura. Laplace scrive:

> *Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro, proprio come il passato, sarebbe evidente davanti ai suoi occhi.*

Si è successivamente compreso che le conseguenze del determinismo dell'evoluzione non sono in realtà così forti: torneremo su questa questione, che ha aspetti di grande interesse, nella sezione 2.2.

1.2.C Soluzioni massimali. Il teorema di esistenza ed unicità ha (in particolare nella parte che riguarda l'unicità) varie conseguenze.

La prima è che ogni soluzione con assegnati dato ed istante iniziali (z_0, t_0) può essere estesa ad un'unica soluzione 'massimale' definita su un intervallo di esistenza non ulteriormente estendibile:

Proposizione 1.2.2 *Sia X un campo vettoriale su Ω. Siano $z_0 \in \Omega$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Allora esiste un intervallo aperto I_{z_0,t_0} che contiene t_0 ed è tale che:*

(i) Esiste una soluzione $\gamma_{z_0,t_0} : I_{z_0,t_0} \to \Omega$ di $\dot{z} = X(z)$ che soddisfa $\gamma_{z_0,t_0}(t_0) = z_0$.

(ii) Se I è un intervallo aperto che contiene t_0 e $\gamma : I \to \Omega$ è una soluzione di $\dot{z} = X(z)$ che soddisfa $z(t_0) = z_0$, allora $I \subseteq I_{z_0,t_0}$.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\{\gamma_\lambda : I_\lambda \to \Omega : \lambda \in \Lambda\}$ di tutte le curve integrali di X con dato iniziale z_0 all'istante t_0; ciascuna di esse è definita su un intervallo aperto I_λ che contiene t_0 (qui Λ è un insieme di indici). Allora $I_{z_0,t_0} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ è un intervallo aperto che contiene t_0 e, per la parte (ii) della Proposizione 1.2.1, possiamo definire una funzione $\gamma_{z_0,t_0} : I_{z_0,t_0} \to \Omega$ come

$$\gamma_{z_0,t_0}(t) = \gamma_\lambda(t) \qquad \text{se} \quad t \in I_\lambda$$

e questa funzione è una curva integrale di X che soddisfa $\gamma_{z_0,t_0}(t_0) = z_0$. Per la definizione stessa di I_{z_0,t_0} non esiste alcuna soluzione definita su un intervallo aperto contenente t_0 il quale contenga propriamente I_{z_0,t_0}. ■

ESTRATTO

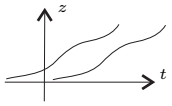
Nel seguito chiameremo I_{z_0,t_0} intervallo di esistenza massimale e γ_{z_0,t_0} *soluzione massimale con dato iniziale* z_0 *all'istante* t_0, o *curva integrale massimale per* z_0 *a* t_0.

1.2.D Traslabilità temporale delle soluzioni. Una seconda conseguenza del teorema di esistenza ed unicità è che la scelta dell'istante iniziale t_0 non ha grande importanza nel determinare la soluzione, perché quel che davvero conta è solo l'intervallo di tempo $t - t_0$ trascorso da esso. (Questo è intuitivamente ovvio perché, se si pensa alla soluzione come ad un punto che si muove, lungo la sua strada esso incontra sempre lo stesso campo vettoriale, indipendentemente da quando è partito; ovviamente, questo non sarebbe vero se il campo vettoriale dipendesse dal tempo).

Precisamente, denotando con $I + t_0$ la traslazione di t_0 di un intervallo I, ovvero $I + t_0 := \{t \in \mathbb{R} : t - t_0 \in I\}$, si ha:

Proposizione 1.2.3 *Per ogni* $z_0 \in \Omega$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}$ *si ha* $I_{z_0,t_0} = I_{z_0,0} + t_0$ *e*

$$\gamma_{z_0,t_0}(t_0 + t) = \gamma_{z_0,0}(t) \qquad \forall\, t \in I_{z_0,0}\,. \tag{1.2.1}$$



Dimostrazione. Consideriamo la curva

$$t \mapsto \gamma(t) := \gamma_{z_0,t_0}(t_0 + t)$$

che è definita in $I_{z_0,t_0} - t_0$ ed ha valori in Ω. Essa è soluzione di $\dot{z} = X(z)$ perché, per ogni t in tale intervallo,

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\gamma_{z_0,t_0}(t_0 + t) \;=\; \frac{d}{d\tau}\gamma_{z_0,t_0}(\tau)\Big|_{\tau=t_0+t} = X\big(\gamma_{z_0,t_0}(t_0 + t)\big) = X\big(\gamma(t)\big)\,.$$

Siccome, inoltre, soddisfa $\gamma(0) = \gamma_{z_0,t_0}(t_0) = z_0$, per l'unicità, $\gamma : I_{z_0,t_0} - t_0 \to \Omega$ è una soluzione, possibilmente non massimale, con dato iniziale z_0 al tempo $t = 0$, ovvero

$$\gamma(t) = \gamma_{z_0,0}(t) \qquad \forall t \in I_{z_0,t_0} - t_0\,.$$

Resta da mostrare che essa è massimale, ovvero che $I_{z_0,t_0} - t_0 = I_{z_0,0}$. Da quanto visto segue che $I_{z_0,t_0} - t_0 \subseteq I_{z_0,0}$. Ripetendo il ragionamento con $\gamma(t) := \gamma_{z_0,0}(t - t_0)$ si trova che $I_{z_0,0} + t_0 \subseteq I_{z_0,t_0}$. ■

Per questo motivo, in tutte le considerazioni teoriche possiamo limitarci a considerare solo le soluzioni massimali con dato iniziale a $t = 0$ e, per semplicità, scriveremo

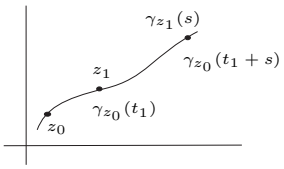
$$\gamma_{z_0} := \gamma_{z_0,0}\,, \qquad I_{z_0} := I_{z_0,0}\,.$$

Osservazione: Si esprime a volte la (1.2.1) dicendo che l'insieme delle soluzioni massimali di un'equazione differenziale è "invariante per traslazioni temporali": traslandone una nel tempo se ne ottiene un'altra.

ESTRATTO

1.2.E La proprietà di gruppo. Vi è una terza conseguenza del teorema di esistenza ed unicità che a questo stadio di sviluppo della teoria può apparire tecnico e di interesse non chiaro (se non addirittura misterioso) ma che, come via via apparirà chiaro, in realtà svolge un ruolo centrale in tutto lo studio dei sistemi dinamici.

Si consideri un dato iniziale z_0. La soluzione massimale con quel dato iniziale a $t_0 = 0$ arriva nel punto $\gamma_{z_0}(t_1)$ ad un istante t_1 e nel punto $\gamma_{z_0}(t_1+s)$ ad un altro istante t_1+s. Consideriamo ora $\gamma_{z_0}(t_1)$ come dato iniziale all'istante iniziale $t_0 = 0$; all'istante s la corrispondente soluzione massimale si trova nel punto $\gamma_{\gamma_{z_0}(t_1)}(s)$. Che relazione c'è fra questo punto e $\gamma_{z_0}(t_1+s)$?



Proposizione 1.2.4 *Sia $z_0 \in \Omega$, $t_1 \in I_{z_0}$ e $z_1 := \gamma_{z_0}(t_1)$. Allora $I_{z_1} = I_{z_0} - t_1$ e*

$$\gamma_{z_0}(t_1 + s) \;=\; \gamma_{z_1}(s) \tag{1.2.2}$$

per ogni s tale che $t_1 + s \in I_{z_0}$.

Dimostrazione. La soluzione γ_{z_0} soddisfa $\gamma_{z_0}(t_1) = z_1$ ed è dunque una soluzione, possibilmente non massimale, con dato iniziale z_1 all'istante iniziale t_1. Ne segue che $\mathbb{I}_{z_0} \subseteq I_{z_1,t_1}$ e quindi, per la Proposizione 1.2.3, $I_{z_1} \supseteq I_{z_0} - t_1$. Allora, per ogni $t \in I_{z_0}$ si ha

$$\gamma_{z_0}(t) \;=\; \gamma_{z_1,t_1}(t) \;=\; \gamma_{z_1}(t - t_1)$$

ove la seconda uguaglianza segue dalla Proposizione 1.2.3. Ponendo $t = t_1 + s$ si ottiene la (1.2.2). Da essa, con $s = -t_1$, segue $z_0 = \gamma_{z_0}(0) = \gamma_{z_1}(-t_1)$ e, ripetendo il ragionamento con z_0 e z_1 scambiati, si arriva a $I_{z_0} \supseteq I_{z_1} + t_1$. Dunque $I_{z_1} = I_{z_0} - t_1$. ■

La proprietà (1.2.2) avrà molte applicazioni. Più avanti la riformuleremo come 'proprietà gruppale del flusso'.

> **Osservazione:** La (1.2.2) fornisce un metodo, teorico e utile in certe dimostrazioni, per estendere una soluzione non massimale ad intervalli più ampi (chiamato, a volte, principio di prolungamento). Sia γ una soluzione con dato iniziale z_0 a $t = 0$ e definita per $t \in (-T_0, T_0)$ con qualche $T_0 > 0$. Consideriamo un istante $t_1 \in (0, T_0)$ e supponiamo di sapere che una soluzione η con dato iniziale $z_1 := \gamma(t_1)$ a $t = 0$ esista per $t \in (-T_1, T_1)$ con un $T_1 > T_0 - t_1$. La (1.2.2) assicura allora che, raccordando γ con la traslata di t_1 di η si ottiene una soluzione con dato iniziale z_0 a $t = 0$ definita nell'intervallo $(-T_0, t_1 + T_1)$, più ampio di $(-T_0, T_0)$. In linea di principio questo procedimento può essere iterato, nel futuro e nel passato, fino ad arrivare agli estremi dell'intervallo di esistenza massimale.

1.2.F Campi vettoriali completi. In generale, l'intervallo di esistenza di una soluzione massimale può non coincidere con tutto $\mathbb{R}$. Questo avviene se la

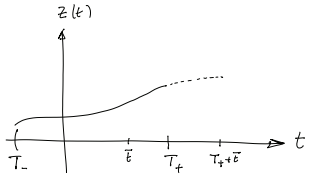
ESTRATTO

soluzione "scappa" in un tempo finito $T \in \mathbb{R}$, positivo o negativo, dal dominio Ω nel quale il campo vettoriale è definito e liscio. "Scappa in un tempo finito T" significa, precisamente, che per $t \to T$ (da sinistra o da destra) la soluzione lascia ogni compatto contenuto in Ω. Si ha infatti la seguente proposizione (che afferma la proprietà opposta):

Proposizione 1.2.5 [Intrappolamento nei compatti] *Sia $\gamma : (T_-, T_+) \to \Omega$, con $T_\pm \in \mathbb{R}_\pm \cup \{\pm\infty\}$, una curva integrale massimale di un campo vettoriale X in Ω e sia K un sottoinsieme compatto di Ω.*

- *Se $\gamma(t) \in K$ per tutti i t in un intorno sinistro di T_+ allora $T_+ = +\infty$.*
- *Se $\gamma(t) \in K$ per tutti i t in un intorno destro di T_- allora $T_- = -\infty$.*

Dimostrazione. Poiché K è compatto, gli intervalli di esistenza massimale delle soluzioni con dato iniziale in K hanno una durata minima positiva sia nel passato che nel futuro, diciamola $T > 0$ (si veda l'Osservazione (ii) della sezione 1.2.A). Supponiamo $\gamma(t) \in K$ per tutti i $t \in (T_0, T_+)$ con qualche $0 < T_0 < T_+$ ma che, per assurdo, $T_+ \in \mathbb{R}$. Consideriamo un istante $\overline{t} \in (T_+ - T, T_+) \cap (T_0, T_+)$. Per il "principio di prolungamento" (Osservazione della sezione 1.2.E) la soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ è definita in tutto l'intervallo $(\overline{t} - T, \overline{t} + T)$. Ma questo è impossibile perché $\overline{t} + T > T_+$ e (T_-, T_+) è l'intervallo di esistenza massimale. ■



Per equazioni differenziali definite su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, la 'fuga dai compatti', che porta ad un intervallo di esistenza massimale più piccolo di tutto $\mathbb{R}$, può avvenire in due modi:

- Una soluzione potrebbe tendere, per $t \to T \in \mathbb{R}$, alla frontiera di Ω (ove X potrebbe per esempio avere delle singolarità).
- Se Ω è illimitato, una soluzione potrebbe tendere, per $t \to T \in \mathbb{R}$, all'infinito, nel senso che $\lim_{t\to T} \|\gamma(t)\| = \infty$; questo può avvenire se il campo vettoriale cresce in modo sufficientemente rapido al crescere di $\|z\|$; si dice che "la soluzione va all'infinito in un tempo finito".

Per due semplici esempi si vedano gli esercizi.

Nonostante queste possibilità, il caso nel quale tutte le soluzioni esistono per tutti i tempi è importante:

Definizione 1.2.6 *Un campo vettoriale le cui curve integrali abbiano tutte intervallo di esistenza massimale uguale ad $\mathbb{R}$ è chiamato* completo.

Vi sono alcuni semplici criteri di completezza.

Per esempio, è completo ogni campo vettoriale X definito in tutto $\mathbb{R}^n$ e (globalmente) lipschitziano: esiste cioè una costante k tale che

$$\|X(z) - X(z')\| \le k\|z - z'\| \qquad \forall z, z' \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.2.3}$$

In particolare, dunque, sono completi i campi vettoriali lineari in $\mathbb{R}^n$ ($X(z) = Az$ con una matrice A).

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

Inoltre, ogni campo vettoriale a supporto compatto (cioè nullo all'esterno di un compatto $K \subset \Omega$) è completo: questo segue immediatamente dalla Proposizione 1.2.5 e dal fatto che, all'esterno di K, tutte le soluzioni sono (come è ovvio e comunque vedremo) costanti (equilibri).

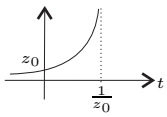
Per semplicità svilupperemo la teoria quasi solo per campi vettoriali completi. Questo non vuole dire, naturalmente, che tutti i campi vettoriali siano completi, né che quelli che non lo sono non siano importanti. Per esempio, il problema dei due corpi (due punti materiali che si attraggono gravitazionalmente) non è completo: se si lasciano andare i due corpi con velocità nulla essi arrivano a collidere in un tempo finito—dopo il quale, non ha più senso chiedersi come evolva il sistema. In effetti, incontreremo vari casi di equazioni differenziali che hanno delle soluzioni che non sono definite per tutti i tempi. Tuttavia, la trattazione di queste soluzioni va fatta caso per caso, con tecniche ad hoc. La teoria dei Sistemi Dinamici si focalizza sui campi vettoriali completi—dopo tutto, c'è molto da imparare già su questo caso.

> **Osservazione:** La Proposizione 1.2.5 può essere utilizzata per sincerarsi che certe soluzioni di una data equazione differenziale siano definite per tutti i tempi, positivi e/o negativi. Avremo modo di usare questo criterio.

Esercizi 1.2.1 *(i) Si consideri l'equazione $\dot z = -1/z$, $x \in \mathbb{R}_+$, e si verifichi che, per ogni $z_0 \in \mathbb{R}_+$,*

$$\gamma_{z_0}(t) = \sqrt{z_0^2 - 2t}$$

è soluzione con intervallo di esistenza $(-\infty, T_+ = z_0^2/2)$, e che $\lim_{t\to T_+} \gamma_{z_0}(t) = 0 \in \partial\Omega$.



(ii) Si consideri l'equazione $\dot z = z^2$, $z \in \mathbb{R}$, e si verifichi che, per ogni z_0,

$$\gamma_{z_0}(t) \;=\; \frac{z_0}{1 - t z_0}$$

è soluzione con intervallo di esistenza $(-\infty, T_+ = \frac{1}{z_0}$, e che $\lim_{t\to T_+} \gamma_{z_0}(t) = +\infty$ con $T_+ = \frac{1}{z_0}$. Cosa succede se $z_0 < 0$? [R]

(iii) Mostrare che ogni campo vettoriale globalmente lipschitziano è a crescita sublineare.

(iv) Determinare una costante di Lipschitz per il campo vettoriale $X(z) = Az$. [Suggerimento: la norma operatoriale di una matrice A è $\|A\|^{\rm op} = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$].

1.2.G Soluzione delle equazioni in dimensione 1. Come già detto, vi sono ben poche e ben speciali classi di equazioni differenziali che si riescono ad integrare esplicitamente. Una di queste è costituita dalle equazioni differenziali in dimensione 1, che sono del tipo

$$\dot z = X(z)\,, \qquad z \in L \subseteq \mathbb{R}\,, \tag{1.2.4}$$

ove L è o $\mathbb{R}$ o un suo intervallo aperto, limitato o illimitato, e $X : L \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia. Ricordiamo qui brevemente il metodo di integrazione di

ESTRATTO

queste equazioni. Esso è un caso particolare del cosiddetto metodo di integrazione per separazione delle variabili che si applica ad equazioni non autonome unidimensionali del tipo $\dot{z} = g(t)X(z)$, dette appunto equazioni a variabili separabili.

Proposizione 1.2.7 *Sia $\gamma : I \to L$ la soluzione massimale di (1.2.4) con dato iniziale $z_0 \in L$ a $t = t_0$.*

- *Se $X(z_0) = 0$ allora γ è la funzione costante $= z_0$; in questo caso $I = \mathbb{R}$.*
- *Se $X(z_0) \neq 0$ allora γ è strettamente monotona, ha per immagine $\gamma(I) \subseteq L$ un intervallo aperto (limitato o illimitato) che non contiene zeri di X, ed è l'inversa della funzione $\tilde{t} : \gamma(I) \to I$ definita da*

$$\tilde{t}(z) \;=\; t_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{X(s)}\,, \qquad z \in \gamma(I)\,. \tag{1.2.5}$$

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia: la funzione costante $\gamma : \mathbb{R} \to \{z_0\}$ soddisfa la condizione iniziale, è soluzione dell'equazione perché ha derivata nulla e $X \circ \gamma = 0$, ed è massimale perché è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Sia ora $X(z_0) \neq 0$. L'immagine $\gamma(I)$ dell'intervallo di esistenza massimale è un intervallo (perché immagine continua di un intervallo). Per l'unicità, e per la prima affermazione, γ non può assumere alcun valore nel quale X si annulli. Dunque X e quindi γ' non si annullano in $\gamma(I)$. Di conseguenza γ è una funzione reale differenziabile definita su un intervallo e con derivata ovunque o positiva o negativa, e come tale è un diffeomorfismo; in particolare, $\gamma(I)$ è aperto. Inoltre, l'inversa $\tilde{t} : \gamma(I) \to I$ di γ ha derivata

$$\tilde{t}'(z) \;=\; \frac{1}{\gamma'(\tilde{t}(z))} \;=\; \frac{1}{X(\gamma(\tilde{t}(z)))} \;=\; \frac{1}{X(z)}\,.$$

Da qui, integrando fra z_0 e z, e tenendo conto del fatto che $\tilde{t}(z_0) = t_0$, segue la (1.2.5). ■

Vi è un ben noto procedimento euristico per ricordare la (1.2.5): si riscrive (formalmente!) l'equazione nella forma $dt = \frac{dz}{X(z)}$ e si integra.

La (1.2.5) mostra che, nel caso unidimensionale, la determinazione delle soluzioni si riduce al calcolo di un integrale e all'inversione della funzione così determinata. In pratica, in questo modo si ottiene un'espressione esplicita per la soluzione, in termini di funzioni note, solo se si riescono ad eseguire esplicitamente entrambe le operazioni.

Esercizi 1.2.2 *(i) Determinare la soluzione con dato iniziale z_0 all'istante iniziale $t_0 = 0$ delle seguenti equazioni, tutte in $\mathbb{R}$: (a) $\dot{z} = z^2$, $z_0 = 1$; (b) $\dot{z} = -z^3$, $z_0 = 1$; (c) $\dot{z} = z + 1$, $z_0 = 1$; (d) $\dot{z} = z + 1$, $z_0 = -1$.* [R]

ESERCIZIO

1.2.H Esempio: l'equazione logistica. Storicamente, il primo modello demografico è stato il modello Malthusiano (1798). Esso descrive una popolazione nella quale, come risultato di nascite e morti, il numero degli individui cresce uniformemente, con velocità proporzionale al numero degli individui stessi. Dinamiche di questo tipo sono frequenti, per esempio, in colonie isolate di batteri od altri organismi semplici allo stato iniziale del loro sviluppo, nel quale non vi sono limiti alla riproduzione. Esse si incontrano anche in specie più evolute, anche quella umana, ma sempre in condizioni nelle quali vi sia disponibilità essenzialmente illimitata di risorse.

Se la popolazione non è troppo piccola, ed i tempi sui quali la si osserva sono lunghi rispetto alla durata di una generazione, si può ragionevolmente approssimare il numero di individui con una variabile reale $n \geq 0$ ed assumere che le variazioni di popolazione avvengano in modo continuo (anzi, differenziabile) nel tempo $t \in \mathbb{R}$. Indichiamo allora con $z(t)$ la popolazione all'istante t. Il modello Malthusiano assume che la velocità $z'(t)$ di crescita della popolazione sia ad ogni istante proporzionale alla popolazione stessa, e conduce all'equazione

$$\dot{z} \;=\; kz \tag{1.2.6}$$

ove k è una costante positiva. La soluzione di questa equazione con dato iniziale n_0 all'istante $t = 0$ è

$$z(t) = e^{kt} z_0$$

e descrive una crescita esponenziale della popolazione.

Il modello Malthusiano descrive bene le fasi iniziali di crescita di una popolazione con ciclo riproduttivo semplice. Tuttavia, se la popolazione vive in un ambiente limitato, quando essa diventa troppo numerosa si instaurano dei meccanismi (limitatezza delle risorse, competizione, malattie, ...) che possono progressivamente ridurre il tasso di crescita, facendolo perfino diventare negativo se la popolazione supera una certa soglia critica.

Il più semplice modello che includa delle correzioni di questo tipo, che sono chiamate "logistiche", si ottiene pensando che la velocità di riproduzione diminuisca al crescere della popolazione, per esempio proporzionalmente al quadrato della popolazione. Si ottiene così l'equazione differenziale

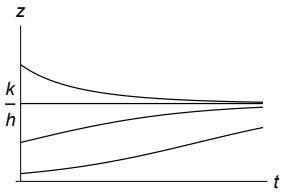
$$\dot{z} \;=\; kz - hz^2 \tag{1.2.7}$$

ove k, h sono costanti positive. Questa equazione differenziale si chiama *equazione logistica* ed è stata introdotta in ambito demografico verso la metà del XIX secolo (da P. F. Verhulst). Nel modello logistico la velocità di crescita è approssimativamente lineare se la popolazione è sufficientemente piccola ($hz \ll k$), resta positiva fino a che la popolazione raggiunge il valore limite $z = k/h$ e successivamente diviene negativa. Ci si domanda quale sia la "dinamica" risultante: la popolazione crescerà illimitatamente, si estinguerà, si stabilizzerà ad un qualche valore, continuerà a variare? Ci interessa, cioè, il

ESERCIZIO

comportamento asintotico delle soluzioni. Si può rispondere a questa domanda semplicemente integrando l'equazione: la soluzione con dato iniziale $z_0 \in \mathbb{R}$ all'istante $t = 0$ è

$$z(t) \;=\; \frac{kz_0}{hz_0 + (k - hz_0)e^{-kt}} \,. \tag{1.2.8}$$



Ovviamente ci interessano solo soluzioni con $z_0 \geq 0$. Sulla (1.2.8) si riconosce subito che

- Se $z_0 = 0$ oppure $z_0 = \frac{k}{h}$ allora $z(t) = z_0$ per tutti i t.
- Per ogni altro $z_0 > 0$, la soluzione soddisfa $\lim_{t\to+\infty} z(t) = \frac{k}{h}$.

Dunque, vi sono due soluzioni di equilibrio, nelle quali la popolazione resta costante; di esse, la $z(t) = 0$ corrisponde all'assenza della popolazione e non ha interesse. Il fatto interessante è che *tutte* le soluzioni non di equilibrio, con qualunque dato iniziale $z_0 > 0$, tendano asintoticamente all'altra soluzione di equilibrio $z(t) = \frac{k}{h}$, e senza oscillazioni. Dunque, la dinamica del modello logistico è semplicissima: la popolazione tende a stabilizzarsi (e in modo monotono) verso un valore costante.

Si dovrebbe osservare che siamo riusciti ad arrivare a questa conclusione integrando l'equazione, cosa che è stata possibile grazie alla sua semplicità. È chiaro che non vi è speranza di procedere nello stesso modo nel caso di equazioni differenziali non così semplici. Inoltre è abbastanza naturale (ed importante) domandarsi se la conclusione raggiunta dipenda dal particolare modello considerato. Non vi è infatti alcuna ragione per ritenere che un modello che tenga conto di effetti di saturazione delle risorse debba necessariamente essere dato da una correzione esattamente quadratica alla crescita malthusiana. Si potrebbe pensare che la realtà sia descritta (almeno con una certa approssimazione, ovviamente) da un'equazione differenziale del tipo

$$\dot{z} \;=\; f(z)$$

con una funzione $z \mapsto f(z)$ un po' diversa da $kz - hz^2$, per z non troppo grande. Questi altri, poco diversi, modelli porterebbero a comportamenti asintotici dello stesso tipo—stabilizzazione monotona verso un valore di equilibrio, magari anche solo per un intervallo ragionevole di condizioni iniziali—oppure anche completamente diversi?

Non vi è modo di rispondere a questa domanda, che dal punto di vista modellistico è basilare, se l'unico metodo a nostra disposizione è quello di risolvere esplicitamente l'equazione. Abbiamo bisogno di poter ottenere queste informazioni direttamente dall'analisi della funzione f, *senza* passare per l'integrazione dell'equazione. Questo è esattamente il punto di vista dei Sistemi Dinamici.

Esercizi 1.2.3 *(i) Verificare e/o ottenere la (1.2.8).* [R]

(ii) Le soluzioni dell'equazione logistica (1.2.7) sono definite per tutti i tempi (positivi e/o negativi)? Si consideri anche il caso di $z_0 < 0$. [R]

ESTRATTO

1.3 Analisi nello spazio delle fasi

1.3.A Il flusso di un campo vettoriale. Il teorema di esistenza ed unicità assicura che, data un'equazione differenziale $\dot{z} = X(z)$, $z \in \Omega$, esiste una mappa

$$\mathbb{R} \times \Omega \supseteq D \ni (t, z_0) \mapsto \gamma_{z_0}(t) \in \Omega \tag{1.3.1}$$

da un aperto D in $\mathbb{R} \times \Omega$ ad Ω che a ogni dato iniziale $z_0 \in \Omega$ e istante $t \in I_{z_0}$ associa il valore al tempo t della soluzione massimale con dato iniziale z_0 a $t = 0$. Pensare a questa mappa come funzione anche del dato iniziale sottolinea l'interesse a comprendere le proprietà di tutte le soluzioni, ovvero la "dinamica" descritta dall'equazione differenziale.

Se il campo vettoriale è completo, la (1.3.1) è definita per tutti i $t \in \mathbb{R}$ e $z \in \Omega$, ed è dunque una mappa

$$\Phi^X : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$$

chiamata *flusso* del campo vettoriale X e dell'associata equazione differenziale. Studieremo le proprietà del flusso nel prossimo capitolo. Per ora, utilizzeremo occasionalmente, e in modo un po' informale, questo termine.

Se X non è completo allora la mappa (1.3.1) è definita in un aperto $\subset \mathbb{R} \times \Omega$ ed è chiamata *flusso locale*.

Pur esistendo, il flusso o flusso locale (1.3.1) può essere impossibile da determinare o, anche se determinabile, molto complicato (per esempio, non esprimibile in termini di funzioni elementari, né ottenibile con operazioni "semplici" quali calcolo di integrali, inversioni di funzioni etc.). Inoltre, al di là delle difficoltà pratiche, un oggetto troppo complicato può risultare scarsamente utile, perché può essere difficile o impossibile trarne informazioni utili.

Per questi motivi, come già accennato, nello studio delle equazioni differenziali si sposta l'enfasi dal cercare di determinare l'espressione analitica della (1.3.1) al cercare di studiarne delle proprietà più accessibili della sua espressione analitica, ma comunque significative—e anzi, forse ancor più significative al fine di una comprensione globale del comportamento delle soluzioni).

1.3.B Spazio delle fasi ed orbite. Per cominciare, si sposta l'enfasi dalle curve integrali, o soluzioni, che sono curve parametrizzate, alle *orbite*:

Definizione 1.3.1 *Sia X un campo vettoriale definito in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $z \in \Omega$. L'*orbita *del campo vettoriale X (o della corrispondente equazione differenziale) passante per il punto z è l'immagine*

$$\mathcal{O}_z^X := \{\gamma_z(t) \,:\, t \in I_z\}$$

della soluzione massimale γ_z, orientata nel verso dei tempi crescenti.

ESTRATTO

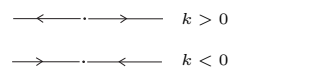
L'insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nel quale è definita l'equazione, e al quale appartengono le orbite, viene chiamato *spazio delle fasi* dell'equazione. Dalla Proposizione 1.2.3 segue che l'orbita di un punto $z \in \Omega$ è l'immagine non solo di γ_z, ma di tutte le soluzioni massimali γ_{z,t_0} con qualunque $t_0 \in \mathbb{R}$; equivalentemente—ed ovviamente—due punti della stessa orbita hanno la stessa orbita.

Proposizione 1.3.2 *Ogni punto dello spazio delle fasi appartiene ad una ed una sola orbita.*

Dimostrazione. Che per ogni punto $z \in \Omega$ passi un'orbita è ovvio: γ_z contiene z. Se due orbite contengono entrambe un punto z allora ciascuna di esse coincide con l'orbita di z e quindi sono la stessa orbita. ■

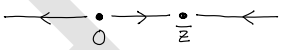
L'insieme di tutte le orbite costituisce il *ritratto in fase*, o *ritratto di fase* (traduzione dell'inglese *phase portrait*). Ovviamente è possibile disegnare il ritratto in fase solo in sistemi di dimensione bassa, $n \leq 3$; in questi casi, però, la sua conoscenza fornisce un'informazione globale sulla dinamica descritta dall'equazione differenziale.

Esempi: (i) Se $k \neq 0$, le soluzioni dell'equazione $\dot{z} = kz$ in $\mathbb{R}$ sono date da $\gamma_{z_0}(t) = e^{kt} z_0$. Dunque ci sono tre orbite distinte: il semiasse positivo, il semiasse negativo, ed un'orbita costituita dal solo punto 0. L'orientazione è ovvia: al crescere di t, ogni soluzione con dato iniziale $z_0 > 0$ cresce se $k > 0$ e decresce se $k < 0$; il contrario, se $z_0 < 0$.



Ritratto in fase di $\dot{z} = kz$, $z \in \mathbb{R}$

(ii) Analizzando la (1.2.8) (si veda l'esercizio 1.2.3.ii) segue che l'equazione logistica $\dot{z} = kz - hz^2$, con spazio delle fasi tutto $\mathbb{R}$, ha cinque orbite: i due punti 0 e $\overline{z} := k/h$ e i tre intervalli da essi delimitati, orientati come mostrato in figura. Si noti come un semplice sguardo al ritratto in fase fornisca il comportamento asintotico delle soluzioni.



Ritratto in fase dell'equazione logistica

(iii) L'equazione differenziale $\dot{z} = z$ in $\mathbb{R}^2$, ovvero il sistema

$$\dot{z}_1 \;=\; z_1\,, \qquad \dot{z}_2 \;=\; z_2\,,$$

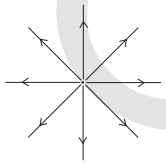
ha le soluzioni

$$z(t; z^0) = e^t z^0$$

di componenti, se $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$,

$$z_1(t; z^0) = e^t z_1^0\,, \qquad z_2(t; z^0) = e^t z_2^0\,.$$

Le orbite sono allora le semirette (aperte) uscenti dall'origine e l'origine.


Ritratto in fase di $\dot{z} = z$, $z \in \mathbb{R}^2$

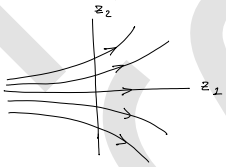
(iii) Consideriamo il sistema differenziale in $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$

$$\dot{x} \;=\; 1\,, \qquad \dot{y} \;=\; y\,.$$

Le due equazioni sono separate ed integrandole si trova che la soluzione con dato iniziale (x_0, y_0) è

$$x(t) = x_0 + t\,, \qquad y(t) = e^t y_0\,.$$

FOTOCOPIATO



Si può utilizzare la prima componente della soluzione per eliminare il tempo $(t = x(t) - x_0)$ ed ottenere così l'equazione cartesiana dell'orbita: $y = e^{x-x_0}y_0 = (y_0e^{-x_0})e^x$. Dunque le orbite sono i grafici delle funzioni esponenziali $x \mapsto ce^x$ con $c \in \mathbb{R}$, tutte percorse da sinistra verso destra (perché $\dot{x} = 1 > 0$).

Osservazioni: (i) In questi esempi si sono determinate le orbite, a fini esemplificativi, a partire dalle soluzioni; in generale questo non è ovviamente possibile.

(ii) Anche se noi ne faremo un uso saltuario, si definiscono anche la semiorbita positiva $\{z(t; z_0) : t \in I_{z_0} \cap \mathbb{R}_+\}$ e la semiorbita negativa $\{z(t; z_0) : t \in I_{z_0} \cap \mathbb{R}_-\}$ di un punto z_0.

Esercizi 1.3.1 *(i) Per le seguenti equazioni determinare l'espressione della soluzione in funzione dei dati iniziali ed utilizzarla per tracciare il ritratto in fase:*
(a) $\dot{z} = -2z$, $z \in \mathbb{R}^2$.
(b) $\dot{z}_1 = z_1$, $\dot{z}_2 = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$.
(c) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 1$ *in* $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$. [R]

(ii) Quali delle seguenti curve non possono essere orbite di un'equazione differenziale?



(iii) Le orbite sono connesse? Perché? [R]

1.3.C Equilibri ed attrattività. Nello studio di un'equazione differenziale spesso giocano un ruolo basilare alcune classi di soluzioni particolari, in particolare gli equilibri.

Definizione 1.3.3 *Una* soluzione di equilibrio *di* $\dot{z} = X(z)$ *è una sua soluzione costante:*

$$\gamma(t) \;=\; \overline{z} \qquad \forall t\,.$$

In tal caso, il punto $\overline{z}$ *è chiamato* punto di equilibrio *o semplicemente* equilibrio *dell'equazione.*

Ovviamente l'orbita di una soluzione di equilibrio è costituita dal solo punto di equilibrio.

Gli equilibri sono spesso il punto di partenza dello studio di un'equazione differenziale perché, anche nel caso di equazioni per altri aspetti molto difficili da studiare, sono particolarmente facili da determinare (e, come si vedrà, la conoscenza di certe loro proprietà può fornire informazioni sul flusso):

Proposizione 1.3.4 *Un punto* $\overline{z}$ *è un equilibrio di* $\dot{z} = X(z)$ *se e solo se* $X(\overline{z}) = 0$.

ESTRATTO

Dimostrazione. Se $\overline{z}$ è un equilibrio allora $\gamma_{\overline{z}}(t) = \overline{z}$ per tutti i t e dunque $0 = \gamma'_{\overline{z}}(t) = X(\gamma_{\overline{z}}(t)) = X(\overline{z})$. Viceversa, se $X(\overline{z}) = 0$, allora la curva costante $\mathbb{R} \ni t \mapsto \overline{z}$ risolve $\dot{z} = X(z)$ e ha dato iniziale $\overline{z}$; per l'unicità, essa è la soluzione con dato iniziale $\overline{z}$. ■

Da un punto di vista applicativo, un equilibrio rappresenta uno stato stazionario del sistema. Può anche avvenire che tutte le soluzioni, o almeno quelle che partono non troppo lontano da esso, tendano ad esso per $t \to +\infty$, e in tal caso l'equilibrio costituisce uno stato asintotico al quale tende il sistema, almeno quando parte da un certo insieme di dati iniziali. Vi sono diverse formalizzazioni di questa idea di 'stabilità'. La più semplice è quella di 'attrattività':

Definizione 1.3.5 *Sia $\overline{z}$ un equilibrio di $\dot{z} = X(z)$.*

(i) $\overline{z}$ *è* attrattivo *se esiste un intorno V di $\overline{z}$ tale che ogni soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ con dato iniziale in V esiste per tutti i tempi positivi e soddisfa* $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = \overline{z}$.

(ii) $\overline{z}$ *è* repulsivo *se è 'attrattivo nel passato': esiste un intorno V di $\overline{z}$ tale che ogni soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ con dato iniziale in V esiste per tutti i tempi negativi e soddisfa* $\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = \overline{z}$.

Esempi: (i) Nell'equazione $\dot{z} = kz$, $z \in \mathbb{R}$, l'equilibrio $z = 0$ è attrattivo se $k < 0$, repulsivo se $k > 0$. Se $k = 0$, esso non è né attrattivo né repulsivo.

(ii) Nell'equazione $\dot{z} = z^2$, tutte le soluzioni con dato iniziale $z_0 < 0$ tendono all'equilibrio $z = 0$ per $t \to +\infty$ e tutte quelle con $z_0 > 0$ vi tendono per $t \to -\infty$; l'equilibrio 0 non è dunque né attrattivo né repulsivo.

(iii) L'equazione logistica $\dot{z} = kz - hz^2$, $z \in \mathbb{R}$, ha i due equilibri $z = 0$ e $z = k/h$. Il primo è repulsivo, il secondo attrattivo.

In realtà l'attrattività non esaurisce i possibili comportamenti 'stabili': potrebbe infatti avvenire che le soluzioni che partono sufficientemente vicine ad un equilibrio restino vicine ad esso pur senza tendere ad esso; questo comportamento è alla base della nozione di *stabilità* propriamente detta, che esamineremo nel capitolo 4; fino ad allora si potrà farvi riferimento in modo intuitivo.

Osserviamo espressamente che, come del resto abbiamo già visto in esempi, soluzioni non di equilibrio possono tendere asintoticamente ad equilibri. A tale proposito, osserviamo che se una soluzione ha limite, e il punto limite è interno allo spazio delle fasi, allora necessariamente esso è un equilibrio:

Lemma 1.3.6 *Sia $\gamma : (T_-, T_+) \to \Omega$ una curva integrale massimale di un campo vettoriale su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$.*

i. Se $\lim_{t\to T_+^-} \gamma(t) = \overline{z} \in \Omega$ allora $T_+ = +\infty$ e $\overline{z}$ è un equilibrio.

ii. Se $\lim_{t\to T_-^+} \gamma(t) = \overline{z} \in \Omega$ allora $T_- = -\infty$ e $\overline{z}$ è un equilibrio.

ESTRATTO

Dimostrazione. Se, per $t \to T_+$, $\gamma(t) \to \overline{z}$ allora $\gamma(t)$ entra definitivamente in ogni intorno di $\overline{z}$, e quindi in un compatto che contiene $\overline{z}$, e pertanto esiste per tutti i tempi positivi.

Assumiamo, per assurdo, che $X(\overline{z}) \neq 0$. Vi è allora almeno una componente di questo vettore, diciamo $X_j(\overline{z})$, che è diversa da zero. Allora vi è tutto un intorno V di $\overline{z}$ nel quale $|X_j(z)| \geq K$ per qualche $K > 0$. Possiamo ovviamente prendere V limitato. Poiché $\gamma(t) \to \overline{z}$ esiste allora un $T > 0$ tale che $\gamma(t)$ appartiene a V per tutti i $t > T$. Di conseguenza

$$\big|\gamma_j(t) - \gamma_j(T)\big| \;=\; \Big|\int_T^t X_j(\gamma(s))ds\Big| \;=\; \int_T^t \big|X_j(\gamma(s))\big|ds \;\geq\; K(t-T)$$

ove la seconda uguaglianza vale perché $X_j(\gamma(s))$ non cambia segno per $s \in (T,t)$. Ma questo è impossibile perché, essendo V limitato, $\big|\gamma_j(t)-\gamma_j(T)\big|$ deve restare limitata, mentre $K(t-T)$ tende all'infinito per $t \to +\infty$. Questo prova i. La dimostrazione di ii. è analoga. ■

Esercizi 1.3.2 *(i) Quali sono gli equilibri dell'equazione lineare $\dot z = Az$, $z \in \mathbb{R}^n$, ove A è una matrice $n \times n$? E se A è invertibile? E se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z$, $z \in \mathbb{R}^2$?* [R]

(ii) Determinare tutti gli equilibri delle seguenti equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ o $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$:
(a) $\dot x = x + y$, $\dot y = x^2 - 1$.
(b) $\dot x = yz - y$, $\dot y = x - xy$, $\dot z = xz$
(c) $\dot x = yz - y$, $\dot y = x - xz$, $\dot z = x + z$. [R]

(iii) Sia a un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$ e si denoti con $\times$ il prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$. Quali sono gli equilibri dell'equazione $\dot z = a \times z$, $z \in \mathbb{R}^3$? [R]

(iv) Esaminando i ritratti in fase delle equazioni dell'esercizio 1.3.1.i, indicare quali degli equilibri di tali equazioni sono attrattivi. Ve ne sono anche di repulsivi? [R]

(v)* Nella definizione di attrattività cambierebbe qualcosa se, invece di richiedere che le soluzioni con dato iniziale in V esistano per tutti i tempi positivi si richiedesse che esse tendano a $\overline{z}$ per t che tende all'estremo superiore del loro insieme di definizione massimale? [R]

> **Osservazione:** Gli equilibri sono chiamati anche *punti fissi* del flusso e *punti singolari* del campo vettoriale (anche se quel che è ivi singolare non è il campo vettoriale, che è anzi perfettamente definito e regolare, ma le orbite, che si riducono a punti). Gli equilibri attrattivi sono a volte chiamati *pozzi* e quelli repulsivi *sorgenti*.

1.3.D Soluzioni periodiche. Una soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ di un'equazione differenziale è *periodica di periodo $T > 0$* se risulta

$$\gamma(t+T) \;=\; \gamma(t) \qquad \text{per tutti i} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ovviamente il periodo di una soluzione periodica non è unico (tutti i multipli interi di un periodo sono periodi). Se si esclude il caso banale degli equilibri,

ESTRATTO

che secondo questa definizione sono periodici con ogni periodo, una soluzione periodica ha sempre un unico periodo minimo. Di solito, quando si parla di periodo si intende proprio il periodo minimo.

L'orbita di una soluzione periodica con periodo minimo positivo è una curva chiusa (cioè diffeomorfa ad un cerchio). Viceversa, se un'orbita è una curva chiusa, allora essa è l'orbita di una soluzione periodica (questo è *quasi* ovvio: si vedano gli esercizi). Per questo, un'orbita che è una curva chiusa viene anche chiamata *orbita periodica*.

Le orbite periodiche di un'equazione differenziale possono avere (grande) importanza sia applicativa che teorica. Da un lato, esse descrivono stati *oscillatori* del sistema; se tutte le soluzioni che partono in un certo intorno di un'orbita periodica tendono asintoticamente ad essa, allora essa descrive uno stato asintotico periodico: il sistema non tende ad uno stato stazionario, ma ad uno stato oscillante (tali orbite periodiche attrattive si chiamano *cicli limite*).

Inoltre, nella comprensione della dinamica di una ODE, particolarmente in dimensione ≥ 3, esse rivestono un ruolo teorico analogo a quello degli equilibri. Tuttavia, la determinazione delle soluzioni periodiche e lo studio delle loro proprietà di stabilità, attrattività etc. sono più complessi che per gli equilibri, e non li affronteremo in questo corso introduttivo.

Esercizi 1.3.3 *(i) È possibile che un'equazione differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}$ abbia soluzioni periodiche?* [R]

(ii) Come osservato, una soluzione di equilibrio è periodica con ogni periodo $T > 0$. Mostrare che vale anche il viceversa: una soluzione periodica con ogni periodo positivo è costante.

(iii) Nella definizione di soluzione periodica abbiamo richiesto che sia $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ per ogni t. Questo requisito è inutilmente forte: mostrare che se esistono $T > 0$ ed un $t \in \mathbb{R}$ tali che $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ allora la soluzione è periodica con periodo T. [S]

(iv) Dimostrare che se un'orbita è diffeomorfa ad un cerchio, allora ogni soluzione su di essa è periodica.* [S]

1.3.E Ritratti in fase in dimensione uno. La determinazione del ritratto in fase di un'equazione differenziale è estremamente semplice nel caso speciale in cui lo spazio delle fasi ha dimensione uno: come ora mostriamo, le orbite sono delimitate dagli equilibri e/o dalla frontiera dello spazio delle fasi e tracciare il ritratto in fase si riduce, in pratica, alla determinazione degli zeri e del segno del campo vettoriale.

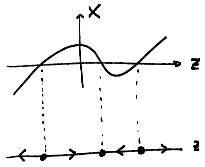
Nel caso unidimensionale, lo spazio delle fasi è un intervallo $L \subset \mathbb{R}$, limitato o illimitato, ed il campo vettoriale è una funzione $X : L \to \mathbb{R}$. Scriviamo $L = (z_-, z_+)$ con $z_\pm$ reali oppure $= \pm\infty$. Per semplicità supponiamo che X sia completo (se no vi sono minimi cambiamenti: si veda l'osservazione più sotto).

- Gli equilibri sono gli zeri di X.
- Ogni soluzione massimale $\gamma(t)$ con dato iniziale nell'intervallo $\tilde{L}$ fra due zeri consecutivi di X è intrappolata in esso, esiste per tutti i $t \in \mathbb{R}$ (la chiusura di $\tilde{L}$ è compatta) ed è strettamente monotona (perché X ha segno

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

costante in $\tilde{L}$). Di conseguenza ha limiti per $t \to \pm\infty$ e, siccome i limiti sono equilibri, essi sono necessariamente gli estremi di $\tilde{L}$. Pertanto $\tilde{L}$ è un'orbita, percorsa nel verso determinato dal segno di X.

- In modo analogo, gli intervalli fra z_- ed il minor zero di X e fra il maggior zero di X e z_+, orientati secondo il segno di X, sono orbite.
- In assenza di equilibri vi è un'unica orbita, tutto L, orientato secondo il segno di X.



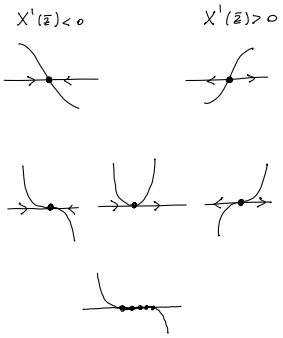
Dunque, quando $n = 1$, per costruire il ritratto in fase è sufficiente posizionare i punti di equilibrio ed indicare il giusto verso di percorrenza sugli intervalli da essi delimitati. Il confronto con il procedimento di determinazione delle soluzioni (sezione 1.2.G) dovrebbe rendere chiara l'utilità dell'approccio qualitativo anche in un caso, come questo, così semplice che la determinazione analitica delle soluzioni risulta possibile.

Esercizi 1.3.4 *(i) Tracciare i ritratti in fase delle seguenti equazioni differenziali sulla retta reale: (a)* $\dot{z} = z(1-z)-1$*; (b)* $\dot{z} = z(1-z)-\frac{1}{4}$*; (c)* $\dot{z} = z^3 - z^2$*; (d)* $\dot{z} = z^3 + z^2$*; (e)* $\dot{z} = \sin z$*.*

(ii)⋆ È possibile che una soluzione dell'equazione $\dot{z} = X(z)$*,* $z \in \mathbb{R}$*, abbia un comportamento oscillatorio?* [R]

Osservazioni: (i) Se X non è completo, tutte le soluzioni limitate da due equilibri esistono comunque per tutti i tempi. Invece, le soluzioni che tendono ai limiti $z_\pm$ di L potrebbero tendervi in tempo finito, ma questo non ha effetti sul ritratto in fase perché le orbite restano le stesse. Un esempio di questa situazione è stato incontrato nel caso dell'equazione logistica.

(ii) In generale, stabilire se un equilibrio di un'equazione differenziale sia attrattivo o meno può essere difficile. L'analisi precedente mostra però che, nel caso unidimensionale, vi è un semplicissimo *criterio* (solo sufficiente) di attrattività e repulsività:



Proposizione 1.3.7 *Sia* $\overline{z}$ *un equilibrio di* $\dot{z} = X(z)$*,* $z \in L \subseteq \mathbb{R}$*.*

- *Se* $X'(\overline{z}) < 0$ *allora* $\overline{z}$ *è attrattivo.*
- *Se* $X'(\overline{z}) > 0$ *allora* $\overline{z}$ *è repulsivo.*

Dimostrazione. Basta guardare la struttura locale del ritratto in fase intorno all'equilibrio. ■

Si noti se la derivata prima del campo vettoriale si annulla nell'equilibrio allora esso potrebbe essere attrattivo, repulsivo o né attrattivo né repulsivo. La Proposizione 1.3.7 può a buona ragione apparire scarsamente utile, perché non aggiunge davvero quasi nulla all'informazione che si ottiene semplicemente guardando il ritratto in fase. Il motivo per il quale la abbiamo enunciata è che essa servirà da prototipo per lo studio, più complesso, dell'attrattività in dimensione $n > 1$.

1.3.F Esempio: effetto Allee in ecologia. L'ipotesi di base nella derivazione dell'equazione logistica è che, mentre a basse densità di popolazione il

ESTRATTO

tasso di crescita è Malthusiano, esso rallenti quando la popolazione cresce, sino a diventare negativo.

Tuttavia può avvenire che il tasso di crescita si riduca e divenga negativo anche se la popolazione diviene troppo esigua. Questo è particolarmente vero in popolazioni con una struttura sociale complessa, come mammiferi che vivono in gruppi organizzati: fra i possibili motivi vi sono le ridotte capacità di difesa dai predatori, di predazione e di allevamento della prole quando queste attività richiedano azioni cooperative fra gli individui adulti. Inoltre, in popolazioni che vivono disperse, la riduzione della popolazione può portare ad una ridotta probabilità di incontro fra individui con conseguente riduzione delle occasioni riproduttive. Questo tipo di meccanismi è chiamato 'effetto Allee', dal nome del naturalista americano che, verso il 1930, ne identificò l'importanza ecologica.

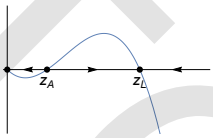
Ci chiediamo quali conseguenze possa avere questo effetto, se presente, in una popolazione soggetta ad una dinamica logistica: cambierà il comportamento asintotico? Ed in che modo? Ci sarà ancora un equilibrio, magari inferiore a quello logistico, al quale la popolazione tende?

Per rispondere facciamo un semplice modello. Partiamo dall'equazione logistica, che possiamo scrivere

$$\dot{z} \;=\; kz\Big(1-\frac{z}{z_L}\Big)$$

ove k è il tasso di riproduzione malthusiano della popolazione e z_L è lo stato stazionario al quale la popolazione tende ($=\frac{k}{h}$ nella (1.2.7)). Modifichiamo ora il tasso di riproduzione, assumendo che esso divenga negativo quando z scende sotto una certa soglia, che assumiamo minore dell'equilibrio logistico z_L. Per esempio, se prendiamo $(\frac{z}{z_A}-1)k$ al posto di k, con qualche $0<z_A<z_L$, l'equazione diviene

$$\dot{z} = kz\Big(\frac{z}{z_A}-1\Big)\Big(1-\frac{z}{z_L}\Big)\,. \tag{1.3.2}$$



Il ritratto in fase di questa equazione è mostrato affianco, insieme al grafico del campo vettoriale. Vi sono ora tre equilibri (0, z_A e z_L) e si vede che, se la popolazione è al di sopra del valore di soglia z_A, essa tende all'equilibrio logistico z_L. Se però essa è al di sotto di tale soglia, non riesce a recuperare e si estingue.

Osservazioni: (i) Questo semplice modello mostra che, soprattutto in ecosistemi molto impoveriti, si debba prestare estrema attenzione allo sfruttamento delle risorse naturali: *se* una popolazione è soggetta ad effetto Allee ed è vicina alla soglia n_A (cose che possono per altro essere molto difficili da sapere a priori) anche una sua diminuzione relativamente modesta può portarla sotto la soglia e causarne l'estinzione.

(ii) La valenza modellistica di modelli quali quello considerato qui deve essere compresa bene. Deve essere del tutto chiaro che non si tratta di un modello realistico che possa essere applicato per descrivere le variazioni temporali di

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

una data popolazione. Tuttavia, semplici modelli come la (1.3.2) (ed altri che incontreremo nel seguito, quali quello di Lotka-Volterra o, in altro ambito, il modello SIR) hanno un valore insostituibile: identificano, per così dire, l'essenza di un fenomeno e la isolano in un modello così semplice da divenire un paradigma per un'intera disciplina.

Esercizi 1.3.5 *(i) Il modello (1.3.2) può apparire molto speciale ed è naturale domandarsi se le conclusioni che se ne traggono dipendano significativamente dalla particolare modifica dell'equazione logistica fatta. Si consideri allora l'equazione differenziale*

$$\dot{z} \;=\; \tilde{k}(z)z\Big(1-\frac{z}{z_L}\Big)$$

ove $z \mapsto \tilde{k}(z)$ è una qualunque funzione con uno zero in z_A, negativa se $z < z_A$ e positiva se $z > z_A$, con qualche $z_A < z_L$. Tracciarne il ritratto in fase. [S]

1.3.G Equazioni del secondo ordine come sistemi del primo ordine sul fibrato tangente. Finora abbiamo considerato solo equazioni differenziali del primo ordine, ma le equazioni del moto dei sistemi meccanici, sia liberi che vincolati, sono del secondo ordine. Tuttavia, come si sa dai corsi di analisi, ogni equazione differenziale del secondo ordine (purché esprimibile in forma normale, cioè risolubile rispetto alla derivata di ordine più alto) può essere scritta come un'equazione del primo ordine in uno spazio di dimensione doppia, trattando come variabili indipendenti anche le derivate delle funzioni incognita, cioè le velocità. Il vantaggio di questo procedimento è che esso permette di applicare allo studio delle equazioni del secondo ordine tutti i metodi, le idee, i modi di pensare ed i risultati validi per le equazioni del primo ordine. E, fra di essi, la possibilità di analizzare l'equazione nello spazio delle fasi.

Da un punto di vista geometrico, considerare uno spazio che, oltre alle coordinate, contiene anche le velocità significa passare al fibrato tangente dello spazio delle coordinate, che quindi qui svolge il nuovo ruolo di spazio delle fasi.

Consideriamo un'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} \;=\; Y(x,\dot{x})\,, \qquad x \in C\,, \tag{1.3.3}$$

ove C è un aperto in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, e i puntini denotano le derivate temporali. Questo caso include l'equazione di Newton per un punto materiale (con $Y =$ forza/massa ed $m = 3$) e, più in generale, le equazioni del moto dei sistemi meccanici vincolati, le equazioni di Lagrange.

Una *soluzione* della (1.3.3) è una curva $t \mapsto x_t \in C$ tale che $\ddot{x}_t = Y\big(x_t, \frac{dx_t}{dt}\big)$ per tutti t (con, ripetiamo, $\dot{x}_t = \frac{dx_t}{dt}$ e $\ddot{x}_t = \frac{d^2x_t}{dt^2}$).

Consideriamo poi il sistema del primo ordine

$$\big(\dot{x},\dot{v}\big) \;=\; \big(v, Y(x,v)\big) \tag{1.3.4}$$

in $TC = C \times \mathbb{R}^n \ni (x,v)$. L'equazione del secondo ordine (1.3.3) ed il sistema (1.3.4) sono definiti in spazi diversi (addirittura, di dimensione diversa) ma sono, nel senso seguente, equivalenti:

ESTRATTO

Proposizione 1.3.8

i. Se $t \mapsto x_t \in C$ è una soluzione di (1.3.3) allora $t \mapsto (x_t, \frac{dx_t}{dt}) \in TC$ è soluzione di (1.3.4).

ii. Se $t \mapsto (x_t, v_t) \in TC$ è una soluzione di (1.3.4) allora

- *$v_t = \frac{dx_t}{dt}$ $\forall t$*
- *$t \mapsto x_t$ è soluzione di (1.3.3).*

Dimostrazione. Ovvia. ■

Dunque, un'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$ su un aperto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ può essere sostituita da un'equazione del primo ordine su TC, ma di un tipo particolare. Se, geometricamente, scriviamo questa equazione del primo ordine come un campo vettoriale X su TC, tale campo vettoriale è dato da

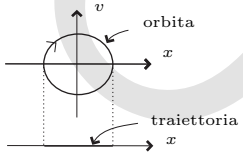
$$X(x, v) \;=\; \big(v, Y(x, v)\big) \;=\; \big(v_1, \ldots, v_n, Y_1(x, v), \ldots, Y_n(x, v)\big)\,. \qquad (1.3.5)$$

La particolarità è che, in ogni punto $(x, v) \in TC$, le prime n componenti di $X(x, v)$ valgono esattamente v, mentre un generico campo vettoriale su $TC = C \times \mathbb{R}^n$ ha come prime n componenti delle funzioni arbitrarie di x e v. È utile dare un nome a questi campi vettoriali:

Definizione 1.3.9 *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto. Un campo vettoriale su TC che corrisponde ad un'equazione del secondo ordine su C, ovvero ha la forma (1.3.5), è chiamato un* campo vettoriale del secondo ordine.

La seconda metà delle componenti di una curva integrale $t \mapsto (x_t, v_t)$ di un campo vettoriale X del secondo ordine uguagliano le derivate temporali della prima metà di quella curva: $\dot{x}_t \;=\; v_t$ $\forall t$. Basta pertanto conoscere la prima metà delle componenti di una soluzione per conoscerla tutta. Sottolineiamo però che è indispensabile non confondere i due spazi, quello delle coordinate $C \ni x$, e quello delle fasi $TC = C \times \mathbb{R}^n \ni (x, v)$, e gli oggetti definiti in essi, che sono diversi. Per agevolare questa distinzione, adottando la terminologia usata in meccanica, chiameremo

- *spazio delle fasi* lo spazio TC e *orbite* le immagini (orientate) delle curve integrali $t \mapsto (x_t, \dot{x}_t)$ del campo vettoriale (1.3.5).
- *spazio delle configurazioni* lo spazio delle coordinate x e *traiettorie* le immagini (orientate) delle curve $t \mapsto x_t$.



Dunque, una traiettoria è la proiezione di un'orbita sotto la mappa $(x, v) \mapsto x$. La distinzione fra orbite e traiettorie è cruciale: non solo esse vivono in spazi diversi, ma mentre orbite diverse non si intersecano, traiettorie diverse possono intersecarsi (nel passaggio dallo spazio delle fasi a quello delle configurazioni si perde l'informazione sulla velocità con la quale si transita per una certa configurazione).

Caratterizziamo infine le soluzioni costanti di un'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$, legandole agli equilibri del corrispondente sistema del primo

ESTRATTO

ordine. Per la Proposizione 1.3.8, una curva costante $t \mapsto \overline{x}$ nello spazio delle configurazioni è soluzione dell'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$ se e solo se la curva $t \mapsto (\overline{x}, 0)$ nello spazio delle fasi è soluzione del sistema del primo ordine associato, ovvero se e solo se $(\overline{x}, 0)$ è punto di equilibrio di questo sistema.

Proposizione 1.3.10 *Un punto $(\overline{x}, \overline{v})$ è equilibrio del sistema $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x, v)$ se e solo se $\overline{v} = 0$ e $\overline{x}$ soddisfa*

$$Y(\overline{x}, 0) = 0\,. \tag{1.3.6}$$

Dimostrazione. $(\overline{x}, \overline{v})$ è punto di equilibrio del sistema $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x, v)$ se e solo se il campo vettoriale $X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ Y(x, v) \end{pmatrix}$ si annulla in $(\overline{x}, \overline{v})$. ■

Dunque, le soluzioni costanti dell'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, \dot{x})$ sono in corrispondenza biunivoca con gli equilibri di $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x, v)$, ovvero con i punti $(\overline{x}, 0)$ dello spazio delle fasi con $\overline{x}$ che soddisfa (1.3.6). Diremo che $\overline{x}$ è una *configurazione di equilibrio* dell'equazione del secondo ordine e del sistema del primo ordine associato. (Attenzione: il punto di equilibrio del sistema del primo ordine è $(\overline{x}, 0)$, non $\overline{x}$, che non è neppure un punto dello spazio delle fasi).

Avvertenza: Finora abbiamo usato il puntino per indicare le derivate di curve: se $z : I \to \mathbb{R}^n$ è una curva, allora $\dot{z}$ sta per $\frac{dz}{dt}$, che è anch'essa una funzione $I \to \mathbb{R}^n$. Però, visto che i vettori tangenti sono derivate di curve, è invalso l'uso di denotare i vettori tangenti a un aperto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, invece che con una n-upla di un simbolo generico (quale $v = (v_1, \ldots, v_n)$ o simili), con la n-upla $\dot{z} = (\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_n)$. Quando si adotta questa convenzione i punti di TC vengono denotati $(z, \dot{z})$. Si tenga ben presente che qui le $\dot{z}_i$ *non sono derivate di funzioni, ma componenti di vettori*. Però, lungo una soluzione $t \mapsto (z(t), \dot{z}(t))$, è $\dot{z}_i(t) = z_i'(t)$ per ogni t. Questo può creare un po' di confusione, soprattutto all'inizio, che però si risolve chiedendosi, di volta in volta, se si ha a che fare con punti (e allora $\dot{z}_i$ sono le coordinate) o con curve (e allora le $\dot{z}_i$ ne sono le velocità). Anticipiamo che questa convenzione è di uso tradizionale e abituale in meccanica lagrangiana, per cui è utile abituarsi ad essa.

Esempio: Flusso e ritratto in fase dell'oscillatore armonico. Si sa dai corsi di fisica (e naturalmente sarà ovvio più avanti) che un punto materiale vincolato senza attrito ad una guida rettilinea e soggetto ad una forza armonica (realizzata per esempio con una 'molla ideale di lunghezza a riposo nulla') è modellizzabile con l'equazione del secondo ordine $m\ddot{x} = -kx$, $x \in \mathbb{R}$, ove m e k sono costanti positive, ovvero

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{1.3.7}$$

ESTRATTO

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Questa equazione, e l'equivalente sistema del primo ordine

$$\dot{x} \;=\; v\,, \qquad \dot{v} \;=\; -\omega^2 x \qquad (x,v)\in\mathbb{R}^2\,, \tag{1.3.8}$$

sono chiamati *oscillatore armonico*. Come si sa dai corsi di analisi, la (1.3.7) ha l'integrale generale

$$x(t;A,B) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.3.9}$$

con A e B costanti arbitrarie. Dunque tutte le soluzioni sono periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega$. (Il parametro ω è allora chiamato 'frequenza angolare' o, più semplicemente anche se un po' impropriamente, 'frequenza')

Per ottenere il flusso dell'oscillatore armonico, pensato come sistema del primo ordine, esprimiamo le costanti A e B in termini delle condizioni iniziali (x_0, v_0) a $t = 0$. Chiaramente $x(0;A,B) = A$. Derivando $x(t;A,B)$ si trova poi $v(t;A,B) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ e dunque $v(0;A,B) = B\omega$. Pertanto, la componente x della soluzione con dato iniziale (x_0, v_0) è

$$x(t;x_0,v_0) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{1.3.10}$$

e, derivandola, si ottiene la seconda componente della soluzione, cioè la velocità:

$$v(t;x_0,v_0) = -\omega\, x_0\, \sin\omega t + v_0\, \cos\omega t\,. \tag{1.3.11}$$

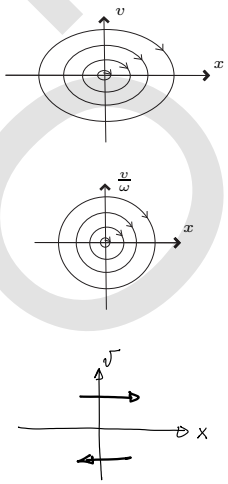
Utilizzando queste espressioni delle soluzioni possiamo costruire il ritratto in fase. (Vedremo in seguito che vi è un metodo molto più semplice per farlo, che sfrutta la conservazione dell'energia, ma è istruttivo farlo una prima volta in questo modo). L'unico equilibrio è l'origine. Per determinare le altre orbite osserviamo che

$$\begin{pmatrix} x(t;x_0,v_0) \\ v(t;x_0,v_0)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0\end{pmatrix}.$$

Dunque, a parte l'origine (che è un'orbita in quanto equilibrio), le orbite sono ellissi di centro l'origine percorse in verso orario. Questo è ovvio se $\omega = 1$, perché la matrice è la matrice di rotazione oraria di ωt, mentre se $\omega \neq 1$ la (1.3.12) si può anche scrivere nella forma

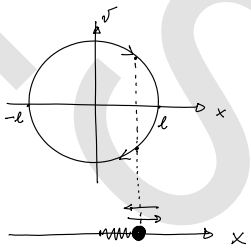
$$\begin{pmatrix} x(t;x_0,v_0) \\ \frac{1}{\omega}v(t;x_0,v_0)\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{1}{\omega}v_0\end{pmatrix} \tag{1.3.12}$$

cosicche $(x_t, \frac{1}{\omega}v_t)$ percorre un cerchio e (x_t, v_t) un ellisse. Aggiungiamo qualche osservazione:



- Il fatto che, in questo esempio, il verso di percorrenza sia quello orario è dovuto al fatto che l'equazione è del secondo ordine e lo spazio delle configurazioni unidimensionale. Infatti, l'orientazione delle orbite del sistema $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x,v)$ con $(x,v)\in\mathbb{R}^2$ è imposta dalla prima equazione: la $\dot{x} = v$ implica che i tratti di orbita che si trovano nel semipiano superiore, ove $v > 0$, siano percorsi da sinistra verso destra, perché i moti su di essi hanno $\dot{x}_t = v_t > 0$ e dunque $t \mapsto x_t$ crescente; per lo stesso motivo, i tratti di orbita nel semipiano $v < 0$ sono percorsi da destra verso sinistra.

ESTRATTO



- Se lasciamo andare il punto materiale attaccato alla molla da una distanza l dall'origine, per esempio alla sua sinistra, senza dargli velocità iniziale, esso esegue ovviamente un moto oscillatorio, descritto dalla (1.3.10) con $x_0 = -l$ e $v_0 = 0$. Nel piano delle fasi tale moto corrisponde all'orbita che passa per il punto $(-l, 0)$. Si noti che è possibile 'leggere' su tale orbita molte proprietà del moto: mentre il 'punto di fase' (x_t, v_t) percorre una volta l'orbita in senso orario, la posizione del punto materiale (cioè la configurazione) va avanti ed indietro fra le due posizioni estremali $\pm l$, ove il moto inverte la direzione, ed al contempo la velocità del punto materiale aumenta e poi diminuisce in valore assoluto, annullandosi nelle posizioni di inversione del moto e raggiungendo il massimo al transito per $x = 0$. Si noti che in ogni periodo il punto materiale ripassa due volte per ogni punto interno alla traiettoria; nello spazio delle fasi, i due passaggi corrispondono a due punti diversi, uno nel semipiano superiore e l'altro in quello inferiore.
- Il fatto che le orbite siano chiuse riflette naturalmente la periodicità delle soluzioni (torneremo su questo più avanti).

Osservazioni: (i) Il fatto che le soluzioni di (1.3.4) siano determinate dalle condizioni iniziali (x_0, v_0) si traduce nel ben noto fatto che le soluzioni di (1.3.3) sono determinate dall'assegnazione dei valori iniziali delle coordinate x e delle loro derivate.

(ii) Il fatto che lo spazio delle fasi del sistema del primo ordine (1.3.4) sia $TC = C \times \mathbb{R}^m$ riflette il fatto che, in ogni configurazione x, tutte le velocità siano possibili.

(iii) Il campo vettoriale $X(x, v) = (v, Y(x, v))$ associato ad un'equazione del secondo ordine è un campo vettoriale su $TC = C \times \mathbb{R}^m$, che è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{2m}$. Dunque X è una mappa da $TC = C \times \mathbb{R}^m$ a $T(TC) = (C \times \mathbb{R}^m) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ con $X(x, v) \in T_{(x,v)}(TC)$. Propriamente, il campo vettoriale è $X^{\uparrow}(x, v) = \Big((x, v), (v, Y(x, v))\Big)$.

Esercizi 1.3.6 *(i) Determinare le configurazioni di equilibrio delle seguenti equazioni del secondo ordine, tutte con spazio delle configurazioni* $\mathbb{R}$*: (a)* $\ddot{x} = 1 - x$*. (b)* $\ddot{x} = -x - \dot{x}$*. (c)* $\ddot{x} = \sin x - \dot{x}^2$*. (d)* $\ddot{x} = (1 - x^2)(x + \dot{x})$*. (e)* $\ddot{x} = 0$*.* [R]

(ii) Dopo averla integrata, disegnare il ritratto in fase di $\ddot{x} = 0$*,* $x \in \mathbb{R}$ *("particella libera" unidimensionale).* [R]

(iii) Dopo averla integrata, disegnare il ritratto in fase dell'equazione $\ddot{x} = g$*,* $x \in \mathbb{R}$ *(caduta verticale libera sotto la forza peso).* [S]

(iv) È possibile che un'orbita chiusa di $\dot{x} = v$*,* $\dot{v} = Y(x, v)$*,* $(x, v) \in \mathbb{R}^2$*, appartenga interamente al semipiano superiore* $v > 0$*? Perché?* [R]

(v) Si consideri un'equazione del secondo ordine con spazio delle configurazioni unidimensionale. Mostrare che se un'orbita del corrispondente sistema del primo ordine, che non sia un equilibrio, interseca l'asse delle x *allora lo fa necessariamente con tangente verticale.*

(vi) Verificare che l'integrale generale (1.3.8) dell'oscillatore armonico si può scrivere anche

$$x(t; C, \delta) \;=\; C\,\cos(\omega t + \delta)\,, \qquad C \geq 0\,, \quad 0 \leq \delta < 2\pi\,.$$

ESTRATTO

Esprimere C e δ in funzione dei dati iniziali. (Questa forma dell'integrale generale è comoda, ma si deve tenere presente che non vi è corrispondenza biunivoca fra i dati iniziali ed i valori delle due costanti C e δ: infatti, la soluzione di equilibrio $x(t) = 0$ si ottiene per $C = 0$ e qualunque valore di δ).

1.3.H Equazioni non autonome. Il caso di un'equazione differenziale dipendente dal tempo,

$$\dot{z} \;=\; X(z,t)\,, \tag{1.3.13}$$

o, come si dice, *non autonoma*, presenta delle particolarità. I teoremi di esistenza ed unicità e di dipendenza differenziabile dal dato iniziale continuano a valere, ma quel che si perde è, ovviamente, la traslabilità nel tempo delle soluzioni: se $t \mapsto \gamma(t)$ è una soluzione, non è detto che $t \mapsto \gamma(t+t_0)$ lo sia. Dunque, soluzioni con lo stesso dato iniziale ma ad istanti iniziali diversi possono essere diverse.

Una conseguenza della non traslabilità temporale delle soluzioni è che, nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^n$, orbite diverse possono intersecarsi: basta che le corrispondenti soluzioni passino per il punto di intersezione ad istanti diversi. Lo spazio delle fasi non è dunque il giusto ambiente per lo studio di un'equazione non autonoma.

Al suo posto si può considerare lo 'spazio delle fasi esteso', di dimensione $n+1$, ottenuto aggiungendo una coordinata, chiamiamola τ, per rappresentare il tempo. Infatti, l'equazione non autonoma $\dot{z} = X(z,t)$ è manifestamente equivalente all'equazione autonoma

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X(z,\tau) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3.14}$$

nello spazio delle fasi esteso $\mathbb{R}^{n+1} \ni (z,\tau)$, nel senso che se $t \mapsto z_t$ è soluzione di (1.3.13) allora $t \mapsto (z_t, \tau_t = t)$ è soluzione di (1.3.14), e viceversa.

In questo senso, un'equazione non autonoma si può sempre ridurre ad un'equazione autonoma. Questo punto di vista è molto utile perché, per esempio, permette di svolgere una teoria unificata per i due casi. Tuttavia, il caso non autonomo presenta delle specificità e non si deve ritenere che, a causa del passaggio allo spazio delle fasi esteso, il suo studio non presenti interesse. Per comprendere, per esempio, come il tipo di domande che ci si pone, nel caso non autonomo, possa essere diverso dal caso autonomo basta osservare che nello spazio delle fasi esteso non esistono equilibri.

Esercizi 1.3.7 *(i) Mostrare che una curva costante $t \mapsto \overline{z}$ è soluzione dell'equazione non autonoma $\dot{z} = X(z,t)$ se e solo se $X(\overline{z},t) = 0\ \forall t$.*

ESTRATTO

1.4 Linearizzazione agli equilibri

1.4.A Linearizzazione ad un equilibrio. Dopo la determinazione degli equilibri, lo studio del comportamento locale vicino ad essi, in particolare delle loro proprietà di stabilità, in senso ampio, è spesso il passo successivo nello studio di un'equazione differenziale.

Un possibile approccio a questa questione è basato sul procedimento di linearizzazione. Se l'equazione $\dot{z} = X(z)$ ha un equilibrio in $\overline{z}$, cioè $X(\overline{z}) = 0$, allora sviluppando in serie attorno a $\overline{z}$ il campo vettoriale si ottiene

$$\dot{z} \;=\; X'(\overline{z})(z-\overline{z}) \;+\; .....$$

ove $X'(\overline{z})$ è la matrice jacobiana di X valutata in $\overline{z}$, cioè la matrice di componenti

$$X'_{ij}(\overline{z}) \;=\; \frac{\partial X_i}{\partial z_j}(\overline{z})\,,$$

ed i puntini denotano termini di grado superiore al primo in $\|z-\overline{z}\|$ (per alcuni richiami su differenziali, matrici jacobiane etc. si può vedere la sezione di richiami 1.4.C). Vicino all'equilibrio questi termini sono piccoli rispetto a quelli lineari. Si può dunque pensare che sia possibile ottenere delle informazioni sul comportamento delle soluzioni dell'equazione $\dot{z} = X(z)$, almeno vicino al punto di equilibrio, studiando l'equazione troncata ai termini lineari:

$$\dot{z} \;=\; X'(\overline{z})(z-\overline{z})\,. \tag{1.4.1}$$

Scritta così, la (1.4.1) è un'equazione lineare non omogenea. La si può trasformare in un'equazione davvero lineare (cioè omogenea) con il cambiamento di coordinate $u = z - \overline{z}$, cioè con una traslazione dell'origine delle coordinate nell'equilibrio, che la muta in

$$\dot{u} = X'(\overline{z})\,u\,, \qquad u \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.4.2}$$

Le (1.4.1) e (1.4.2) sono entrambe chiamate *linearizzazione* di $\dot{z} = X(z)$ nell'equilibro $\overline{z}$.

Osserviamo che la linearizzazione di un'equazione differenziale in un equilibrio $\overline{z}$ dovrebbe propriamente essere pensata come un'equazione differenziale lineare *nello spazio tangente* $T_{\overline{z}}\Omega$. Il motivo è che $z-\overline{z}$ è un vettore dello spazio vettoriale $T_{\overline{z}}\Omega$; in effetti, esso è la derivata a $t=0$ della curva $t \mapsto \overline{z} + t(z-\overline{z})$ (o, se si preferisce, se z e $\overline{z}$ sono molto vicini, un 'vettore infinitesimo'). La forma (1.4.2) sottolinea questa interpretazone, con $\mathbb{R}^n \equiv T_{\overline{z}}\Omega$.

Esempi: (i) La linearizzazione dell'equazione logistica $\dot{z} = kz - hz^2$ all'equilibrio $z = 0$ è

$$\dot{z} = kz$$

ESTRATTO

mentre la sua linearizzazione all'equilibrio $\overline{z} = k/h$ è $\dot{z} = (k - 2h\overline{z})(z - \overline{z}) = -k(z - \overline{z})$ ovvero, con la traslazione $u = z - \overline{z}$,

$$\dot{u} = -ku\,.$$

(In dimensione 1 il campo vettoriale è una funzione da $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e la sua matrice jacobiana è la derivata).

(ii) Consideriamo il sistema in $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$

$$\dot{x} = x^2 - x^2 y\,, \qquad \dot{y} = y + xy\,.$$

Le coordinate degli equilibri sono le soluzioni del sistema $x^2(1-y) = 0$, $y(1+x) = 0$. La prima è risolta da $x = 0$ e $y = 1$; sostituendo nella seconda si trova che gli equilibri sono $(0, 0)$ e $(-1, 1)$. La matrice jacobiana del campo vettoriale nel punto (x, y) è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x^2 y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x^2 y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y + xy) & \frac{\partial}{\partial y}(y + xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2xy & -x^2 \\ y & 1 + x \end{pmatrix}$$

Dunque, la linearizzazione in $(0, 0)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

mentre quella in $(-1, 1)$, usando le coordinate traslate $\tilde{x} = x + 1$, $\tilde{y} = y - 1$, è

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{y} \\ \tilde{x} \end{pmatrix}.$$

L'idea soggiacente la linearizzazione è che lo studio delle equazioni differenziali lineari è molto più facile di quello delle equazioni non lineari, e si effettua con tecniche standard (che ricorderemo nel capitolo 1.5). Sarebbe dunque molto utile se si potessero dedurre delle informazioni sul sistema nonlineare dalla conoscenza del sistema linearizzato. Se questo sia vero è una questione delicata, ma sulla quale si sa molto, e sulla quale torneremo.

Osserviamo qui solo che in realtà abbiamo già incontrato un esempio di tale procedimento: la Proposizione 1.3.7 deduce, nel caso $n = 1$, la attrattività di un equilibrio $\overline{z}$ dal segno della derivata $X'(\overline{z})$ del campo vettoriale, cioè da una proprietà della linearizzazione $\dot{u} = X'(\overline{z})u$. Già in questo caso si vede che la procedura di estrapolazione di informazioni dalla linearizzazione non funziona sempre: come là osservato, essa fallisce quando $X'(\overline{z}) = 0$; questo non dovrebbe sorprendere: se $X'(\overline{z}) = 0$, il segno di X vicino a $\overline{z}$ è determinato dalle derivate successive, che sono ignorate dal procedimento di linearizzazione. Nel caso $n \geq 2$ la situazione è, come vedremo, un po' meno intuitiva.

Ad ogni modo, il procedimento di linearizzazione agli equilibri spiega l'importanza delle equazioni differenziali lineari, e la necessità di comprendere le proprietà del loro flusso. Questo studio è svolto nella prossima sezione.

ESTRATTO

Esercizi 1.4.1 *(i) Linearizzare le equazioni (a) e (b) dell'esercizio 1.3.2.iii attorno ai loro punti di equilibrio.* [R]

(ii) Determinare gli equilibri del sistema $\dot{x} = x - 2y + xy$, $\dot{y} = 2x + y - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *e linearizzarlo in essi.*

1.4.B Linearizzazione delle equazioni del secondo ordine. La linearizzazione di un'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = Y(x, v)$ può essere affrontata da due punti di vista, che risultano equivalenti: si può considerare la parte lineare dello sviluppo in serie di Taylor della funzione $(x, v) \mapsto Y(x, v)$ centrato nell'equilibrio oppure si può linearizzare il sistema del primo ordine equivalente.

Scegliamo la seconda via e definiamo la linearizzazione di $\ddot{x} = Y(x, v)$ attorno ad una configurazione di equilibrio $\overline{x}$ come la linearizzazione attorno all'equilibrio $(\overline{x}, 0)$ del corrispondente sistema del primo ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = Y(x, v)$. Questo dà il sistema linearizzato

$$\dot{x} \;=\; v\,, \qquad \dot{v} \;=\; \frac{\partial Y}{\partial x}(\overline{x}, 0)(x - \overline{x}) \;+\; \frac{\partial Y}{\partial v}(\overline{x}, 0)v \tag{1.4.3}$$

ove naturalmente $\frac{\partial Y}{\partial x}(\overline{x}, 0)$ e $\frac{\partial Y}{\partial v}(\overline{x}, 0)$ sono le matrici di componenti $\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial Y_i}{\partial v_j}$, rispettivamente, valutate in $(\overline{x}, 0)$.

Il sistema del primo ordine (1.4.3) è equivalente all'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} \;=\; \frac{\partial Y}{\partial x}(\overline{x}, 0)(x - \overline{x}) \;+\; \frac{\partial Y}{\partial v}(\overline{x}, 0)v \tag{1.4.4}$$

Dunque, la linearizzazione di $\ddot{x} = Y(x, v)$ si può anche eseguire sviluppando in serie di Taylor con punto iniziale $(\overline{x}, 0)$ la funzione $(x, v) \mapsto Y(x, v)$ e tenendo soltanto i termini lineari. (Si noti che, in entrambi i casi, la linearizzazione va effettuata nello spazio delle fasi, cioè rispetto alle coordinate x e v, non nello spazio delle configurazioni, cioè rispetto alle sole coordinate x).

Esempi: (i) *Genesi di oscillatore e repulsore armonici.* Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$m\ddot{x} \;=\; F(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

ed assumiamo che $F(0) = 0$. Linearizzando attorno all'equilibrio $(0, 0)$ si trova l'equazione del secondo ordine

$$m\ddot{x} \;=\; ax \qquad \text{ove} \qquad a \;=\; \frac{dF}{dx}(0)\,.$$

Dunque, se $a < 0$ si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{x} = -\omega^2 x$, ove abbiamo posto $\omega = \sqrt{|a|/m}$. Se invece $a > 0$ si ottiene l'equazione

$$\ddot{x} \;=\; \omega^2 x\,, \tag{1.4.5}$$

adesso con $\omega = \sqrt{a/m}$, che chiameremo "repulsore armonico". Questa derivazione dovrebbe chiarire l'importanza di queste due equazioni.

ESTRATTO

(ii) *Ritratto in fase del repulsore armonico.* Costruiamo allora il ritratto in fase del repulsore armonico (1.4.5), ovvero del sistema del primo ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = \omega^2 x$ in $\mathbb{R}^2 \ni (x, v)$. Come nel caso dell'armonico, anche adesso facciamolo integrando l'equazione differenziale. Come si sa dai corsi di analisi, l'integrale generale di $\ddot{x} = \omega^2 x$ è

$$x(t; A, B) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

e derivando si ottiene $v(t; A, B) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$. Esprimendo le costanti A e B in termini delle condizioni iniziali (x_0, v_0) a $t = 0$ si trova

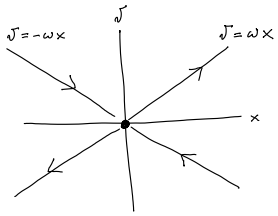
$$x(t; x_0, v_0) \;=\; \frac{1}{2}\Big(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\Big(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{-\omega t} \tag{1.4.6}$$

$$v(t; x_0, v_0) \;=\; \frac{\omega}{2}\Big(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{\omega t} - \frac{\omega}{2}\Big(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\Big)e^{-\omega t}\,. \tag{1.4.7}$$

Si riconosce a vista che, oltre all'equilibrio, vi sono quattro orbite speciali. Se infatti i dati iniziali sono tali che $v_0 = \omega x_0$ allora risulta

$$x(t; x_0, v_0) \;=\; x_0 e^{\omega t}\,, \qquad v(t; x_0, v_0) \;=\; v_0 e^{\omega t}$$

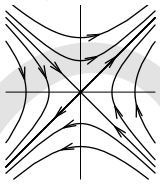
e dunque la soluzione resta sulla retta che congiunge l'origine col dato iniziale. La retta $v = \omega x$ consiste dunque di tre orbite: l'origine, che è un punto di equilibrio, e le due semirette rami con $x < 0$ e con $x > 0$, sulle quali i moti si allontanano indefinitamente per $t \to +\infty$ e tendono invece all'origine per $t \to -\infty$. (Per questo motivo, si dice che queste due orbite formano la "varietà uscente" o "varietà instabile" dell'equilibrio nell'origine.) Qualcosa di simile avviene se $v_0 = -\omega x_0$, perché allora



$$x(t; x_0, v_0) \;=\; x_0 e^{-\omega t}\,, \qquad v(t; x_0, v_0) \;=\; v_0 e^{-\omega t}\,.$$

La differenza è che ora, su ciascuna semiretta con $x < 0$ e con $x > 0$ della retta $v = -\omega x$, la soluzione tende asintoticamente all'origine per $t \to +\infty$ e all'infinito per $t \to -\infty$. (Queste orbite formano la "varietà stabile" o "varietà entrante" dell'equilibrio nell'origine).

Una volta determinate queste orbite speciali è poi facile capire come siano disposte tutte le altre orbite. Infatti, per l'unicità, ogni altra orbita è contenuta nell'angolo delimitato da due di queste. Siccome il termine dominante nella soluzione (1.4.6), (1.4.7) è l'esponenziale positivo per $t \to +\infty$ e quello negativo per $t \to -\infty$, per grandi $|t|$ l'orbita tende verso l'una o l'altra di esse, come mostrato in figura. In realtà è facile determinare l'equazione delle orbite: eliminando il tempo fra le (1.4.6) e (1.4.7) si trova infatti



$$v_t^2 - \omega^2 x_t^2 \;=\; v_0^2 - \omega^2 x_0^2 \tag{1.4.8}$$

e dunque le orbite sono la famiglia di iperboli di asintoti $v = \pm\omega x$.

Esercizi 1.4.2 *(i) Linearizzare $\ddot{x} = -\sin x - \dot{x}$ attorno ai suoi equilibri con $x \in [0, 2\pi)$.* [R]

(ii) Interpretare il ritratto in fase del repulsore armonico in termini del moto di un punto materiale attaccato ad una 'molla che spinge'.

(iii) Verificare la (1.4.8).

EDIZIONE

1.4.C Richiami: differenziali, matrici jacobiane, gradienti. Per completezza richiamiamo un po' di fatti noti e terminologia che useremo costantemente. Sia $F = (F_1, \dots, F_n) : M \to N$ una mappa differenziabile fra due aperti $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ed $N \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $z \in M$. Il *differenziale* $dF(z)$ di F in z è la mappa lineare da $\mathbb{R}^m$ ad $\mathbb{R}^n$ che meglio approssima F vicino a z, cioè

$$F(y) - F(z) = dF(z)\,(y - z) + o(\|y - z\|) \quad \text{per } y \to z\,. \tag{1.4.9}$$

In realtà, come spiegheremo più avanti, il differenziale $dF(z)$ va propriamente pensato come mappa lineare da T_zM a $T_{F(z)}N$. (Anticipiamo anche che più avanti lo denoteremo T_zF e lo chiameremo *mappa tangente*).

La matrice associata alla mappa lineare $dF(z)$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ è chiamata la *matrice jacobiana* $F'(z)$ *di* F *in* z ed è definita dal fatto che, per ogni $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$dF(z)(u) = F'(z)u$$

ove il prodotto a destra dell'uguale è quello righe per colonne. È noto dai corsi di analisi che $F'(z)$ è la matrice $n \times m$ di componenti

$$F'_{ij}(z) = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}(z)\,, \qquad i = 1, \dots, n\,, \quad j = 1, \dots, m\,. \tag{1.4.10}$$

Equivalentemente, le colonne di $F'(z)$ sono i vettori $\frac{\partial F}{\partial z_j}(z) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial z_j}(z), \dots, \frac{\partial F_n}{\partial z_j}(z)\right)^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. Dunque, denotando $[a_1, \dots, a_m]$ la matrice le cui colonne sono $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, possiamo scrivere

$$F'(z) = \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial F}{\partial z_m}(z)\right]. \tag{1.4.11}$$

Nel seguito tenderemo a confondere differenziale e matrice jacobiana, e li chiameremo anche *linearizzazione* della mappa.

Nel caso particolare di una funzione $f : M \to \mathbb{R}$, con $M \subseteq \mathbb{R}^m$, il differenziale è una mappa lineare da $\mathbb{R}^m = T_zM$ ad $\mathbb{R}$, e dunque un elemento dello spazio duale $(T_zM)^*$ di T_zM (chiamato funzionale lineare o forma lineare o covettore). La sua matrice jacobiana è la matrice $1 \times n$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_m}\right) \tag{1.4.12}$$

ovvero un "vettore riga". Come si sa, ogni prodotto scalare induce un'identificazione fra uno spazio vettoriale ed il suo duale. Il vettore di $\mathbb{R}^m = T_zM$ associato a $df(z)$ nell'identificazione di $(\mathbb{R}^m)^*$ con $\mathbb{R}^m$ fornita dal prodotto scalare euclideo si chiama il *gradiente di* f *in* z ed è denotato $\mathrm{grad} f(z)$ o $\nabla f(z)$. Esso è definito dalla condizione che $df(z)(u) = \nabla f(z) \cdot u$ per ogni vettore $u \in \mathbb{R}^m$. Siccome $df(z)u = f'(z)u = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)u_i$ e $\nabla f(z) \cdot u = \sum_i (\nabla f(z))_i u_i$, da questo segue che $\nabla f(z)$ è il vettore di componenti $\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$, ovvero il "vettore colonna"

$$\nabla f(z) = f'(z)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_m}\right)^T. \tag{1.4.13}$$

ESTRATTO

Siccome $\mathrm{grad} f(z) \in T_z M$ per ogni $z \in M$, il gradiente di una funzione è propriamente un campo vettoriale.

L'uso dei differenziali e dei gradienti delle componenti di una mappa $F = (F_1, \dots, F_m)$ fra aperti di $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ permette di scrivere la matrice jacobiana $F'(z)$ e la sua trasposta anche in altri modi:

$$F'(z) = \begin{bmatrix} F_1'(z) \\ \vdots \\ F_n'(z) \end{bmatrix}, \qquad F'(z)^T = [\nabla F_1(z), \dots, \nabla F_n(z)]\,. \tag{1.4.14}$$

(con $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ la matrice le cui righe sono $a_1^T, \dots, a_n^T$).

1.4.D Richiami: punti critici di funzioni reali. Raccogliamo qui un certo numero di fatti e definizioni che utilizzeremo in seguito. In questo modo precisiamo anche la terminologia che useremo. Per esempio, per noi la differenza fra minimi assoluti e locali (o relativi) non sarà importante, per cui chiameremo punto di minimo quello che spesso in analisi è chiamato punto di minimo locale o relativo (e lo stesso per i massimi, ovviamente).

Sia M un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $\overline{z}$ un punto di M. Le seguenti sono definizioni topologiche standard:

- $\overline{z}$ è un punto di *minimo* (locale o relativo, ma non lo diremo) di f se esiste un intorno di $\overline{z}$ nel quale f è ovunque $\geq f(\overline{z})$. Analogamente per i massimi.
- $\overline{z}$ è un punto di *minimo stretto* di f se esiste un intorno di $\overline{z}$ nel quale f è ovunque $> f(\overline{z})$. Analogamente per i massimi.

Si hanno inoltre le seguenti nozioni, che usano la differenziabilità:

- $\overline{z} \in M$ è un *punto critico* di f se $f'(\overline{z}) = 0$.
- $\overline{z} \in M$ è un *punto di sella* di f se è un punto critico e non è né un minimo né un massimo.

Ricordiamo che, in ogni punto $z \in M$ la *matrice hessiana* di f in z, che denoteremo $f''(z)$, è la matrice di componenti

$$f''_{ij}(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(z)\,. \tag{1.4.15}$$

Vi sono dei ben noti risultati. Se $\overline{z}$ è un punto critico di f, allora:

- Se $f''(\overline{z})$ è definita positiva (tutti gli autovalori positivi) allora $\overline{z}$ è un punto di minimo stretto di f.
- Se $f''(\overline{z})$ è definita negativa (tutti gli autovalori negativi) allora $\overline{z}$ è un punto di massimo stretto di f.
- Se $f''(\overline{z})$ ha almeno un autovalore positivo ed almeno un autovalore negativo allora $\overline{z}$ è un punto di sella.

Ovviamente, i viceversa non valgono (si pensi per esempio a $f(z) = z^4$, $z \in \mathbb{R}$). Però valgono per una classe speciale di punti critici, quelli non degeneri. Siccome questa nozione non è probabilmente nota dai corsi di analisi la formalizziamo:

ESTRATTO

Definizione 1.4.1 *Un punto critico* $\overline{z}$ *di una funzione* $f : M \to \mathbb{R}$ *è* non degenere *se* $\det(f''(\overline{z})) \neq 0$ *(ovvero la matrice hessiana* $f''(\overline{z})$ *non ha autovalori nulli),* degenere *se* $\det(f''(\overline{z})) = 0$.

Se $n = 1$, $\overline{z} \in \mathbb{R}$ è un punto critico di f se la derivata $f'(\overline{z})$ è nulla, ed è non degenere se la derivata seconda $f''(\overline{z})$ è diversa da zero. Di conseguenza, se $n = 1$ i punti critici non degeneri sono necessariamente punti di minimo o massimo stretti. Tuttavia, un punto critico degenere può essere un minimo stretto ($f(z) = z^4$) o non stretto ($f(z) = 0$), un massimo stretto ($f(z) = -z^4$) o non stretto ($f(z) = 0$), o un punto di flesso ($f(z) = \pm z^3$), che è l'analogo (ma poco significativo) dei punti di sella in dimensione 1.

Lemma 1.4.2 *Se* $\overline{z}$ *è un punto critico* non degenere *di una funzione* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *allora esso è*

i. Un minimo stretto se e solo se $f''(\overline{z})$ *è definita positiva.*
ii. Un massimo stretto se e solo se $f''(\overline{z})$ *è definita negativa.*
iii. Un punto di sella se e solo se $f''(\overline{z})$ *non è definita in segno.*

La dimostrazione è immediata perché segue da quanto detto sopra. Sottolineiamo ancora che i "se e solo se" *non valgono* per punti critici degeneri.

1.5 Teoria qualitativa delle equazioni lineari

In questa sezione studiamo, da un punto di vista qualitativo, le equazioni differenziali lineari, la cui importanza, come osservato, emerge dal processo di linearizzazione. Utilizzeremo un certo numero di nozioni di algebra lineare, in particolare relative alla diagonalizzabilità delle matrici, che dovrebbero essere note; cercheremo comunque di richiamarle via via.

1.5.A Esponenziale di matrice. Il flusso di un'equazione lineare si scrive esplicitamente per mezzo dell'esponenziale di matrice, dalla quale iniziamo pertanto l'analisi. Si ricordi che l'insieme di tutte le matrici reali $n \times n$, che denoteremo $L(n, \mathbb{R})$, è uno spazio vettoriale di dimensione n^2, ma è anche un algebra perché dotato del prodotto matriciale, righe per colonne.[3]

Proposizione 1.5.1 *Sia* B *una matrice reale o complessa* $n \times n$. *Allora la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \tag{1.5.1}$$

converge (assolutamente: cioè, la serie delle norme converge). La sua somma si indica $\exp(B)$ *o* e^B *e si chiama* esponenziale *di* B. *(Nello scrivere la (1.5.1) si fa la convenzione che* $B^0 = \mathbb{I}$ *anche se* $B = 0$*).*

[3] $L(n, \mathbb{R})$ è isomorfo, come spazio vettoriale e come algebra, all'insieme di tutte le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in sè, che denoteremo con lo stesso simbolo; l'operazione nell'algebra è la composizione.

ESTRATTO

Dimostrazione. Sia $K = \mathbb{R}^n$ oppure $\mathbb{C}^n$, e sia $K_0 := K \setminus \{0\}$. Muniamo lo spazio delle matrici $n \times n$ con elementi in K della norma "operatoriale" $\|B\|_{\rm op} := \sup_{z\in K_0} \frac{\|Bz\|}{\|z\|} = \max_{\|z\|=1} \|Bz\|$, ove $\|\ \|$ è la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$ o hermitiana su $\mathbb{C}^n$.

Mostriamo innanzitutto, per induzione, che $\|B^k\|_{\rm op} \le \|B\|_{\rm op}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora la norma operatoriale di $B^0 = \mathbb{I}$ è 1 e, osservando che ovviamente $\|B\|_{\rm op} = \sup_{z\notin\ker(B)} \frac{\|Bz\|}{\|z\|}$, si ha $\|B^{k+1}\|_{\rm op} = \sup_{z\in K_0} \frac{\|B^{k+1}z\|}{\|z\|} = \sup_{z\notin\ker(B)} \frac{\|B^kBz\|}{\|Bz\|}\frac{\|Bz\|}{\|z\|} \le \sup_{z\in K_0} \frac{\|B^kz\|}{\|z\|} \sup_{z\in K_0} \frac{\|Bz\|}{\|z\|} = \|B^k\|_{\rm op}\,\|B\|_{\rm op}$.

Allora $\sum_{k=0}^\infty \left\|\frac{1}{k!}B^k\right\| \le \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\|B\|_{\rm op}^k = e^{\|B\|_{\rm op}} < \infty$. ■

Alcune importanti proprietà dell'esponenziale di matrice sono enunciate nei seguenti esercizi.

Esercizi 1.5.1 *Negli esercizi ii.-v. si usi la definizione di* $\exp(B)$ *come somma della serie (1.5.1) e si sfrutti il fatto che se una serie converge assolutamente allora si può operare su di essa termine a termine.*

(i) Provare che l'insieme $L(n,\mathbb{R})$ *di tutte le matrici reali* $n \times n$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *di dimensione* n^2*. [Suggerimento: scrivere una base].*

(ii) Lo spazio vettoriale $L(n,\mathbb{R})$ *è dotato del prodotto matriciale ed è quindi un'algebra*

(ii) Mostrare che, se A *e* P *sono matrici* $n \times n$ *e* P *è invertibile allora*

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P \tag{1.5.2}$$

e dunque vale la (1.5.7). [R]

(iii) Mostrare che se due matrici A *e* B *commutano, cioè* $AB = BA$*, allora* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$*. (Nota: la condizione di commutazione è essenziale).* [R]

(iv) Sia $u \in \mathbb{R}^n$ *autovettore di una matrice reale* A *relativo all'autovalore* λ*,* $Au = \lambda u$*. Usando la (1.5.1), mostrare che* [R]

$$\exp(tA)u = e^{\lambda t}u\,. \tag{1.5.3}$$

(v) Usando la (1.5.1), mostrare che

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{1.5.4}$$

[Suggerimento: Si scriva $A = \beta\mathbb{J}$ *con* $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$*. Calcolare* $\mathbb{J}^2$ *e* $\mathbb{J}^3$ *e dedurne per induzione l'espressione per le potenze pari e dispari di* $\mathbb{J}$*. Usare poi le serie di McLaurin del seno e del coseno.]* [R]

1.5.B Flusso dei sistemi lineari.

Proposizione 1.5.2 *Sia* A *una matrice reale* $n \times n$ *e sia* $z_0 \in \mathbb{R}^n$*. Allora, la soluzione massimale di*

$$\dot z \;=\; Az\,, \qquad z \in \mathbb{R}^n \tag{1.5.5}$$

ESTRATTO

con dato iniziale z_0 *è* $\gamma_{z_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *con*

$$\gamma_{z_0}(t) = \exp(tA)z_0 \,. \tag{1.5.6}$$

Dimostrazione. $\exp(tA)z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k z$ è una serie di funzioni $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{R}^n$ che, per la Proposizione 1.5.1, ha raggio di convergenza $+\infty$ (converge per ogni t). Dunque le sue componenti sono funzioni analitiche $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (e anche $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$). Come tali, sono C^∞ e possono essere derivate termine a termine. Dunque

$$\frac{d}{dt} \exp(tA)z_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} z_0 = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k z_0 = A \, \exp(tA)z_0 \,,$$

che prova che è una soluzione di $\dot{z} = Az$. Siccome vale z_0 a $t = 0$ essa è γ_{z_0}. ■

Dunque, il flusso dell'equazione lineare $\dot{z} = Az$ è dato dalle mappe lineari $z \mapsto \exp(tA)z$, $t \in \mathbb{R}$, e la sua integrazione si riduce al calcolo dell'esponenziale della matrice tA. Questo è particolarmente facile se la matrice A è *diagonalizzabile*, esiste cioè una matrice invertibile P, reale o complessa, tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale. In tal caso, infatti, come mostrato nell'esercizio 1.5.1.ii, si ha

$$\exp(tA) \;=\; P \exp\big(tP^{-1}AP\big)P^{-1} \tag{1.5.7}$$

e per una matrice diagonale si ha semplicemente

$$\exp\big(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) \;=\; \mathrm{diag}\,\big(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\big)\,. \tag{1.5.8}$$

Come è noto dai corsi di algebra lineare una matrice A di dimensione $n \times n$ è diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori linearmente indipendenti, e la matrice P che la diagonalizza ha allora questi vettori per colonne. Alcune ben note condizioni sufficienti per la diagonalizzabilità di una matrice sono:

- Tutti gli autovalori sono semplici.
- La matrice è simmetrica.
- La matrice è antisimmetrica.

Naturalmente, se alcuni degli autovalori di A sono complessi, allora sia P che la matrice diagonale $P^{-1}AP$ sono complesse (e questo avviene sempre per le matrici antisimmetriche). L'uso della diagonalizzazione non è allora particolarmente utile per la comprensione del ritratto in fase dell'equazione ed è preferibile utilizzare un procedimento di diagonalizzazione a blocchi reali, descritto più avanti, che corrisponde ad utilizzare una base di $\mathbb{R}^n$ formata dalle parti reali ed immaginarie degli autovettori.

Se invece A non è diagonalizzabile il procedimento di calcolo dell'esponenziale si basa sulla forma normale (reale) di Jordan ed è più laborioso. Per semplicità, considereremo quasi esclusivamente il caso diagonalizzabile.

ESTRATTO

Osservazioni: (i) La Proposizione 1.5.2 implica, in particolare, che ogni campo vettoriale lineare su $\mathbb{R}^n$ è completo.

(ii) *Caso non diagonalizzabile.* Se A non è diagonalizzabile il procedimento di calcolo dell'esponenziale si basa sulla forma normale di Jordan ed è concettualmente semplice, ma computazionalmente (anche molto) più laborioso. Il teorema di Jordan afferma che ogni matrice A può essere scritta come la somma $D+N$ di una matrice D diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$, in generale) e di una matrice N nilpotente, le quali commutano: $[D,N]=0$. Di conseguenza

$$e^{tA} \;=\; e^{tD}e^{tN}$$

e qui $e^{tN} = \mathbb{I} + tN + \frac{1}{2}t^2N^2 + \ldots + \frac{1}{p!}t^pN^p$ è un polinomio in t il cui grado p è uguale all'ordine di nilpotenza di N, meno 1 (ovvero, p è il più piccolo naturale tale che $N^{p+1}=0$). Inoltre, esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}DP$ sia diagonale (e $P^{-1}NP$ triangolare superiore, ma questo non è qui importante) cosicché

$$\begin{aligned}\exp(tA) \;&=\; P\,\exp(tP^{-1}DP)\,\exp(tP^{-1}NP)\,P^{-1}\\ &=\; P\,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}\right)P^{-1}\left(\mathbb{I}+tN+\ldots+\frac{t^p}{p!}N^p\right).\end{aligned}$$

Come funzioni del tempo, le soluzioni sono dunque combinazioni lineari di prodotti di esponenziali complesse (dunque, prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche) per polinomi. Dal punto di vista computazionale, la difficoltà di base è la determinazione della matrice P. Mentre nel caso diagonalizzabile si tratta solo di determinare autovalori ed autovettori della matrice A, in quello non diagonalizzabile questo richiede dimestichezza con la forma normale di Jordan. Inoltre, per l'interpretazione dinamica servirebbe la forma normale reale di Jordan.

Esercizi 1.5.2 *(i) Provare la (1.5.8) usando la (1.5.1).*

(ii) Determinare gli autovalori della matrice del campo vettoriale nel caso delle equazioni differenziali dell'oscillatore armonico (1.3.7), del repulsore armonico (1.4.5) e della particella libera unidimensionale $\ddot{x}=0$, pensati come sistemi del primo ordine.

(iii) Posto $u=\dot{x}/\omega$, l'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{x}=-\omega^2 x$, $x\in\mathbb{R}$, si può scrivere come il sistema del primo ordine $\dot{x}=\omega u$, $\dot{u}=-\omega x$. Integrarlo usando la (1.5.4) (e confrontare il risultato con la (1.3.12)).

1.5.C Sottoinsiemi e sottospazi invarianti. Più che al calcolo esplicito delle soluzioni in casi particolari, siamo interessati a comprendere le proprietà qualitative della dinamica definita dalle equazioni lineari. Per questo studio serve introdurre una nozione che incontreremo molte altre volte in seguito e svolge un ruolo importante nello studio qualitativo delle equazioni differenziali.

Definizione 1.5.3 *Sia X un campo vettoriale su Ω. Un sottoinsieme M di Ω è detto* invariante *per X e per l'equazione differenziale $\dot{z}=X(z)$ (e, se X è*

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

completo, per il suo flusso), se ogni curva integrale massimale di X con dato iniziale in M è interamente contenuta in M:

$$z_0 \in M \quad \Longrightarrow \quad \gamma_{z_0}(t) \in M \quad \forall t \in I_{z_0}\,.$$

In generale, stabilire se un generico sottoinsieme è invariante può essere difficile, perché servirebbe la conoscenza del flusso dell'equazione. Qui siamo però interessati al caso particolare di un'equazione lineare, per le quali lo spazio delle fasi è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, e all'esistenza di *sottospazi* invarianti di $\mathbb{R}^n$. Tali sottospazi sono facilmente caratterizzabili:

Proposizione 1.5.4 *Un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^n$ è invariante per $\dot z = Az$ se e solo se $AV \subseteq V$ (cioè se $Av \in V$ per ogni $v \in V$).*

Dimostrazione. Se V è un sottospazio e $AV \subseteq V$ allora anche $A^kV \subseteq V$ per tutti gli interi positivi k e dunque $\exp(A)V \subseteq V$. Siccome V è un sottospazio, per ogni $t \in \mathbb{R}$ è anche $tAV \subseteq V$ ($tAv = A(tv)$ e $tv \in V$ se $v \in V$) e dunque $\exp(tA)V \subseteq V$.

Viceversa, se V è un sottospazio invariante per $\exp(tA)$ e $v \in V$, la curva $t \mapsto \gamma(t) := \exp(tA)v$ passa per v a $t = 0$ ed è interamente contenuta in V. Di conseguenza $\gamma'(0) \in V$. Ma $\gamma'(0) = Av$. ■

Ricordiamo che, in algebra lineare, se A è una matrice $n \times n$, un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ tale che $AV \subseteq V$ è detto "invariante" per la matrice A. Pertanto, nel seguito, invariante per A e invariante per il flusso di $\dot z = Az$ sono sinonimi.

> **Osservazione:** La Proposizione 1.5.4 è un caso particolare di un risultato sull'invarianza delle sottovarietà dello spazio delle fasi per generiche equazioni differenziali, anche non lineari, che vedremo più avanti, nella sezione 2.7.

Esercizi 1.5.3 *(i) Il sottospazio generato da $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ è invariante per qualcuna delle due matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & D \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & D \end{pmatrix}$, con i blocchi a unidimensionale e D di dimensione $n-1$?*

1.5.D Struttura dei sistemi lineari diagonalizzabili. Lo studio qualitativo di un'equazione lineare $\dot z = Az$ in $\mathbb{R}^n$ poggia sulla linearità del flusso, che dà, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$\exp(tA)(v + w) \;=\; \exp(tA)v + \exp(tA)w \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,,$$

e sul fatto che, come abbiamo appena visto, un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ il quale sia invariante sotto la matrice A è invariante anche sotto $\exp(tA)$. Questi due fatti insieme suggeriscono una strategia *"divide et impera"* per lo studio dei sistemi lineari: decomporre lo spazio delle fasi in una somma diretta di sottospazi invarianti su ciascuno dei quali l'azione di $\exp(tA)$, e quindi il flusso

ESTRATTO

dell'equazione, sia semplice da determinare e descrivere. La teoria di Jordan fornisce un modo di trovare tali sottospazi.

Il caso più semplice è quello nel quale la matrice A sia diagonalizzabile. Vi è allora, come ora ricordiamo, una decomposizione di $\mathbb{R}^n$ in somma diretta di sottospazi invarianti di dimensioni 1 e 2, in cui i primi sono autospazi relativi agli autovalori reali ed i secondi sono sottospazi bidimensionali generati dalle parti reali ed immaginarie degli autovettori complessi relativi agli autovalori non reali. E la restrizione del flusso a ciascuno di questi sottospazi è semplice da descrivere.

Sia infatti A una matrice reale $n \times n$ la quale sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, abbia cioè n autovettori, in generale complessi, linearmente indipendenti (su $\mathbb{C}$). Essendo reale, A ha un certo numero $k \geq 0$ di coppie di autovalori complessi coniugati

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_k \pm i\beta_k$$

e un numero complementare $n - 2k \geq 0$ di autovalori reali

$$\alpha_{2k+1}, \ldots, \alpha_n \,,$$

con ciascun autovalore ripetuto tante volte quante la sua molteplicità. Sottintenderemo sempre che gli autovalori del primo gruppo (se presenti) non siano reali, cioè $\beta_j \neq 0$ per $j = 1, \ldots, k$.

Gli autovettori relativi agli autovalori reali possono essere scelti reali, mentre quelli relativi agli autovalori complessi sono necessariamente complessi. Però, essendo A reale, se $u \in \mathbb{C}^n$ è autovettore di A relativo ad un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$, il complesso coniugato $\overline{u}$ di u è autovettore relativo all'autovalore $\overline{\lambda}$ (se $Au = \lambda u$ allora $A\overline{u} = \overline{Au} = \overline{\lambda u} = \overline{\lambda}\overline{u}$). Da questo segue che gli autovettori relativi ad una coppia di autovalori complessi coniugati possono sempre essere scelti in modo da formare coppie complesse coniugate e che esiste una base

$$\{v_1 + iw_1, v_1 - iw_1, \ldots, v_k + iw_k, v_k - iw_k, v_{2k+1}, \ldots, v_n\}$$

di $\mathbb{C}^n$ costituita da k coppie di autovettori $v_1 \pm iw_1, \ldots, v_k \pm iw_k \in \mathbb{C}^n$ relativi agli autovalori complessi, con $v_j, w_j \in \mathbb{R}^n$, e da $n - 2k$ autovettori $v_{2k+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ relativi agli autovalori reali.[4]

Dall'indipendenza lineare dei n vettori $v_1 \pm iw_1, \ldots, v_k \pm iw_k$, $v_{2k+1}, \ldots, v_n$ segue che i n vettori reali

$$v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k, v_{2k+1}, \ldots, v_n \tag{1.5.9}$$

[4]Siccome A è diagonalizzabile, $\mathbb{C}^n$ è somma diretta degli autospazi relativi agli autovalori, e ciascuno di questi autospazi ha una base formata da autovettori (complessi). È ovvio che ogni autospazio relativo ad un autovalore reale ha anche una base formata da autovettori reali (esercizio). Sia λ un autovalore non reale di molteplicità m. Se $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{C}^n$ sono autovalori relativi a λ allora $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m \in \mathbb{C}^n$ sono autovettori relativi a $\overline{\lambda}$. Se $u_1, \ldots, u_m$ sono linearmente indipendenti allora anche $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$ lo sono e, siccome λ e $\overline{\lambda}$ sono autovalori distinti, così pure $u_1, \ldots, u_m, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$, che sono quindi una base per la somma diretta degli autospazi relativi a λ e $\overline{\lambda}$.

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

sono linearmente indipendenti (basta osservare che $av + bw = \frac{a-ib}{2}(v + iw) + \frac{a+ib}{2}(v - iw)$) e dunque formano anch'essi una base di $\mathbb{C}^n$. Ma essendo reali, essi formano anche una base di $\mathbb{R}^n$.

Si ha allora una decomposizione in somma diretta

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1, w_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k, w_k\rangle \oplus \langle v_{2k+1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n\rangle \tag{1.5.10}$$

e in essa, come ora mostriamo, ciascun sottospazio è invariante sotto A. Infatti, ogni sottospazio unidimensionale è un autospazio di A ($Av_j = \alpha_j v_j$) mentre per quelli bidimensionali si osservi che uguagliando le parti reali ed immaginarie dell'uguaglianza $A(v_j + iw_j) = (\alpha_j + i\beta_j)(v_j + iw_j)$ si ottiene

$$Av_j = \alpha_j v_j - \beta_j w_j\,, \qquad Aw_j = \beta_j v_j + \alpha_j w_j \tag{1.5.11}$$

e dunque $A(\langle v_j, w_j\rangle) \subseteq \langle v_j, w_j\rangle$. I sottospazi unidimensionali $\langle v_j\rangle$ e bidimensionali $\langle v_j, w_j\rangle$ della somma diretta (1.5.10) sono allora invarianti anche sotto $\exp(tA)$.

Per descrivere il flusso dell'equazione non ci resta dunque che determinare l'azione di $\exp(At)$ su ciascuno sottospazio della decomposizione (1.5.10). Per farlo, passiamo alla base di $\mathbb{R}^n$ formata dai vettori (1.5.9). Ricordiamo che questo si fa con la matrice P le cui colonne sono le componenti di questi vettori: $P = [v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k, v_{2k+1}, \ldots, v_n]$. Precisamente, se una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in sé ha matrice A relativamente alla base standard di $\mathbb{R}^n$, allora la sua matrice relativa alla base (1.5.9) è $P^{-1}AP$.

Proposizione 1.5.5 *Se A è diagonalizzabile, ed usando la notazione appena introdotta, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la matrice $P^{-1}\exp(tA)P$ ha la forma diagonale a blocchi*

$$\operatorname{diag}\left(e^{\alpha_1 t}R(\beta_1 t), \ldots, e^{\alpha_k t}R(\beta_k t), e^{\alpha_{2k+1}t}, \ldots, e^{\alpha_d t}\right) \tag{1.5.12}$$

con

$$R(x) := \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.5.13}$$

(la matrice di rotazione oraria di angolo x).

Dimostrazione. Come già notato, $P^{-1}\exp(tA)P = \exp(t\hat{A})$ con $\hat{A} = P^{-1}AP$. Le colonne di $\hat{A}$ sono formate dalle componenti, nella base (1.5.9), dei trasformati con A dei vettori di tale base. Esse dunque si ricavano dalle (1.5.11) per $j \le k$ e dalle $Av_j = \alpha_j v_j$ per $j > 2k$. Per esempio, le componenti di Av_1 sono $(\alpha_1, -\beta_1, 0, \ldots, 0)$, quelle di Aw_1 sono $(\beta_1, \alpha_1, 0, \ldots, 0)$, etc. Ne segue che $\hat{A}$ ha la forma diagonale a blocchi

$$\operatorname{diag}\left(B_1, \ldots, B_k, \alpha_{2k+1}, \ldots, \alpha_n\right), \tag{1.5.14}$$

ESTRATTO

con i blocchi 2×2

$$B_j \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \dots, k\,,$$

Poiché le potenze di una matrice a blocchi non ne mischiano i blocchi, neppure l'esponenziale lo fa e così

$$\exp(t\hat{A}) \;=\; \operatorname{diag}\big(\exp(tB_1), \dots, \exp(tB_k), e^{\alpha_{2k+1}t}, \dots, e^{t\alpha_n}\big)\,.$$

(Naturalmente, la struttura a blocchi di $\hat{A}$ e $\exp(t\hat{A})$ riflette il fatto che A e $\exp(tA)$ lasciano invariati i sottospazi della decomposizione (1.5.10)). Si noti ora che, se

$$B \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

dal momento che la matrice identità commuta con ogni altra matrice, si ha

$$\exp(tB) \;=\; \exp\begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ 0 & \alpha t \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & \beta t \\ -\beta t & 0 \end{pmatrix}.$$

Le due matrici esponenziali si calcolano facilmente (esercizio 1.5.1.v) e si trova

$$\exp(tB) \;=\; e^{\alpha t}\, R(\beta t)$$

con R come nella (1.5.13). Da questo segue la (1.5.12). ■

Proposizione 1.5.6 *Se A è diagonalizzabile allora, con la notazione corrente, per ogni $t \in \mathbb{R}$:*

i. La restrizione della mappa al tempo t del flusso di $\dot{z} = Az$ a ciascun sottospazio unidimensionale $\langle u_j \rangle$ è una dilatazione di fattore $e^{t\alpha_j}$.

ii. La restrizione della mappa al tempo t del flusso di $\dot{z} = Az$ a ciascun sottospazio bidimensionale $\langle v_j, w_j \rangle$ è simile alla composizione di una dilatazione di fattore $e^{\alpha_j t}$ e di una rotazione di angolo $\beta_j t$.

Dimostrazione. Se denotiamo $(y_1, \widetilde{y}_1, \dots, y_k, \widetilde{y}_k, y_{2k+1}, \dots, y_n)$ le coordinate $y = P^{-1}z$, la (1.5.12) mostra che la soluzione con dato iniziale y^0 ha componenti

$$\begin{pmatrix} y_j(t) \\ \widetilde{y}_j(t) \end{pmatrix} \;=\; e^{\alpha_j t} R(\beta_j t) \begin{pmatrix} y_j^0 \\ \widetilde{y}_j^0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \dots, k \tag{1.5.15}$$

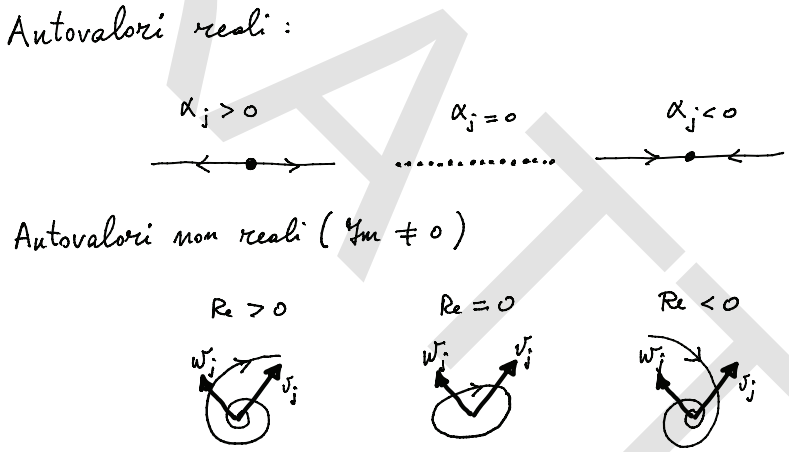
$$y_j(t) \;=\; e^{\alpha_j t} y_j^0\,, \qquad j = 2k+1, \dots, n\,. \tag{1.5.16}$$

Questo prova l'asserto, perché $(y_j, \tilde{y}_j)$ con $j \le k$ sono coordinate su $\langle v_j, w_j \rangle$ e y_j con $j > 2k$ è una coordinata su $\langle v_j \rangle$. (Il 'simile' in ii. segue dal cambiamento di base. In i. non è necessario, perché su sottospazi unidimensionali la similitudine è l'identità). ■

ESTRATTO

Dunque, la dinamica su ciascun autospazio unidimensionale $\langle u_j \rangle$ è un'espansione esponenziale se $\alpha_j > 0$ ed una contrazione esponenziale se $\alpha_j < 0$, mentre tutti i punti sono equilibri se $\alpha_j = 0$.

Su ciascun sottospazio bidimensionale $\langle v_j, w_j \rangle$, invece, viste nella base $\{v_j, w_j\}$ le orbite sono cerchi se la parte reale α_j dei due autovalori è nulla ed altrimenti sono spirali logaritmiche, percorse verso l'infinito se $\alpha_j > 0$ e verso l'origine se $\alpha_j < 0$. In tutti e tre i casi, rispetto alla base $\{v_j, w_j\}$, il verso di avvolgimento delle orbite è quello orario. Se si munisce il sottospazio $\langle v_j, w_j \rangle$ di un'altra base e della relativa orientazione, per esempio indotte dalla base standard di $\mathbb{R}^n$, i cerchi possono diventare ellissi, le spirali deformarsi corrispondentemente, e il verso di avvolgimento delle orbite può essere sia quello orario che quello antiorario. I tre ritratti in fase sul ciascun sottospazio bidimensionale $\langle v_j, w_j \rangle$ sono chiamati, rispettivamente, *centro* se $\alpha_j = 0$, *fuoco stabile* se $\alpha_j < 0$ e *fuoco instabile* se $\alpha_j > 0$.

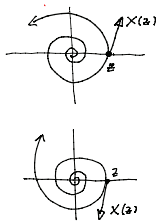


La Proposizione 1.5.6 fornisce una descrizione delle proiezioni della dinamica in $\mathbb{R}^n$ sui sottospazi invarianti della somma diretta (1.5.10) e dunque, indirettamente, della stessa dinamica in $\mathbb{R}^n$. Analizziamo questa descrizione nelle prossime sottosezioni, cominciando dal caso $n = 2$.

1.5.E Sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$ (matrice diagonalizzabile). Supponiamo che A sia una matrice 2×2 diagonalizzabile e consideriamo l'equazione $\dot{z} = Az$, $z \in \mathbb{R}^2$. La matrice A ha due autovalori che sono o complessi coniugati con parte immaginaria non nulla, e dunque distinti, o entrambi reali, distinti o coincidenti.

1. Autovalori complessi coniugati. Se gli autovalori di A sono $\alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$ allora, in base alla Proposizione 1.5.6, i possibili ritratti in fase sono, a seconda della parte reale α, o centri o fuochi stabili od instabili. Per deter-

ESTRATTO



minare il verso di avvolgimento delle orbite, se interessa, basta determinare la direzione del campo vettoriale in un punto diverso dall'origine, come illustrato nella figura affianco.

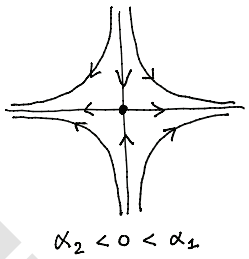
2. Autovalori reali, casi generici. Se i due autovalori α_1 ed α_2 sono reali le orbite vanno ricostruite tenendo conto del fatto che le componenti delle curve integrali su ciascun autospazio $\langle v_j \rangle$, $j = 1, 2$, sono dilatazioni di fattore $e^{\alpha_j t}$. Precisamente, le componenti sui due autospazi della curva integrale con dato inziale $u(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ sono

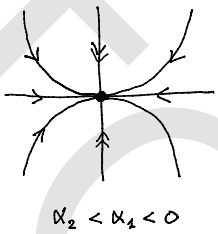
$$t \mapsto c_1 e^{\alpha_1 t} \qquad \text{e} \qquad t \mapsto c_2 e^{\alpha_2 t}$$

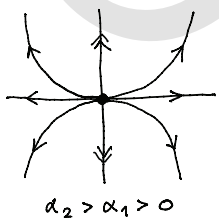
e da questo, per disegnarla, basta un po' di intuizione geometrica (oppure si veda l'esercizio 1.5.4.iv).

Consideriamo dapprima i casi, generici, nei quali i due autovalori sono distinti e diversi da zero. La matrice A è invertibile e l'origine è l'unico equilibrio. Inizialmente tracciamo i ritratti in fase nella base v_1, v_2, disegnando $\langle v_1 \rangle$ orizzontalmente e $\langle v_2 \rangle$ verticalmente.

- *Un autovalore positivo e uno negativo.* Supponiamo $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. La componente su $\langle v_1 \rangle$ di ogni curva integrale che non sia l'equilibrio tende all'origine per $t \to -\infty$ e all'infinito per $t \to +\infty$, mentre la componente su $\langle v_2 \rangle$ fa il contrario. Di conseguenza, escluse quelle sui due sottospazi $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$, tutte le orbite sono simili ad iperboli, con i due autospazi come asintoti. Questo ritratto in fase si chiama *sella*.
- *Due autovalori negativi e distinti.* Supponiamo $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$. Se si esclude l'equilibrio, sui due autospazi $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$ le curve integrali tendono a 0 per $t \to +\infty$ e all'infinito per $t \to -\infty$. Di conseguenza, tutte le altre curve integrali fanno lo stesso. Però, siccome per t grande è $e^{\alpha_2 t} \ll e^{\alpha_1 t}$, per $t \to +\infty$ la loro componente verticale va zero molto più velocemente di quella orizzontale, e l'orbita si schiaccia sull'asse verticale. Dunque, per $t \to +\infty$ tutte le orbite tendono all'origine disponendosi tangenti all'asse orizzontale $\langle v_1 \rangle$. Per $t \to -\infty$ entrambe le componenti tendono all'infinito, e quella verticale più rapidamente di quella orizzontale. Le orbite sono simili a mezze parabole, tangenti nell'origine all'autospazio $\langle v_1 \rangle$ che, si noti, è quello di modulo minore. (L'equazione dell'orbita è ricavata nell'esercizio 1.5.4.iv). Questo ritratto in fase si chiama *nodo stabile*.
- *Due autovalori positivi e distinti.* Se supponiamo $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, allora le curve integrali si ottengono da quelle del caso precedente cambiando di segno α_1, α_2 e t. Dunque le orbite sono le stesse, ma percorse in verso opposto. Escluse quelle sui due sottospazi $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2 \rangle$, esse sono dunque simili a mezze parabole tangenti nell'origine al sottospazio $\langle v_1 \rangle$, che anche è quello relativo all'autovalore di modulo minore, e sono percorsi dall'origine verso l'infinito. In particolare, tutte le soluzioni tendono all'origine per $t \to -\infty$ e (se si esclude l'equilibrio) all'infinito per $t \to +\infty$. Questo ritratto in fase si chiama *nodo instabile*.

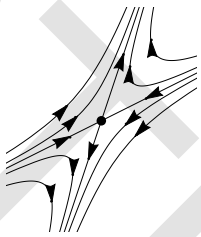




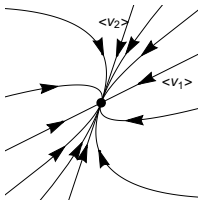


ESTRATTO

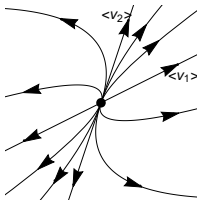
I ritratti in fase nelle coordinate originarie si ottengono con il cambiamento di coordinate $z = Py$, e sono qualitativamente simili.



Sella

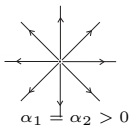


Nodo stabile

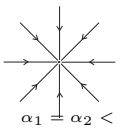


Nodo instabile

Casi non generici. Per completare l'analisi del caso con autovalori reali resta da costruire il ritratto in fase nei casi nei quali la matrice 2×2, ancora assunta diagonalizzabile, abbia due autovalori uguali oppure un autovalore nullo e l'altro diverso da zero.

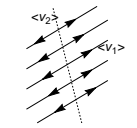


$\alpha_1 = \alpha_2 > 0$

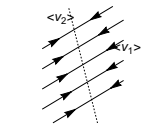


$\alpha_1 = \alpha_2 < 0$

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ la matrice A, essendo diagonalizzabile, è multipla dell'identità. Dunque tutti i vettori in $\mathbb{R}^2$ sono autovettori e il ritratto in fase è chiamato *nodo a stella*, *stabile* se $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$ e *instabile* se $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$. (Il caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ con A diagonalizzabile non ha interesse, perché allora A è la matrice nulla e tutti i punti sono equilibri).

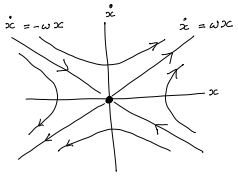


$\alpha_1 > 0 = \alpha_2$



$\alpha_1 < 0 = \alpha_2$

Infine, se un solo autovalore, per esempio α_1, è nullo, le orbite sono tutti i punti di $\ker A = \langle v_1 \rangle$ e tutte le semirette parallele a $\langle v_2 \rangle$ che da esso dipartono, con verso di percorrenza determinato dal segno di α_2.



Esempi: (i) *Il repulsore armonico.* Scritto come sistema del primo ordine, il repulsore armonico $\ddot{x} = \omega^2 x$, con $\omega > 0$, è il sistema lineare $\dot{z} = Az$ in $\mathbb{R}^2$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono $\lambda_\pm = \pm\omega$, e dunque l'origine è una sella. Gli autovettori sono $u_\pm = (1, \pm\omega)$.

(ii) *L'oscillatore armonico smorzato.* In presenza di smorzamento viscoso, l'equazione di un oscillatore armonico è

$$m\ddot{x} \;=\; -h\dot{x} - kx\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

ove m, k e h sono costanti positive. Posto $\mu = h/(2m)$ e, al solito, $\omega^2 = k/m$, l'equazione diviene

$$\ddot{x} \;=\; -2\mu\dot{x} - \omega^2 x\,. \tag{1.5.17}$$

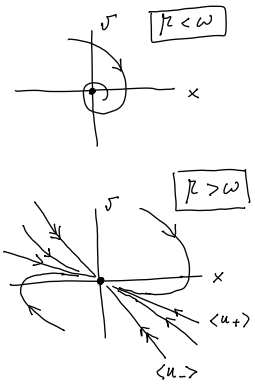
Come sistema del primo ordine essa è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \;=\; A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono

$$\lambda_\pm \;=\; -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$$

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)



e si conclude che:

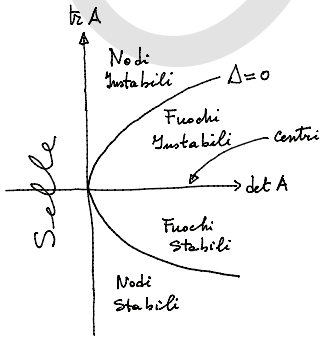
- Se $\mu < \omega$ (smorzamento debole) allora λ_- e λ_+ sono complessi, con parte reale negativa, e dunque il ritratto in fase è quello di un fuoco stabile. Il verso di avvolgimento delle spirali si determina senza difficoltà osservando che l'equazione è del secondo ordine.
- Se $\mu > \omega$ (smorzamento forte) allora λ_- e λ_+ sono entrambi negativi e il ritratto in fase è quello di un nodo stabile. Per tracciare il ritratto in fase bisogna ancora determinare gli autovettori di A relativi ai due autovalori $\lambda_\pm$: si trova $u_\pm = (1, \lambda_\pm)$. I relativi autospazi appartengono al secondo e al quarto quadrante e, poiché $|\lambda_-| > |\lambda_+|$, il ritratto in fase è quello mostrato in figura.

Si noti il diverso comportamento delle soluzioni nei due casi: se lo smorzamento è abbastanza piccolo, il sistema tende verso l'equilibrio in modo oscillatorio. Se lo smorzamento è forte, invece, il sistema tende verso l'equilibrio in modo monotono, non oscillatorio. Questa differenza è ovviamente importante nelle applicazioni. Se $\mu = \omega$ (smorzamento critico), la matrice A non è diagonalizzabile; questo caso è studiato nell'esercizio 1.5.5.i.

Osservazioni: (i) Il termine "generico" significa "tipico" e ha un significato preciso che dipende dal contesto matematico. Per noi, in un sistema che dipende da dei parametri reali, una proprietà *generica* è una proprietà che vale in un sottoinsieme aperto e denso dello spazio dei parametri. Questo implica, in particolare, che essa persiste sotto piccoli cambiamenti dei parametri. Nel caso considerato in questa sezione i parametri sono le 4 componenti $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ di una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e la proprietà considerata è che i due autovalori $\lambda_\pm$ della matrice siano distinti oppure non nulli. Dall'espressione degli autovalori (si veda l'esercizio 1.5.4.ii) si evince che $\lambda_+ = \lambda_-$ se e solo se $(a+d)^2 = 4(ad - bc)$ e che vi è un autovalore nullo se e solo se $ad = bc$. Il complementare in $\mathbb{R}^4$ di ciascuno di questi due insiemi è chiaramente aperto e denso.

(ii) Alla luce di quanto appena detto, il caso di autovalori puramente immaginari (che si verifica solo se $a + d = 0$ e $ad - bc > 0$) non è generico. Tuttavia, come si capirà in seguito, esso è di importanza fondamentale in meccanica (e più in generale nel caso di sistemi 'conservativi').

(iii) Attenzione: negli esercizi, se una matrice ha degli autovalori doppi è necessario controllare se è diagonalizzabile.



Esercizi 1.5.4 *(i) Mostrare che, se A è una matrice reale 2×2, il ritratto in fase di $\dot z = Az$ è una sella se e solo se* $\det A < 0$. [R]

(ii) Verificare che l'equazione caratteristica di una matrice A, 2×2, è

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$$

e che dunque i suoi autovalori sono $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}\Big)$. Dedurne che, se si escludono i casi nongenerici autovalori nulli ($\det A = 0$) o doppi ($D := (\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$), il tipo del ritratto in fase di $\dot z = Az$ è determinato dai valori della traccia e del determinante di

ESTRATTO

A come nella figura affianco (a volte chiamata "diagramma di biforcazione dei sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$"). [R]

(iii) Tracciare schematicamente il ritratto in fase dell'equazione $\dot{z} = Az$ nei casi seguenti, se rientrano fra quelli studiati in questa sezione:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, *(b)* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *(c)* $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,
(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *(e)* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *(f)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

[R]

(iv) Siano α_1 e α_2 due reali non nulli. Mostrare che le soluzioni del sistema

$$\dot{y}_1 = \alpha_1 y_1 \,, \qquad \dot{y}_2 = \alpha_2 y_2 \qquad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

con dati iniziali che non appartengono agli assi coordinati si svolgono sulle curve di equazione cartesiana

$$|y_2| = \text{cost}\, |y_1|^{\alpha_2/\alpha_1} \,.$$

Verificare che queste curve sono del tipo di quelle mostrate nella figura a pagina 45. [R]

(v) La più generale equazione lineare del secondo ordine con spazio delle configurazioni unidimensionale si può scrivere

$$\ddot{x} = \alpha x + 2\beta \dot{x} \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,,$$

con α e β costanti reali. Classificare (= dire se si tratti di sella, nodo, ...) il ritratto in fase del corrispondente sistema in $\mathbb{R}^2$ al variare dei due parametri α e β (si possono escludere i casi non generici $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\beta^2 + \alpha = 0$). [R]

(vi) Senza calcolare gli autovettori, ma usando solo argomenti qualitativi, mostrare che se un sistema lineare in $\mathbb{R}^2$ che corrisponde ad un'equazione del secondo ordine ha, come nel caso dell'oscillatore con forte smorzamento, un nodo stabile nell'origine allora necessariamente gli autospazi relativi ai due autovettori appartengono al secondo e quarto quadrante. E se il nodo è instabile? E se si ha una sella? [S]

(vii)* All'inizio della trattazione dei sistemi lineari con autovalori complessi abbiamo assunto $\beta > 0$. Cosa sarebbe cambiato se avessimo scelto $\beta < 0$? In particolare, sul verso di rotazione nei centri e di avvolgimento delle spirali nei fuochi? [R]

(viii)* Poiché gli autovettori di una matrice complessa sono determinati a meno di una coefficiente complesso, i due vettori reali v e w usati in questa sezione non sono univocamente determinati. Questa indeterminazione influenza in qualche modo le conclusioni raggiunte, per esempio quella sul verso di avvolgimento delle orbite? [Suggerimento: si ponga $u = v + iw$, $c = a + ib$ ed $u' = cu = v' + iw'$ con a, b, v, w, v', w' reali e si determinino v' e w' in funzione di v e w.]

1.5.F Sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$ (matrice non diagonalizzabile). Vediamo ora rapidamente quali ritratti in fase si incontrano, in $\mathbb{R}^2$, quando la matrice A non è diagonalizzabile (né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$). Si noti che questo può avvenire solo se A ha un autovalore doppio, e quindi necessariamente reale, che chiamiamo α. Poiché ogni matrice è simile ad una matrice triangolare superiore, possiamo limitarci, dopo un cambiamento di coordinate lineari, a studiare il caso di

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{1.5.18}$$

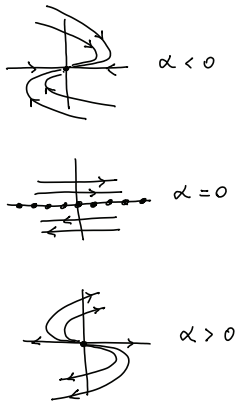
ESTRATTO

con $b \in \mathbb{R}$. Se $b = 0$ la matrice A è diagonale, ma se $b \neq 0$ non è diagonalizzabile perché vi è l'unico autovettore $(1, 0)$.

Si noti che $A = \alpha\mathbb{I} + bN$ con $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Siccome $\alpha\mathbb{I}$ e bN commutano e $N^2 = 0$ si ha $\exp(At) = \exp(\alpha t\mathbb{I}) \exp(btN) = e^{\alpha t}(\mathbb{I} + btN) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & bte^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}$. Ne segue che la soluzione con dato iniziale (x_0, y_0) è

$$x_t = e^{\alpha t}(x_0 + bty_0)\,, \qquad y_t = e^{\alpha t} y_0\,. \tag{1.5.19}$$

Studiandola, si vede che i ritratti in fase per $b < 0$ sono quelli mostrati affianco, e che quelli per $b > 0$ sono simili (si vedano gli esercizi). Se $\alpha \neq 0$, tutte le orbite sono tangenti al sottospazio $\langle v \rangle$ nell'origine, per $t \to \infty$ o per $t \to -\infty$ a seconda del segno di α. Il ritratto in fase si chiama *nodo degenere*, stabile o instabile a seconda del segno di α.



Per $\alpha = 0$ si ha il sistema $\dot{x} = by$, $\dot{y} = 0$; se $b = 1$ questo è il sistema del primo ordine corrispondente all'equazione $\ddot{x} = 0$ (la "particella libera unidimensionale" degli esercizi 1.3.6 e 1.5.2).

Osservazione: Il nodo degenere può essere pensato come limite di un nodo in una situazione nella quale $\alpha_\pm \to \alpha$ e $v_\pm \to v$. Questo aiuta a comprendere la transizione da fuoco a nodo nell'oscillatore armonico smorzato.

Esercizi 1.5.5 *(i) Quale è il ritratto in fase dell'oscillatore smorzato (1.5.17) nel caso critico $\mu = \omega$?* [R]

(ii) Verificare che i ritratti in fase dell'equazione di questa sezione, per $b > 0$, sono del tipo di quelli mostrati in figura. [S]

(iii) Mostrare, con un opportuno cambiamento di coordinate, che i ritratti in fase per $b < 0$ si ottengono riflettendo attorno all'asse x quelli per $b > 0$. [S]

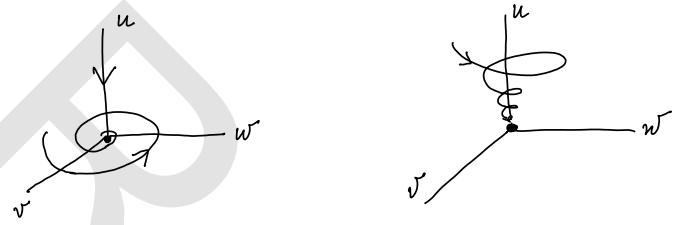
1.5.G Esempi in dimensione 3. Il flusso dell'equazione lineare $\dot{z} = Az$ in $\mathbb{R}^n$, con A diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$), è descritto dalle Proposizioni 1.5.5 e 1.5.6: vi è una decomposizione di $\mathbb{R}^n$ in somma diretta di sottospazi invarianti bidimensionali $\langle v_j, w_j \rangle$, generati dalle parti reali ed immaginarie degli autovettori complessi, e dagli autospazi unidimensionali $\langle v_j \rangle$ reali; la restrizione della dinamica a ciascuno di essi consiste di fuochi o centri su quelli bidimensionali e di dilatazioni o contrazioni esponenziali (o equilibri, se l'autovalore è nullo) su quelli unidimensionali. Questo fornisce una descrizione completa del flusso dell'equazione.

Esempi: Quando $n = 3$, dalla descrizione appena fornita del flusso si può cercare di ricostruire anche il ritratto in fase (nella base associata alla decomposizione in sottospazi invarianti; il passaggio alle coordinate originali produce poi solo una piuttosto innocua deformazione). Questo è graficamente semplice se la

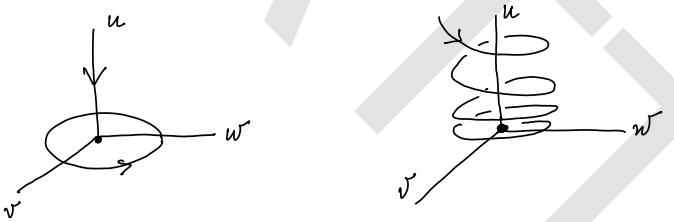
ESTRATTO

matrice ha una coppia di autovalori complessi, meno se gli autovalori sono tutti reali. Vediamo qualche semplice esempio.

(i) Supponiamo che la matrice abbia un autovalore reale negativo con autovettore u e due autovalori complessi con parte reale negativa ed autovettori $v \pm iw$. Allora la proiezione delle soluzioni su $\langle u \rangle$ tendono verso l'origine (per $t \to +\infty$). Le proiezioni delle soluzioni su $\langle v, w \rangle$ spiraleggiano verso l'origine (per $t \to +\infty$). Dunque, ogni soluzione spiraleggia verso l'origine lungo una spirale di asse l'autovettore reale u e di raggio che tende a zero.[5]



(ii) Si modifichi l'esempio precedente assumendo che i due autovalori complessi abbiano parte reale nulla. Le proiezioni delle soluzioni sul sottospazio $\langle v, w \rangle$ descrivono ora delle ellissi (dei cerchi, se si passa alla base formata dagli autovettori). Le orbite si proiettano su queste ellissi ed appartengono dunque a dei cilindri di asse u, sui quali si avvolgono come delle eliche, il cui passo tende a zero avvicinandosi al sottospazio $\langle v, w \rangle$.



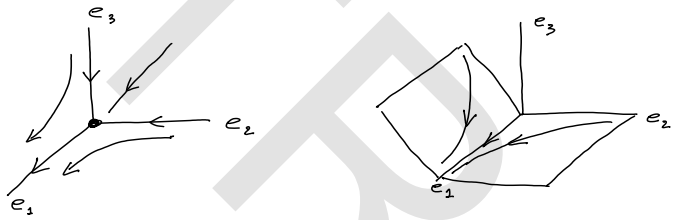
(iii) Consideriamo l'equazione $\dot{z} = Az$ con $A = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1)$. La descrizione precedente ci dice solo che le proiezioni di una soluzione $t \mapsto x(t)$ sui tre assi coordinati sono $e^t z_1(0)$, $e^{-t} z_2(0)$, $e^{-t} z_3(0)$, ma questo non dà molte informazioni sul ritratto in fase. Però, procedendo come nella sezione 1.5.E, possiamo capire come sono fatte le proiezioni delle soluzioni sui piani coordinati: su $\langle e_1, e_2 \rangle$ vi è una sella, su $\langle e_1, e_3 \rangle$ pure una sella, su $\langle e_2, e_3 \rangle$ un nodo a stella stabile.[6] Quest'ultimo fatto indica che una soluzione che non parta da nessuno dei tre piani coordinati resta sul piano che contiene il suo punto iniziale e l'asse e_1.

[5] In alcuni di questi disegni, per maggior chiarezza grafica, vengono mostrate un certo numero di 'spire' dei fuochi etc. Però questo non è realistico: a causa della dilatazione esponenziale, le soluzioni si allontanano all'infinito (e avvicinano a zero) così in fretta che, qualunque sia la scala, se si facessero i disegni al computer non verrebbero tracciate più di alcune spire.

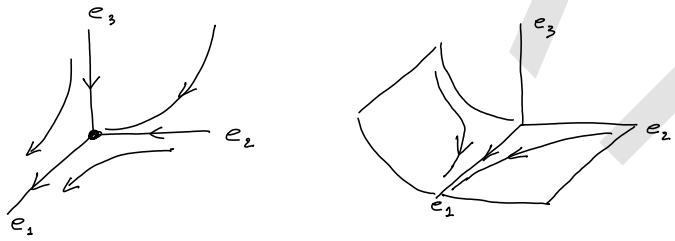
[6] D'ora in poi, $e_1, e_2, \ldots$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

ESTRATTO

Inoltre, dal fatto che le sue proiezioni sui piani $\langle e_1, e_2\rangle$ ed $\langle e_1, e_3\rangle$ siano iperboli di asintoti e_1, e_2 ed e_1, e_3 rispettivamente, si deduce che essa percorre una curva che tende asintoticamente all'asse e_1 per $t \to +\infty$ e al piano $\langle e_2, e_3\rangle$ per $t \to -\infty$ (in effetti tale curva è proprio un'iperbole, e questo segue dal fatto che l'autovalore -1 è doppio, ma questo fatto non è essenziale). Dunque, al di fuori degli assi e dei piani coordinati, il ritratto in fase consiste di curve (iperboli) disposte come in figura.



(iv) Se $A = \mathrm{diag}\,(1, -1, -2)$, su $\langle e_1, e_2\rangle$ ed $\langle e_1, e_3\rangle$ vi sono selle e su $\langle e_2, e_3\rangle$ un nodo stabile, con orbite tangenti all'asse e_2 per $t \to +\infty$. Per $t \to +\infty$, le orbite che non partono dai piani coordinati tendono ancora all'asse e_1, come nel caso precedente, ma ora 'schiacciandosi' sul piano $\langle e_1, e_2\rangle$ a seguito dal fatto che le loro proiezioni sul piano $\langle e_2, e_3\rangle$ segue una sorta di parabola tangente all'asse e_2.



1.5.H Esempio: Rotazioni in $\mathbb{R}^3$. L'equazione

$$\dot{z} \;=\; \omega \times z\,, \qquad z \in \mathbb{R}^3\,, \tag{1.5.20}$$

ove ω è un fissato vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, seppur semplice, ha dei motivi di interesse perché porta ad introdurre degli oggetti legati al gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$. È un'equazione lineare perché la mappa $z \mapsto \omega \times z$ di $\mathbb{R}^3$ in sé data dal prodotto vettore con un assegnato vettore ω lo è. Esaminiamo questa mappa, che riincontreremo (ed useremo) in seguito.

La nota proprietà $u \cdot \omega \times v = u \times \omega \cdot v = -\omega \times u \cdot v$ del prodotto misto significa che, per ogni $\omega \in \mathbb{R}^3$ fissato, la mappa lineare di $\mathbb{R}^3$ in sé data da $u \mapsto \omega \times u$ è antisimmetrica. Qualunque sia $\omega \in \mathbb{R}^3$, esiste dunque una matrice $\widehat{\omega}$ antisimmetrica ($\widehat{\omega}^T = -\widehat{\omega}$) 3×3 tale che

$$\widehat{\omega} u \;=\; \omega \times u \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3\,.$$

ESTRATTO

Un semplice calcolo mostra che, se $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, allora

$$\widehat{\omega} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.5.21}$$

La relazione fra prodotto vettore e matrici antisimmetriche è però più forte di così: poiché ogni matrice antisimmetrica 3×3 si può scrivere nella forma $\widehat{\omega}$ con opportuni $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, *ogni* matrice antisimmetrica 3×3 è la matrice del prodotto vettore con un vettore di $\mathbb{R}^3$. Osservando che l'insieme delle matrici antisimmetriche 3×3 è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 (che si denota $\mathrm{skew}\,(3)$) dello spazio vettoriale di dimensione 9 di tutte le matrici 3×3 (si vedano gli esercizi), si può anzi affermare che:

Proposizione 1.5.7 *La mappa* $\widehat{\ }\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{skew}\,(3)$, $\omega \mapsto \widehat{\omega}$, *definita dalla (1.5.21) è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Dimostrazione. La mappa $\widehat{\ }$ è lineare ed invertibile. ■

Studiamo ora il flusso della (1.5.20), ovvero $\dot{z} = \widehat{\omega} z$, e dato da

$$z_t = \exp(t\widehat{\omega}) z_0 \,.$$

Chiaramente, gli equilibri sono tutti i punti $z \in \mathbb{R}^3$ tali che $\omega \times z = 0$, ovvero tutti i punti del sottospazio $\langle \omega \rangle$.

Proposizione 1.5.8 *Per ogni* $\omega \in \mathbb{R}^3$ *non nullo e* $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t\widehat{\omega})$ *è la matrice di una rotazione (antioraria*[7] *rispetto ad* ω*) di angolo* $\|\omega\| t$ *ed asse* ω.

Dimostrazione. Usiamo il fatto che, se S è una matrice di rotazione, allora $S\widehat{\omega}S^{-1} = \widehat{S\omega}$ (esercizio 1.5.6.iii). Scegliamo S come una matrice di rotazione tale che $S\omega = \|\omega\| e_3$, con $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Allora, per la (1.5.21),

$$S\widehat{\omega}S^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\|\omega\| & 0 \\ \|\omega\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\exp(tS\widehat{\omega}S^{-1}) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\|\omega\| t & -\sin\|\omega\| t & 0 \\ \sin\|\omega\| t & \cos\|\omega\| t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

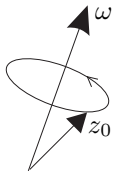
che è la matrice di rotazione (antioraria rispetto ad e_3) di angolo $\|\omega\| t$ ed asse e_3. Fissiamo ora un punto $z_0 \in \mathbb{R}^3$ e scriviamo $z_t = \exp(t\widehat{\omega}) z_0$. Siano poi $y_0 = S z_0$ e

[7] Facciamo la convenzione usuale: dire che il verso di una rotazione in $\mathbb{R}^3$ è antiorario rispetto ad un vettore ω significa che lo è per un osservatore con i piedi nell'origine e la testa sulla punta di ω.

ESTRATTO

$y_t = Sz_t$. Siccome $S\exp(t\widehat{\omega})S^{-1} = \exp(tS\widehat{\omega}S^{-1})$, si trova $y_t = \exp(tS\widehat{\omega}S^{-1})y_0$ e dunque y_t è ottenuto ruotando y_0 di un angolo $\|\omega\|t$ attorno ad e_3. Siccome S è una rotazione, $z_t = S^{-1}y_t$ è allora ottenuto ruotando dello stesso angolo z_0 attorno all'asse $S^{-1}e_3 = \omega/\|\omega\|$. Che la rotazione sia antioraria rispetto ad ω segue dal fatto che S, come ogni rotazione, preserva l'orientazione. Poiché questo è vero per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^3$, $\exp(t\widehat{\omega})$ è la matrice di una rotazione di angolo $\|\omega\|t$ e asse ω. ■

Dunque, il flusso della (1.5.20) consiste di rotazioni uniformi di asse ω e frequenza angolare $\|\omega\|$. Il vettore ω si chiama vettore *velocità angolare* della famiglia di rotazioni $\exp(t\hat{\omega})$, $t \in \mathbb{R}$.



Esercizi 1.5.6 *Ricordiamo che, da un punto di vista geometrico, una rotazione in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) è una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$ che preserva il prodotto scalare e l'orientazione. Da un punto di vista algebrico, la matrice $R \in L(d, \mathbb{R})$ associata ad una rotazione in $\mathbb{R}^n$ è una matrice ortogonale, soddisfa cioè $RR^T = \mathbb{I}$, ed inoltre ha determinante $+1$. L'insieme di tutte le matrici ortogonali $n \times n$ si denota $O(n)$, e forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione. Il sottogruppo di $O(n)$ formato dalle matrici ortogonali con determinante $+1$ si chiama il gruppo ortogonale speciale e si denota $SO(n)$.*

(i) Provare che l'insieme skew (3) *di tutte le matrici antisimmetriche 3×3 è un sottospazio vettoriale di $L(3, \mathbb{R})$ di dimensione 3.*

(ii) Assicurarsi di avere perfettamente chiari i seguenti fatti: Una matrice R soddisfa $Ru \cdot Rv = u \cdot v$ per tutti gli $u, v \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $RR^T = \mathbb{I}$. A sua volta, questo implica che R è invertibile con inversa $R^{-1} = R^T$ e $\det R = \pm 1$, cioè $R \in$ O(n); se $\det R = 1$ allora $R \in$ SO(n). Se $R, S \in$ SO(n) allora $RS \in$ SO(n). In $\mathbb{R}^2$, la matrice della rotazione antioraria di angolo α è $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. In $\mathbb{R}^3$, ogni matrice di rotazione R preserva il prodotto vettore: $R(u \times v) = (Ru) \times (Rv)$ per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$ (fare il prodotto vettore e poi ruotarlo è lo stesso che ruotare i vettori e poi farne il prodotto vettore).

(iii) Dimostrare che se $R \in$ SO(3) e $\omega \in \mathbb{R}^3$ allora

$$\widehat{R\omega} = R\widehat{\omega}R^T . \tag{1.5.22}$$

[Suggerimento: applicare le due matrici ad uno stesso vettore di $\mathbb{R}^3$, sostituire le matrici antisimmetriche con i prodotti vettori e sfruttare il fatto che, se $R \in$ SO(3), allora $R(u \times v) = (Ru) \times (Rv)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$]. [R]

(iv) Tracciare, o descrivere a parole, il ritratto in fase dell'equazione (1.5.20). [R]

(v)* (Rotazioni non uniformi con asse fissato). *Generalizzando l'esempio di questa sezione, mostrare che se $t \mapsto f(t)$ è differenziabile ed $\omega \in \mathbb{R}^3$ ha norma unitaria, allora le soluzioni dell'equazione differenziale non autonoma*

$$\dot{z} \;=\; f(t)\,\omega \times z \tag{1.5.23}$$

sono date da $z(t; z_0, t_0) = P_{t,t_0} z_0$ ove P_{t,t_0} è la matrice di rotazione antioraria di asse ω ed angolo $\int_{t_0}^{t} f(s)ds$ (mod2π). (Nota: Per ogni t, il vettore $f(t)\omega$ si chiama 'vettore velocità angolare istantanea' all'istante t. Per la validità di questo risultato è essenziale che la direzione della velocità angolare sia fissa: se essa cambia nel tempo non vi è una formula esplicita per la rotazione raggiunta dopo un tempo t).

ESERCIZIO

Esercizi 1.5.7 *In $\mathbb{R}^n$, $n \neq 3$, non esiste il prodotto vettore, ma esistono le matrici antisimmetriche. La naturale generalizzazione della (1.5.20) è allora*

$$\dot{z} = Az\,, \qquad z \in \mathbb{R}^n \tag{1.5.24}$$

con $A^T = -A$.

(i) Mostrare che, se $A^T = -A$, allora $(\exp A)^T = (\exp A)^{-1}$. [S]

(ii) Dedurne che il flusso della (1.5.24) consiste di matrici ortogonali: $z_t = R_t z_0$ con $R_t \in \mathrm{O}(n)$ per ogni t.

(iii) Provare che in realtà il flusso della (1.5.24) consiste di matrici $R_t \in \mathrm{SO}(n)$, cioè $\det R_t = 1$ per ogni t. [Suggerimento: $R_0 = \mathbb{I}$] [R]

(iv) Provare lo stesso fatto dell'esercizio precedente dando per nota la celebre identità

$$\det(\exp A) \;=\; \exp(\mathrm{tr}\, A)\,,$$

che vale per ogni matrice $A \in L(n, \mathbb{R})$. [S]

1.5.I Sottospazi stabile, instabile e centrale. Come abbiamo detto, l'interesse dei sistemi lineari è che essi emergono per linearizzazione agli equilibri di equazioni differenziali non lineari. Da questo punto di vista, delle soluzioni di un'equazione lineare ha interesse soprattutto il comportamento vicino all'origine, giacché è lì che si può sperare che la linearizzazione approssimi il sistema non lineare. In particolare, è interessante il *comportamento asintotico* verso l'origine delle soluzioni di un'equazione lineare. Essendo determinato dal segno della parte reale degli autovalori, tale comportamento non è in generale unico per tutto le soluzioni. Tuttavia, è possibile decomporre lo spazio delle fasi $\mathbb{R}^n$ di un sistema lineare nella somma diretta

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c \tag{1.5.25}$$

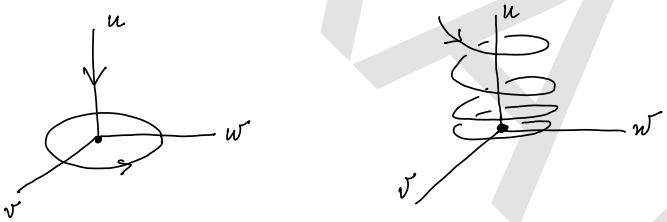
di tre sottospazi, che sono invarianti e su ciascuno dei quali vi è un definito comportamento asintotico verso l'origine:

- Il *sottospazio stabile* E^s, somma degli autospazi relativi agli autovalori reali negativi e dei sottospazi bidimensionali corrispondenti agli autovalori complessi con parte reale negativa. In E^s, tutte le soluzioni tendono asintoticamente all'origine per $t \to +\infty$ (e all'infinito per $t \to -\infty$, ma questo è meno significativo).
- Il *sottospazio instabile* E^u, somma degli autospazi relativi agli autovalori reali positivi e dei sottospazi bidimensionali corrispondenti agli autovalori complessi con parte reale positiva. In questo sottospazio, tutte le soluzioni tendono asintoticamente all'origine per $t \to -\infty$ (e all'infinito per $t \to +\infty$).
- Il *sottospazio centrale* E^c, somma dell'autospazio relativo all'autovalore nullo (se presente) e dei sottospazi bidimensionali corrispondenti agli autovalori immaginari. In questo sottospazio, nessuna soluzione tende all'origine per $t \to \pm\infty$ (e se, come supposto la matrice diagonalizzabile, neppure all'infinito).

ESTRATTO

In casi particolari, uno o più di questi sottospazi possono essere assenti perché mancano i corrispondenti autovalori. Come esempio, in $\mathbb{R}^2$, se il ritratto in fase è una sella allora i sottospazi stabile ed instabile sono gli autospazi relativi all'autovalore negativo e, rispettivamente, a quello positivo, mentre E^c è assente. Se il ritratto in fase è un nodo o un fuoco stabile allora vi è solo il sottospazio stabile, che coincide con $\mathbb{R}^2$. Se il ritratto in fase è un centro, vi è solo il sottospazio centrale.

Esempi: (i) La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori -1 e $\pm i$, con autovettori $u = (1,0,0)$ e $v \pm iw$, rispettivamente, ove $v = (0,0,1)$ e $w = (0,1,0)$. La matrice della mappa al tempo t del flusso è $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Il sottospazio unidimensionale parallelo ad u è il sottospazio stabile, il piano per l'origine ad esso ortogonale è il sottospazio centrale.



(ii) La matrice $A = \operatorname{diag}(1,-1,2)$ ha sottospazio stabile unidimensionale generato da $(0,1,0)$ e sottospazio instabile bidimensionale generato da $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$. Il ritratto in fase, nel sottospazio instabile, è quello di un nodo instabile. Tutte le soluzioni tendono asintoticamente a questo sottospazio. Provare a fare una figura.

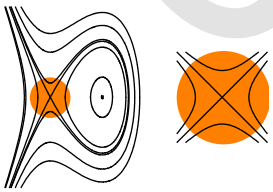
Osservazione: Se la matrice non è diagonalizzabile la definizione dei sottospazi stabile, instabile ed instabile è più delicata e richiederebbe la considerazione degli autovettori generalizzati. Da un punto di vista dinamico, la differenza principale riguarda il sottospazio centrale, perché se la matrice non è diagonalizzabile esso potrebbe contenere anche soluzioni non limitate (che peró vanno all'infinito con velocità polinomiale anziché esponenziale).

Esercizi 1.5.8 *(i) Determinare le dimensioni dei sottospazi stabile, instabile e centrale per le seguenti matrici:* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Specificare inoltre quale è il ritratto in fase su ciascuno di tali sottospazi, se bidimensionale. Fare un disegno molto schematico del ritratto in fase in* $\mathbb{R}^3$ *(anche senza determinare esattamente i sottospazi stabile, instabile, centrale).* [R]

ESTRATTO

1.5.J Dal lineare al nonlineare (solo uno sguardo). Siamo ora in grado di dire qualcosa di più preciso sulle relazioni fra le soluzioni di un'equazione differenziale $\dot z = X(z)$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ vicino ad un suo punto di equilibrio $\overline z$ e la sua linearizzazione in $\overline z$, cioè

$$\dot u \;=\; Au\,, \qquad u \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1.5.26}$$



Struttura locale
vicino a punto iperbolico

ove $A = X'(\overline z)$.

Una prima domanda è se, in un intorno sufficientemente piccolo del punto di equilibrio, il ritratto in fase del sistema nonlineare sia ben approssimato da quello del sistema linearizzato. Un importante risultato, il *teorema di Grobman–Hartman*, assicura che la risposta è affermativa se *tutti gli autovalori della matrice jacobiana nell'equilibrio hanno parte reale non nulla*. Si osservi che questo è un risultato locale: come mostrato nella figura affianco, in grande i due ritratti in fase possono essere completamente diversi.

Se invece vi sono autovalori con parte reale nulla, allora il fatto che i due ritratti in fase si "assomiglino" o no dipende anche dai termini nonlineari, e non si conosce una risposta completa a questa domanda; per qualche semplice esempio si vedano gli esercizi qui sotto.

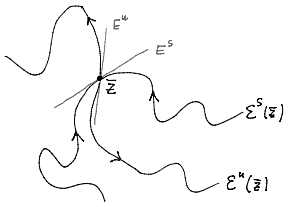
Data l'importanza dell'annullarsi o meno della parte reale degli autovalori della parte lineare del campo vettoriale, si usa la seguente terminologia, che con evidenza discende dai casi dell'oscillatore e del repulsore armonici: un equilibrio $\overline z$ di un'equazione differenziale $\dot z = X(z)$ è detto

- *iperbolico* se tutti gli autovalori di $X'(\overline z)$ hanno parte reale non nulla.
- *ellittico* se tutti gli autovalori di $X'(\overline z)$ sono puramente immaginari (ma non nulli).

Dunque, il teorema di Grobman–Hartman è relativo al solo caso di equilibri iperbolici.

Un altro importante risultato relativo agli equilibri iperbolici è il cosiddetto *teorema della varietà stabile*. Esso riguarda i moti che tendono asintoticamente all'equilibrio, nel futuro o nel passato. In generale, se $\overline z$ è un equilibrio di $\dot z = X(z)$, si definiscono gli *insiemi stabile* $\mathcal{E}^s(\overline z)$ *e instabile* $\mathcal{E}^u(\overline z)$ *di* $\overline z$ come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^s(\overline z) \;&=\; \big\{ z \in \Omega \,:\, \lim_{t\to+\infty} \gamma_z(t) = \overline z \big\} \\ \mathcal{E}^u(\overline z) \;&=\; \big\{ z \in \Omega \,:\, \lim_{t\to-\infty} \gamma_z(t) = \overline z \big\}\,. \end{aligned}$$



Questi sono due sottoinsiemi dello spazio delle fasi, e sono in realtà degli oggetti globali, nel senso che punti anche molto distanti da $\overline z$ possono appartenere ad essi. Non sono mai vuoti, perché $\overline z$ appartiene ad entrambi, e (essendo unioni di orbite) sono invarianti sotto il flusso di X. Per un equilibrio non iperbolico non si sa in generale dire molto sulla loro struttura. Se però $\overline z$ è iperbolico, allora essi hanno globalmente la struttura di sottovarietà immerse (o parametriche) e localmente, vicino a $\overline z$, sono approssimati dai sottospazi stabile E^s ed instabile E^u della linearizzazione $\dot u = X'(\overline z)u$. Più precisamente, se $\overline z$ è iperbolico, allora:

ESTRATTO

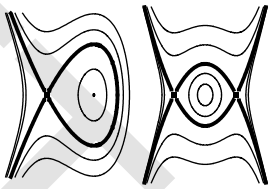
i. $\mathcal{E}^s(\overline{z})$ ($\mathcal{E}^u(\overline{z})$) è una sottovarietà immersa di Ω di dimensione uguale alla dimensione di E^s (di E^u)

ii. In $\overline{z}$, $\mathcal{E}^s(\overline{z})$ ($\mathcal{E}^u(\overline{z})$) è tangente a E^s (a E^u): $T_{\overline{z}}\mathcal{E}^s(\overline{z}) = E^s$, $T_{\overline{z}}\mathcal{E}^u(\overline{z}) = E^u$ ("teorema della varietà stabile"). Per questo motivo, nel caso di un equilibrio iperbolico $\mathcal{E}^s(\overline{z})$ e $\mathcal{E}^u(\overline{z})$ sono chiamate le *varietà stabile* ed *instabile* dell'equilibrio.

La conoscenza delle varietà stabile ed instabile può fornire delle informazioni globali sul flusso. Per esempio, nel caso semplicissimo di dimensione $n = 2$ e di un equilibrio iperbolico con $\dim E^s = \dim E^u = 1$ (la linearizzazione è una sella), le due varietà sono curve e, essendo invarianti, suddividono il piano in regioni invarianti; per questo motivo, esse sono in questo caso anche chiamate *separatrici*. Esse hanno dunque un effetto 'organizzativo' globale sul ritratto in fase. Incontreremo esempi di questa situazione già nella Sezione 3.3.

Notiamo, infine, che sotto opportune ipotesi vi è un analogo del sottospazio centrale, la *varietà centrale*; a differenza delle varietà stabili ed instabili, essa è però generalmente definita solo localmente vicino all'equilibrio.

Esercizi 1.5.9 *(i) Si consideri l'equazione $\dot{z} = X_k(z)$, $z \in \mathbb{R}$, con campo vettoriale $X_k(z) = kz + z^2$ dipendente dal parametro reale k. Confrontarne il ritratto in fase in un intorno dell'equilibrio $z = 0$ con quello della sua linearizzazione $\dot{z} = X_k'(0)z = kz$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Interpretare il risultato alla luce del teorema di Grobman-Hartman (in dimensione uno, l'autovalore della matrice jacobiana coincide con la derivata del campo vettoriale).* [R]



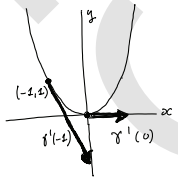
Osservazioni: (i) Il fatto che $\mathcal{E}^s(\overline{z})$ sia una sottovarietà, seppure immersa, implica che non può avere punti di autointersezione. Tuttavia, come mostrato nelle figure accanto, un ramo della varietà stabile può coincidere con un ramo della varietà instabile dello stesso o di un altro equilibrio.

(ii) Un enunciato preciso del teorema di Grobman–Hartman è un po' delicato. Per essere precisi, è innanzitutto necessario specificare cosa significhi che due ritratti in fase si 'assomiglino'. Normalmente, si vorrebbe che esista un cambiamento di coordinate $z \mapsto u(z)$ definito in un intorno del punto di equilibrio che in tale intorno trasformi[8] l'equazione $\dot{z} = X(z)$ alla sua linearizzazione $\dot{u} = Au$. Questo è *quasi* quello che succede: il teorema di Grobman–Hartman afferma che, nel caso iperbolico, esiste un *omeomorfismo* siffatto (cioè una biiezione continua con inversa continua).

[8] Vedremo nel prossimo capitolo come trasformano i campi vettoriali, e quindi le equazioni differenziali, sotto diffeomorfismi.

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

1.6 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi



Esercizi 1.1.1

(i) $\gamma'(t) = (1, 2t) \in T_{(t,t^2)}\mathbb{R}^2$. Dunque $\gamma'(0) = (1, 0) \in T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ e $\gamma'(-1) = (1, -2) \in T_{(-1,1)}\mathbb{R}^2$ (indicati con le freccie nella figura).
ii Segue da $\eta'(0) \in T_{\eta(0)}\Omega$, $\eta(0) = \gamma(t)$ ed $\eta'(0) = \frac{d}{ds}\gamma(t+s)|_{s=0} = \gamma'(t)$.
iii $\frac{d}{dt}(z + te_i)|_{t=0} = e_i$ è un vettore di $T_z\Omega$.
iv $\xi(t) = \gamma(t) + \eta(t) - z$; $\xi(t) = c\gamma(t) + (1 - c)z$.

Esercizi 1.2.1

(ii) Se $z_0 < 0$ allora l'intervallo di esistenza massimale è $(T_- = \frac{1}{z_0}, +\infty)$.

Esercizi 1.2.2

(i) (a) $\frac{1}{1-t}$. (b) $\frac{1}{\sqrt{1+2t}}$. (c) $2e^t - 1$. (d) -1 (soluzione costante).

Esercizi 1.2.3

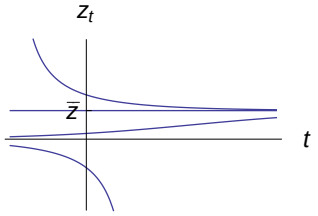
(i) Per la verifica basta osservare che $z(0) = z_0$ e, dopo aver calcolato $z'(t)$, che essa soddisfa l'equazione. Per ottenerla si procede come nella Proposizione 1.2.7. Il campo vettoriale $kz - hz^2$ si annulla per $z = 0$ e $z = k/h$. L'inversa della soluzione con ogni altro dato iniziale z_0 a $t_0 = 0$ è

$$\tilde{t}(z) \;=\; \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{ks - hs^2} \;=\; \frac{1}{k} \ln \frac{s}{k - hs}\bigg|_{s=z_0}^{s=z} \;=\; \frac{1}{k} \ln \frac{z(k - hz_0)}{z_0(k - hz)}\,.$$

Dunque $e^{k\tilde{t}(z)} = \frac{z(k-hz_0)}{z_0(k-hz)}$, da cui segue la (1.2.8).

(ii) No: le soluzioni con dato iniziale esterno all'intervallo $[0, \frac{k}{h}]$ vanno all'infinito in un tempo finito nel passato se il dato iniziale è positivo, nel futuro se il dato iniziale è negativo. Più dettagliatamente, con $\overline{n} = \frac{k}{h}$:

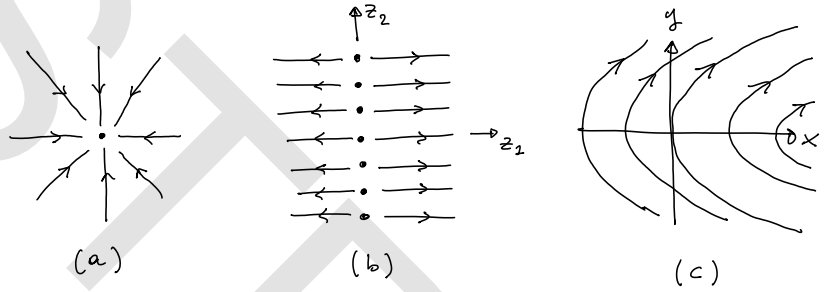
- Le soluzioni con $z_0 \in (0, \overline{z})$ sono crescenti e definite per tutti i tempi, hanno per immagine l'intervallo $(0, \overline{z})$ e tendono a 0 per $t \to -\infty$ e a $\overline{z}$ per $t \to +\infty$.
- Le soluzioni con $z_0 > \overline{z}$ sono decrescenti, hanno per immagine l'intervallo $(\overline{z}, +\infty)$, sono definite per tutti i tempi positivi e tendono a $\overline{z}$ per $t \to +\infty$, ma non sono definite per tutti i tempi negativi: esse tendono a $+\infty$ per $t \to T_- = \frac{1}{k} \ln(1 - \overline{z}/z_0) < 0$.
- Le soluzioni con $z_0 < 0$ sono decrescenti, hanno per immagine la semiretta negativa, sono definite per tutti i tempi negativi e tendono a 0 per $t \to -\infty$, ma non sono definite per tutti i tempi positivi: esse tendono a $-\infty$ per $t \to T_+ = \frac{1}{k} \ln(1 + |\overline{z}/z_0|) > 0$.



Esercizi 1.3.1

(i) (a) $z_1(t) = e^{-2t}z_1(0)$, $z_2(t) = e^{-2t}z_2(0)$.
(b) $z_1(t) = e^t z_1(0)$, $z_2(t) = z_2(0)$.
(c) Si integra prima la seconda: $y_t = y_0 + t$; sostituendola nella prima si trova $\dot{y} = y_0 + t$ che integrata dà $x_t = x_0 + y_0 t + t^2/2$; eliminando t si trova la famiglie di parabole $x = \frac{y^2}{2} + (x_0 - \frac{y_0^2}{2})$. Per l'orientamento, si noti che $t \mapsto y_t$ è crescente.

ESERCIZIO



(iii) Immagini continue di connessi sono connessi.

Esercizi 1.3.2

(i) I punti del nucleo della matrice A. Se A è invertibile, la sola origine $z = 0$. Nell'ultima domanda, tutti i punti $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) a: $(1, -1)$, $(-1, 1)$.
b: $(0, 0, \lambda)$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(0, \lambda, 1)$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$ (gli equilibri non sono isolati, ma formano due rette che si intersecano).
c: $(0, 0, 0)$ e $(-1, \lambda, 1)$ per tutti i $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) Tutti gli $z \in \mathbb{R}^3$ paralleli ad a.

(iv) È attrattivo solo quello in (a). Nessuno è repulsivo.

(v) No: esse sarebbero intrappolate in un compatto per tutti i tempi positivi per i quali esistono—e dunque esisterebbero per tutti i tempi positivi.

Esercizi 1.3.3

(i) No.

(iii) Bisogna usare l'unicità.

(iv) Suggerimento: L'orbita è diffeomorfa ad un cerchio. Le soluzioni su di essa esistono per tutti i tempi. Siccome l'orbita non contiene punti di equilibrio, le soluzioni su di essa avanzano in modo monotono e o fanno un giro completo sull'orbita e ritornano al loro punto iniziale o hanno un punto limite. Nel primo caso, una volta tornata al punto di partenza, la soluzione ripercorre l'orbita con la stessa legge oraria del giro precedente (invarianza per traslazioni temporali). Il secondo caso è impossibile, per il Lemma 1.3.6.

Esercizi 1.3.4

(iii) No, violerebbe l'unicità. Oppure, si ricordi che sono funzioni monotone del tempo.

Esercizi 1.3.5

(i) Contano solo zeri e segno del campo vettoriale.

Esercizi 1.3.6

(i) (a) $x = 1$; (b) $x = 0$; (c) $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$; (d) $x = 0, -1, 1$. (e) Tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

(ii) I punti dell'asse x sono equilibri. Le altre orbite sono le rette $v = \text{cost}$, percorse verso destra se $\text{cost} > 0$ e verso sinistra se $\text{cost} < 0$.

ESTRATTO

(iii) Suggerimento: mostrare che l'equazione dell'orbita è $x = \mathrm{cost} + v^2/(2g)$. Per la soluzione, vedere l'esercizio 1.3.1.i (c).

(iv) No: dovrebbero esservi punti dell'orbita nei quali la $t \mapsto x_t$ è decrescente, cosa impossibile se $v > 0$.

Esercizi 1.4.1

(i) (a) $\dot{\tilde{x}} = \tilde{x} + \tilde{y}$, $\dot{\tilde{y}} = 2\tilde{x}$ attorno a $(1, -1)$;
$\dot{\tilde{x}} = \tilde{x} + \tilde{y}$, $\dot{\tilde{y}} = -2\tilde{x}$ attorno a $(-1, 1)$.
(b) $\dot{\tilde{x}} = (\lambda - 1)\tilde{y}$, $\dot{\tilde{y}} = \tilde{x}$, $\dot{\tilde{z}} = \lambda\tilde{z}$ attorno a $(0, 0, \lambda)$;
$\dot{\tilde{x}} = \lambda\tilde{z}$, $\dot{\tilde{y}} = (1 - \lambda)\tilde{x}$, $\dot{\tilde{z}} = \tilde{x}$ attorno a $(0, \lambda, 1)$.
(La tilde denota le coordinate con l'origine traslata nell'equilibrio, $\tilde{z} = z - \overline{z}$).

Esercizi 1.4.2

(i) Gli equilibri sono $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$. Le linearizzazioni in essi sono, come sistemi del primo ordine,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \pi \\ v \end{pmatrix}.$$

Come equazioni del secondo ordine esse sono $\ddot{x} = -x - \dot{x}$ e, posto $y = x - \pi$, $\ddot{y} = y - \dot{y}$.

Esercizi 1.5.1

(ii) Basta calcolare $\exp(P^{-1}AP) = \sum_k \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k$ osservando che $(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$. Si trova $\exp(P^{-1}AP) = \sum_k \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\Big(\sum_k \frac{1}{k!}A^k\Big)P = P^{-1}\exp(A)P$.

(iii) Se A e B commutano, allora vale la formula binomiale di Newton. Dunque $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$
$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}A^nB^m = \exp(A)\exp(B)$.

(iv) $\exp(tA)u = \sum_k \frac{t^k}{k!}A^ku = \sum_k \frac{t^k}{k!}\lambda^k u = \exp(t\lambda)u$.

(v) $\mathbb{J}^{2n} = (-1)^n\mathbb{I}$, $\mathbb{J}^{2n+1} = (-1)^n\mathbb{J}$. Dunque $B^{2n} = (-1)^n\beta^{2n}\mathbb{I}$, $B^{2n+1} = (-1)^n\beta^{2n+1}\mathbb{J}$. Allora

$$\sum_{k\ pari}\frac{1}{k!}B^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}B^{2n} = \mathbb{I}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\beta^{2n} = \mathbb{I}\cos\beta$$

e

$$\sum_{k\ dispari}\frac{1}{k!}B^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}B^{2n+1} = \mathbb{I}\mathbb{J}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\beta^{2n+1} = \mathbb{J}\sin\beta.$$

Pertanto $e^B = \mathbb{I}\cos\beta + \mathbb{J}\sin\beta$, che dà il risultato cercato.

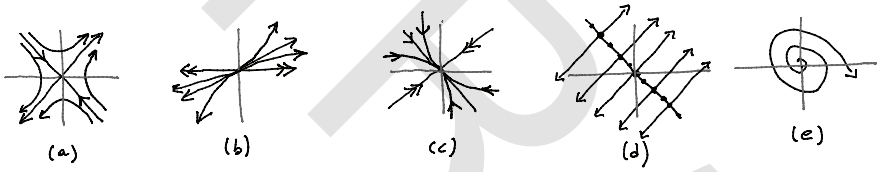
Esercizi 1.5.4

(i) Vi è una sella se e solo se la matrice ha un autovalore positivo ed uno negativo, e il determinante è il prodotto degli autovalori.

ESTRATTO

(ii) Se $\det A < 0$ vi è una sella. Se $\det A > 0$ ci sono tre casi. Se $D > 0$ i due autovalori sono reali e dello stesso segno (dunque nodo), e hanno lo stesso segno di $\operatorname{tr} A$. Se $D < 0$ i due autovalori hanno parte immaginaria $\neq 0$; la parte reale è negativa se $\operatorname{tr} A < 0$ (fuoco stabile), positiva se $\operatorname{tr} A > 0$ (fuoco instabile) e nulla se $\operatorname{tr} A = 0$ (centro).

(iii) (a) sella; (b) nodo instabile; (c) nodo stabile; (d) un autovalore è nullo, l'altro positivo; (e) fuoco instabile, e la spirale si svolge in senso orario; (f) centro. I ritratti in fase sono mostrati qui sotto. Gli assi coordinati sono in grigio. Nel caso dei nodi, la doppia freccia indica l'autovettore relativo all'autovalore di modulo maggiore.



(iv) Integrando le due equazioni si ha $y_1(t) = e^{\alpha_1 t} y_1(0)$, $y_2(t) = e^{\alpha_2 t} y_2(0)$. Quindi $|y_1(t)|^{\alpha_2} = e^{\alpha_1\alpha_2 t}|y_1(0)|^{\alpha_2}$, $|y_2(t)|^{\alpha_1} = e^{\alpha_1\alpha_2 t}|y_2(0)|^{\alpha_1}$. (Il valore assoluto serve perché la potenza a esponente reale è definita solo per base non negativa). Se $y_1(0) \neq 0$ e $y_2(0) \neq 0$, eliminando il tempo si trova $|y_1(t)|^{\alpha_2} = \text{cost}|y_2(t)|^{\alpha_1}$. Se $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ queste curve sono simili a iperboli; negli altri due casi sono simili a parabole tangenti nell'origine all'asse y_1 perché $|\alpha_2|/|\alpha_1| > 1$.

(v) Gli autovalori sono $\beta \pm \sqrt{\alpha + \beta^2}$. Se $\alpha > 0$ c'è una sella. Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ allora se $\beta^2 + \alpha > 0$ c'è un nodo instabile e se $\beta^2 + \alpha < 0$ c'è un fuoco instabile. Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ lo stesso, ma con nodo e fuoco stabili.

(vi) Il verso di percorrenza nei due semispazi $\dot{x} > 0$ e $\dot{x} < 0$ ....

(vii) Se si sostituisce $\beta > 0$ con $-\beta$, la rotazione (1.5.13) diventa antioraria. Ma bisogna anche sostituire w con $-w$. Il verso di avvolgimento è adesso antiorario nella base $\langle v, -w\rangle$, e quindi ancora oraria nella base $\langle v, w\rangle$.

Esercizi 1.5.5

(i) Un nodo degenere stabile.

(ii) Ottenere l'equazione cartesiana dell'orbita eliminando t nella (1.5.19) e studiarne il grafico.

(iii) Il cambiamento di coordinate $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, -y)$ trasforma il sistema $\dot{z} = Az$ in $\dot{z} = Bz$ con $B = \begin{pmatrix} \alpha & -b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Esercizi 1.5.6

(iii) $\widehat{R\omega}u = (R\omega) \times u = R(\omega \times R^T u) = S\widehat{\omega}R^T u$.

(iv) Le orbite sono i cerchi centrati sulla retta parallela ad ω e passante per l'origine, e ad essa ortogonali, e tutti i punti di tale retta, che sono equilibri.

Esercizi 1.5.7

(i) Usare la serie esponenziale.

(iii) Il determinante di una matrice ortogonale vale o $+1$ o -1. $t \mapsto R_t$ è continua, e il determinante è una funzione continua delle componenti della matrice. Dunque $\det R_t$ o vale sempre 1 o sempre -1. E all'istante $t = 0$ vale $+1$.

EDITATO

(iv) La traccia di una matrice antisimmetrica vale ....

Esercizi 1.5.8

(i) Nota: nel confrontare i risultati si tenga conto del fatto che, siccome gli autovettori complessi sono determinati a meno di un fattore moltiplicativo complesso, diverse scelte di uno di essi possono portare a diverse (e non parallele) scelte delle loro parti reale ed immaginaria v e w. È solo il sottospazio generato da questi due vettori ad essere univocamente determinato.

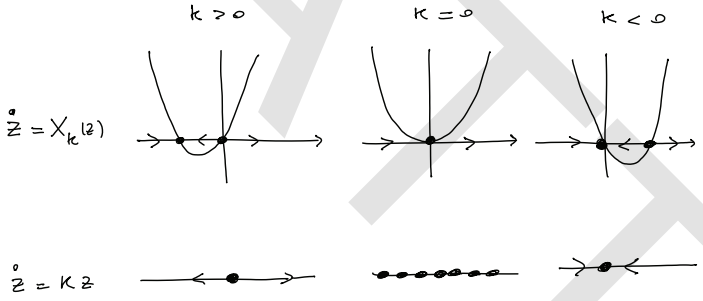
A_1: autovalori -1 e $1 \pm i$; sottospazio stabile unidimensionale (generato da $(1, -1, 2)$) e sottospazio instabile bidimensionale (generato da $(0, 2, 1)$ e $(1, 0, 0)$) nel quale il ritratto in fase è quello di un fuoco instabile.

A_2: autovalori $-1, 2, 1$; sottospazio stabile unidimensionale (generato da $(1, -1, 2)$) e sottospazio instabile bidimensionale (generato da $(0, -2, 1)$ e $(1, 0, 0)$) nel quale il ritratto in fase è quello di un nodo instabile.

A_3: autovalori 1 e $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$; sottospazio instabile unidimensionale (generato da $(0, 1, 0)$) e sottospazio stabile bidimensionale (generato da $(-1/2, 0, 1)$ e $(-\sqrt{3}/2, 0, 0)$) nel quale il ritratto in fase è quello di un fuoco stabile.

Esercizi 1.5.9

(i) L'equilibrio 0 è iperbolico se $X'_k(0) = k \neq 0$. Ritratti in fase:



(iii) Gli assi coordinati.

ESTRATTO

ESTRATTO

Capitolo 3

Integrali primi e simmetrie

Vi sono due elementi principali che rendono 'integrabile' un'equazione differenziale, e 'semplice' il suo flusso: gli integrali primi (chiamati anche costanti del moto o funzioni invarianti) e le simmetrie.

3.1 Integrali primi

3.1.A Integrali primi. Gli integrali primi sono un meccanismo molto importante per la produzione di insiemi invarianti, e di un tipo speciale.

Definizione 3.1.1 *Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è un* integrale primo *di un campo vettoriale X su Ω (e dell'associata equazione differenziale) se i suoi insiemi di livello sono invarianti per X.*

La condizione che f sia un integrale primo è dunque che si abbia, usando la solita notazione per le soluzioni massimali,

$$f(\gamma_z(t)) \;=\; f(z) \qquad \forall\, t,\, z\,.$$

Essa è spesso espressa dicendo che f è costante lungo le soluzioni dell'equazione, ovvero

$$\tfrac{d}{dt} f(\gamma_z(t)) = 0 \qquad \forall\, t,\, z\,.$$

Se X è completo queste condizioni divengono,

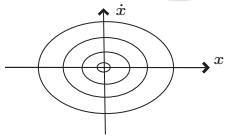
$$f \circ \Phi^X_t \;=\; f \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial}{\partial t} f \circ \Phi^X_t \;=\; 0 \qquad \forall\, t\,.$$

L'esistenza di un integrale primo può fornire informazioni utilissime sulle soluzioni di un'equazione differenziale, come mostra il seguente esempio.

F. Fasso` - Universita` di Padiva - Dispense per il corso di Fisica Matematica (2025-2026)

Esempio: L'energia $E(x,\dot{x}) := \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$ è un integrale primo per l'oscillatore armonico $m\ddot{x} = -kx$, $x \in \mathbb{R}$, cioè, propriamente, per il corrispondente sistema del primo ordine. Infatti, lungo una qualunque soluzione $t \mapsto x_t$ si ha

$$\frac{d}{dt}E(x_t,\dot{x}_t) \;=\; m\,\dot{x}_t\,\ddot{x}_t + k\,x_t\,\dot{x}_t \;=\; (m\,\ddot{x}_t + k\,x_t)\,\dot{x}_t \;=\; 0\,.$$



La costanza dell'energia implica che le orbite dell'oscillatore armonico appartengano agli insiemi di livello $E(x,\dot{x}) = \text{cost}$. Questi insiemi sono ellissi centrate nell'origine (se cost > 0) e l'origine stessa (se cost $= 0$). Così, in questo caso l'esistenza di un integrale primo permette di determinare il ritratto in fase senza dover prima integrare l'equazione. Si noti che per verificare la costanza di E non abbiamo dovuto conoscere le soluzioni: è bastato usare l'equazione differenziale. Questo è fondamentale, perché gli integrali primi sono utili soprattutto quando non si conoscono le soluzioni di un'equazione: sono uno strumento per avere delle informazioni su di esse. Questo è un fatto generale, che adesso formalizziamo.

Esercizi 3.1.1 *(i) Procedendo come nell'esempio precedente, verificare che la funzione $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2 x^2$ è un integrale primo del repulsore armonico $\ddot{x} = \omega^2 x$, $x \in \mathbb{R}$, ed usarla per tracciare il ritratto in fase.*

(ii) Siano U e V due insiemi invarianti tali che $U \cap V$ non sia vuota. $U \cap V$ è invariante? [R]

(iii) Si supponga che un'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ abbia gli assi coordinati invarianti. Mostrare che l'origine è un punto di equilibrio. [R]

(iv) Mostrare che, in $\mathbb{R}^2$, ogni orbita periodica divide $\mathbb{R}^2$ in due insiemi invarianti (tre, se si considera anche l'orbita). [R]

(v) Sia X un campo vettoriale (non necessariamente completo) il quale ha un integrale primo f. Mostrare che se un certo insieme di livello di f è compatto allora ogni curva integrale di X su tale insieme di livello è definita per tutti i tempi. [R]

3.1.B La derivata di Lie. Stabilire se un'equazione differenziale abbia integrali primi, e determinarli, può essere molto difficile. È invece facile verificare se una certa funzione sia un integrale primo di un'equazione differenziale e per farlo non è necessario conoscere le soluzioni dell'equazione. (Se no, sarebbe una nozione di scarsa utilità: un integrale primo è utile soprattutto quando *non* si conoscono le soluzioni dell'equazione, perché dà informazioni su di esse).

Procedendo come nell'esempio, infatti, per verificare se il valore di f cambi lungo una (qualunque) soluzione $t \mapsto z_t$ basta calcolare la derivata della funzione composta $t \mapsto f(z_t)$ ed usare $\dot{z}_t = X(z_t)$. Si trova

$$\frac{d}{dt}f(z_t) \;=\; f'(z_t)X(z_t) \;=\; X(z_t)\cdot\nabla f(z_t) \tag{3.1.1}$$

ove f' è la matrice jacobiana di f e ∇f il suo gradiente. Nello studio di questioni teoriche, però, è utile riguardare il risultato di questo calcolo in un modo appena diverso, nel quale non compaiano proprio le soluzioni dell'equazione:

ESTRATTO

Definizione 3.1.2 *Si chiama* derivata di Lie *della funzione* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *associata al campo vettoriale* X *su* Ω *la funzione*

$$L_X f \; : \; \Omega \; \to \; \mathbb{R}$$

definita da

$$L_X f \; := \; f' X \; = \; X \cdot \nabla f$$

In coordinate, $L_X f = \sum_{i=1}^{d} X_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$. La differenza, rispetto alla (3.1.1), è che $L_X f$ è riguardata come una funzione *sullo spazio delle fasi*, non delle soluzioni.

Proposizione 3.1.3 *Siano* X *un campo vettoriale su* Ω *ed* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione.*

i. Si ha $\frac{d}{dt} f(z_t) = (L_X f)(z_t)$ $\forall t$ *per ogni curva integrale* $t \mapsto z_t$ *di* X*, ovvero, se* X *è completo,*

$$\frac{d}{dt} f \circ \Phi_t^X \; = \; (L_X f) \circ \Phi_t^X \qquad \forall t \, . \tag{3.1.2}$$

ii. f *è integrale primo di* X *se e solo se* $L_X f = 0$*.*

Dimostrazione. (i) Questo non è altro che la (3.1.1). (ii) Se $L_X f = 0$ allora la (3.1.2) mostra che f è costante lungo ogni soluzione e dunque è un integrale primo. Se invece f è un integrale primo, allora la (3.1.2) dà $L_X f(z_t) = 0$ per ogni moto ed ogni istante. Prendendo $t = 0$ si ottiene $L_X f(z_0) = 0$ per ogni dato iniziale z_0, cioè per ogni punto dello spazio delle fasi. Dunque $L_X f = 0$. ■

Esempio: Sia X il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione dell'oscillatore armonico $m\ddot{x} = -kx$, $x \in \mathbb{R}$, cioè

$$X(x, v) \; = \; \begin{pmatrix} v \\ -kx/m \end{pmatrix}$$

e sia $E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ l'energia. Allora

$$L_X E \; = \; \begin{pmatrix} v \\ -kx/m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} kx \\ mv \end{pmatrix} \; = \; vkx + (-kx/m)mv \; = \; 0 \, .$$

Il confronto fra questo esempio e quello precedente mostra che, in pratica, per stabilire se una funzione f è un integrale primo di un'equazione differenziale $\dot{z} = X(z)$ si può indifferentemente verificare la condizione $L_X f = 0$

- o calcolando la derivata di Lie come $\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$, come fatto qui,
- o derivando f 'lungo le soluzioni', calcolando cioè $\frac{d}{dt} f(z_t)$ assumendo che $\dot{z}_t = X(z_t)$, come nell'esempio precedente.

ESTRATTO

Esercizi 3.1.2 *(i) Mostrare che, qualunque sia la funzione V, la "equazione di Newton unidimensionale" $m\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ha l'integrale primo 'energia totale' $E(x,\dot{x}) := \frac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + V(x)$.*

(ii) Stessa domanda per l'equazione di Newton $\ddot{x} = -\nabla V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, con l'integrale primo $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + V(x)$.

(iii) Calcolare la velocità di variazione dell'energia $E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ lungo le soluzioni dell'oscillatore armonico smorzato $m\ddot{x} = -kx - 2\mu\dot{x}$, $x \in \mathbb{R}$, ove k e μ sono costanti positive. [R]

(iv) Determinare dei valori delle costanti c_1 e c_2 in modo che la funzione $f(x,y) = c_1x^2 + c_2y^2$ sia integrale primo del sistema $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = -2x^2$ in $\mathbb{R}^2$. [R]

(v) Stessa domanda come in iv., ma per il sistema $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = 2x^2$ in $\mathbb{R}^2$. [R]

(vi) Osserviamo preliminarmente che, se f è un integrale primo, allora, così come i suoi insiemi di livello, anche i suoi insiemi di sottolivello $\{z \in \mathbb{R}^n : f(z) \le c\}$ sono insiemi invarianti. Mostrare che se

$$L_X f(z) \le 0 \qquad \forall\, z$$

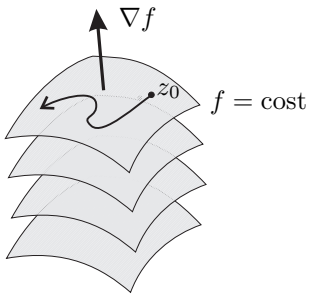
allora gli insiemi di sottolivello di f sono invarianti nel futuro. [R]

(vii) Mostrare che se $f(z,t)$ dipende anche dal tempo allora lungo le soluzioni di $\dot{z} = X(z)$ si ha $\frac{d}{dt}f(z_t,t) = L_X f(z_t,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(z_t,t)$.

(viii) Che relazione c'è fra la derivata di Lie $L_X f$ e le derivate direzionali della funzione f? [R]

> **Osservazione:** Ogni funzione costante è un integrale primo (di qualunque campo vettoriale), ma l'esistenza di tali integrali primi non ha ovviamente alcun interesse. Quando si parla di integrali primi si sottintende, tacitamente, che si escludono tali casi banali (torneremo su questo in un'osservazione nella sezione 3.1.C).

3.1.C Foliazione invariante. L'esistenza di integrali primi di un'equazione differenziale ha delle conseguenze sia geometriche che analitiche particolarmente forti, e facili da analizzare, se i loro insiemi di livello sono sottovarietà.



Consideriamo innanzitutto il caso di un'equazione differenziale in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ che possieda un integrale primo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ il quale non abbia punti critici (cioè punti nei quali si annulla il suo gradiente):

$$\nabla f(z) \neq 0 \qquad \forall\, z \in \Omega\,.$$

Sotto quest'ipotesi gli insiemi di livello di f sono sottovarietà differenziabili di Ω di dimensione $d-1$. Queste sottovarietà 'foliano' lo spazio delle fasi, nel senso che ne passa esattamente una per ogni punto (come i fogli di un libro). Dunque, l'esistenza di un integrale primo senza punti critici produce una foliazione dello spazio delle fasi in sottovarietà invarianti di dimensione d.

Una situazione analoga, ma più forte, vale se l'equazione differenziale ha più di un integrale primo. Se l'equazione ha $k \ge 1$ integrali primi $f_1, \dots, f_k$

ESTRATTO

allora ogni soluzione dell'equazione deve appartenere ad un insieme di livello di ciascuno di essi, e dunque all'intersezione di tutti questi insiemi di livello:

$$\{z \in \mathbb{R}^n \,:\, f_1(z) = c_1\,, \ldots\,,\; f_k(z) = c_k\}\,.$$

Questi insiemi sono sottovarietà di dimensione $d-k$ se la mappa $f = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è una sommersione, ovvero se la matrice jacobiana f', che ha dimensione $k \times d$, ha ovunque il rango massimo possibile k, ovvero

$$\text{rango}\,(f'(z)) \;=\; k \tag{3.1.3}$$

in tutti i punti $z \in \Omega$. In questo caso si dice anche che le funzioni $f_1, \ldots, f_k$ sono ovunque *funzionalmente indipendenti*, o più semplicemente *indipendenti*.[1]

Dunque, l'esistenza di k integrali primi ovunque funzionalmente indipendenti implica che lo spazio delle fasi è foliato in sottovarietà invarianti di dimensione $d-k$.

Ovviamente, se lo spazio delle fasi ha dimensione d, vi possono essere ha al più d integrali primi funzionalmente indipendenti. Tuttavia, il caso in cui $k = d$ non ha un'interesse immediato, perché è verificato solo se $X = 0$ (si vedano gli esercizi). Escluso questo caso banale, un'equazione differenziale in dimensione d ha al più $d-1$ integrali primi indipendenti. In tale caso (raro) gli insiemi di livello comuni degli integrali primi sono curve regolari e, come ora mostriamo, individuano le orbite: se da uno di esse si rimuovono tutti gli equilibri, le componenti connesse di quel che resta sono singole orbite:

Proposizione 3.1.4 *Sia Γ una sottovarietà connessa unidimensionale di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la quale sia invariante sotto il flusso di un campo vettoriale X e non contenga equilibri di X. Allora Γ è un'orbita di X. Se Γ è compatta (cioè una curva chiusa, diffeomorfa ad un cerchio), allora è un'orbita periodica di X.*

Dimostrazione. Siccome Γ è unidimensionale, il campo vettoriale X, essendo tangente ad essa e mai nullo su di essa, definisce un'orientazione su Γ; le soluzioni con dato iniziale su Γ, che restano su di essa per l'ipotesi di invarianza, sono monotone crescenti rispetto a tale orientazione.

Se $z_0 \in \Gamma$, l'orbita di z_0 è un sottoinsieme di Γ. Per assurdo, supponiamo che l'orbita di z_0 non coincida con Γ: esista cioè un punto $\overline{z} \in \Gamma$ che non appartiene all'orbita di z_0. Per fissare le idee, supponiamo che $\overline{z}$ segua z_0 nell'orientazione scelta su Γ. Allora la semiorbita positiva di z_0 è contenuta nell'arco $\hat{\Gamma}$ di Γ di estremi z_0 e $\overline{z}$. Poiché tale arco è compatto, la soluzione con

[1] Più precisamente, un *punto regolare* di una mappa $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è un punto nel quale essa è una sommersione, e un insieme di livello di f formato interamente da punti regolari è detto *regolare*. Punti ed insiemi di livello non regolari sono chiamati *critici*. Si dice anche che delle funzioni $f_1, \ldots, f_k : \Omega \to \mathbb{R}^k$ sono *funzionalmente indipendenti* in punto z se la mappa $f = (f_1, \ldots, f_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è una sommersione a z.

ESTRATTO

dato iniziale z_0 è definita per tutti i tempi positivi e, essendo monotona, deve avere limite $z_{+\infty} \in \hat{\Gamma}$ per $t \to +\infty$. Ma allora, per il Lemma 1.3.6, $z_{+\infty}$ è un equilibrio, contro l'ipotesi fatta.

Se Γ è compatta allora è una curva chiusa orientata, percorsa da $t \mapsto z_t$ in modo monotono. Se non esistesse $T > 0$ tale che $z_T = z_0$ allora la semi-orbita positiva di z_0 sarebbe contenuta in un arco compatto $\hat{\Gamma}$ contenuto propriamente in Γ e, come prima, si concluderebbe che dovrebbe esservi un equilibrio. ■

L'esistenza di $d-1$ integrali primi ovunque funzionalmente indipendenti fornisce dunque il ritratto in fase, senza bisogno di integrare l'equazione. Questa situazione è molto speciale, eccetto se $d = 2$ perché allora basta un solo integrale primo: l'abbiamo per esempio incontrata nel caso dell'oscillatore armonico e, nelle prossime due sezioni, la incontreremo in due casi di interesse in sé.

Osservazioni: (i) Quando si parla di integrali primi, un qualche requisito di indipendenza o sommersività è necessario perché, per esempio, ogni funzione costante è un integrale primo di ogni campo vettoriale, oppure se f è un integrale primo anche $2f$ ed f^2 lo sono, ma la considerazione di questi casi banali è priva di qualunque interesse. Per evitare un'eccessiva pedanteria di linguaggio, nel seguito, quando informalmente parleremo dell'esistenza di integrali primi, daremo per convenuto che non ci riferiremo a casi banali di questo tipo, e che qualche condizione di indipendenza è verificata, e precisabile se serve. Le necessarie ipotesi di indipendenza verranno comunque fatte nelle affermazioni più rigorose.

(ii) Naturalmente, l'ipotesi che gli integrali primi non abbiano punti critici è raramente soddisfatta. Tuttavia, una situazione che si incontra frequentemente è che vi siano 'pochi' punti critici e che gli insiemi regolari degli integrali primi formino un sottoinsieme 'significativamente grande' dello spazio delle fasi, per esempio aperto, o aperto e denso. In tali casi si restringe, più o meno tacitamente, l'analisi a questo sottoinsieme foliato da insiemi di livello regolari e, se serve, si studiano poi separatamente e con tecniche ad hoc gli insiemi di livello critici.

(iii) La condizione $L_X f = 0$ che caratterizza gli integrali primi ha un significato geometrico. Essa non è altro che $X \cdot \nabla f = 0$ e, in un punto z regolare di f, ove $\nabla f(z) \neq 0$, significa che X è tangente all'insieme di livello di f. Unitamente al fatto che gli insiemi di livello regolari di f sono sottovarietà chiuse (sono insiemi di livello di una funzione continua), alla luce della Proposizione 2.7.4 questo fornisce una giustificazione indipendente della loro invarianza. Nel caso di più integrali primi $(f_1, \dots, f_k)$, l'annullarsi di $L_X f_1, \dots, L_X f_k$ significa che X è ovunque ortogonale ai gradienti delle funzioni $f_1, \dots, f_k$ ed appartiene dunque al nucleo della matrice jacobiana $\frac{\partial f}{\partial z}$ che, in ogni punto di un insieme di livello regolare, coincide con lo spazio tangente.

Esercizi 3.1.3 *(i) Quali sono i punti critici dell'energia dell'oscillatore armonico? Che relazione c'è con la struttura degli insiemi di livello?* [R]

(ii) Stesso, ma per il repulsore armonico. [R]

ESTRATTO

(iii) Tracciare il ritratto in fase del sistema $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = -2x^2$ in $\mathbb{R}^2$ utilizzando l'integrale primo trovato nell'esercizio 3.1.2.iv.

(iv) Tracciare il ritratto in fase del sistema $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = 2x^2$ in $\mathbb{R}^2$ utilizzando l'integrale primo trovato nell'esercizio 3.1.2.v.

(v) Il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3 \ni (z_1, z_2, z_3)$

$$\dot{z}_1 \;=\; z_2 z_3\,, \qquad \dot{z}_2 \;=\; -z_1 z_3\,, \qquad \dot{z}_3 \;=\; 0$$

è un caso particolare della cosiddetta equazione di Eulero, che appare nello studio del moto dei corpi rigidi e la cui forma generale è scritta nell'esercizio (v).

- *Mostrare che questo sistema ha gli integrali primi $f_1(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2$ e $f_2(z_1, z_2, z_3) = z_3$, determinare ove essi sono funzionalmente indipendenti ed usarli per tracciare il ritratto in fase dell'equazione. È vero che tutte le soluzioni sono periodiche?*
- *Mostrare che anche $f_3(z_1, z_2, z_3) = \|z\|^2$ è un integrale primo. È indipendente dagli altri due? Usare f_2 ed f_3 per tracciare il ritratto in fase.*
- *Integrare il sistema. [Suggerimento: poiché $\dot{z}_3 = 0$, le prime due equazioni si riducono a quelle di un oscillatore armonico].* [R]

(vi) Mostrare che se un'equazione differenziale $\dot{z} = X(z)$ in $\mathbb{R}^n$ ha n integrali primi ovunque funzionalmente indipendenti allora $X = 0$. [R]

(vii) Sia $A = \operatorname{diag}(a, b, c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostrare che l'equazione di Eulero

$$\dot{z} \;=\; z \times Az\,, \qquad z \in \mathbb{R}^3\,,$$

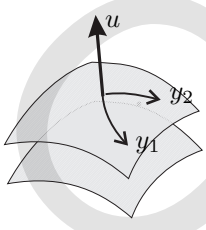
ha i due integrali primi $\|z\|^2$ e $z \cdot Az$. [Suggerimento: non scrivere l'equazione in coordinate, ma procedere vettorialmente: per esempio, poiché A è simmetrica e costante, si ha $\frac{d}{dt}(z \cdot Az) = \dot{z} \cdot Az + z \cdot A\dot{z} = 2\dot{z} \cdot Az = \ldots$] [R]

3.1.D Abbassamento della dimensione per mezzo di integrali primi. Equazione ristretta. L'esistenza di integrali primi, e della corrispondente foliazione invariante, ha anche un aspetto analitico: permette di 'abbassare' la dimensione dell'equazione:

Proposizione 3.1.5 *Supponiamo che un'equazione differenziale $\dot{z} = X(z)$, con spazio delle fasi d-dimensionale Ω, abbia k integrali primi $f = (f_1, \ldots, f_k)$ che soddisfano la condizione di indipendenza funzionale (3.1.3) in un punto $z \in \Omega$. Allora esiste un sistema di coordinate $(y, u) = (y_1, \ldots, y_{d-k}, u_1, \ldots, u_k)$ definito in un intorno di z nelle quali l'equazione differenziale prende la forma*

$$\dot{y} \;=\; Y(y, u)\,, \qquad \dot{u} \;=\; 0\,, \tag{3.1.4}$$

con qualche funzione $Y = (Y_1, \ldots, Y_{d-k})$.



Dimostrazione. Per il Lemma 2.6.4, in un intorno di ogni punto nel quale vale la (3.1.3) si possono trovare delle coordinate (y, u) nelle quali gli insiemi di livello di f sono descritti da $u = \text{cost}$. Dunque, $u_1, \ldots, u_k$ sono integrali primi dell'equazione differenziale. Pertanto, scritta in queste coordinate, essa ha necessariamente la forma (3.1.4). ■

ESTRATTO

Le coordinate u, essendo costanti sugli insiemi di livello degli integrali primi f, sono funzioni di essi; volendo, si potrebbero prendere come u proprio le f. La determinazione delle restanti coordinate y (che sono coordinate locali sugli insiemi di livello di f) può essere più o meno difficoltosa, a seconda del problema (ma la dimostrazione della Proposizione 2.6.4 mostra che esse possono essere scelte come $d-k$ opportune delle coordinate in Ω).

La Proposizione assicura dunque che, a parte difficoltà di calcolo, l'esistenza di k integrali primi indipendenti permette di ridurre, almeno localmente, lo studio di un sistema di d equazioni differenziali allo studio di una *famiglia* di sistemi 'ristretti' di sole $d-k$ equazioni differenziali

$$\dot{y} \;=\; Y(y,u) \tag{3.1.5}$$

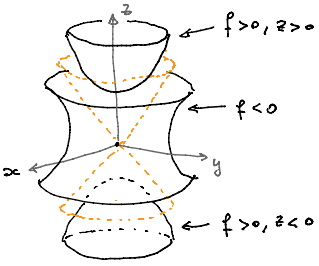
che dipendono, parametricamente, dalle coordinate (costanti) u, cioè dagli integrali primi: vi è un sistema ristretto su ciascun insieme di livello degli integrali primi. I singoli sistemi ristretti, essendo di dimensione inferiore, possono risultare più facilmente studiabili di quello di partenza. In casi speciali essi sono integrabili e questa tecnica permette l'integrazione del sistema di partenza.

Esempi: (i) Il sistema

$$\dot{x} = yz^2\,, \quad \dot{y} = -x(x-1)^2z^2\,, \quad \dot{z} = (2-x)x^2yz \tag{3.1.6}$$

in $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z)$ ha l'integrale primo

$$f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$$



(verificarlo). Siccome $f'(x,y,z) = (-2x,-2y,2z)$ l'unico punto critico di f è l'origine, e quindi tutti gli insiemi di livello di f eccetto quello che contiene l'origine, in cui $f=0$, sono superfici regolari. L'insieme di livello critico è il cono $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Gli insiemi di livello regolari sono iperboloidi di rotazione attorno all'asse z. Precisamente, se $c>0$ l'insieme di livello $f(x,y,z)=c$ è un iperboloide a due falde (o iperboloide ellittico), le cui due componenti connesse giacciono una nel semipiano $z>0$ e una nel semipiano $z<0$, all'interno del cono $f=0$. Se $c<0$, l'insieme di livello è un iperboloide a una falda (o iperboloide iperbolico) che giace all'esterno del cono $f=0$. Si possono introdurre coordinate adattate separatamente in queste tre regioni.

Per esempio, nella regione interna al cono e con $z>0$, ogni superficie $f=c>0$ è il grafico della funzione $(x,y)\mapsto\sqrt{c+x^2+y^2}$ e si possono quindi usare $u=f$, che fissa l'insieme di livello di f, e le coordinate x,y, che fissano i punti sulla falda superiore di $u=f$. Specificamente, consideriamo il cambio di coordinate

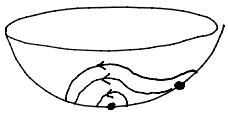
$$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+ \ni (x,y,u) \mapsto (x,y,\sqrt{u+x^2+y^2}) \in \{(x,y,z) : z > \sqrt{x^2+y^2}\}\,.$$

L'equazione (3.1.6) diviene

$$\dot{x} = y(u+x^2+y^2)\,, \qquad \dot{y} = -x(x-1)^2(u+x^2+y^2)\,, \qquad \dot{u}=0\,.$$

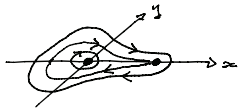
Per ogni fissato $u>0$, le prime due equazioni sono l'equazione ristretta all'insieme di livello $z=\sqrt{u+x^2+y^2}$. Si può osservare che, siccome il fattore

ESTRATTO



$u + x^2 + y^2$ è ovunque positivo, il ritratto in fase del sistema ristretto è lo stesso di quello del sistema

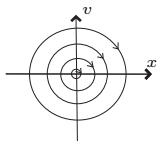
$$\dot{x} = y\,, \qquad \dot{y} = -x(x-1)^2\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.1.7}$$



(che è un'equazione del secondo ordine). Poiché esso non dipende da u, tutti i sistemi ristretti hanno lo stesso ritratto in fase (ma non la stessa parametrizzazione delle soluzioni, che cambia dall'uno all'altro). Il ritratto in fase di (3.1.7) in $\mathbb{R}^2$ è mostrato affianco (impareremo come farlo nella sezione 3.3); nella figura è anche mostrato il ritratto in fase su una delle superfici $f = u$, $z > 0$.

(ii) Quando vi sono $d-1$ integrali primi, i loro insiemi di livello regolari sono curve unidimensionali e, come sappiamo, se non contengono equilibri sono singole orbite. In ogni sistema di coordinate adattate (y, u), le $u \in \mathbb{R}^{d-1}$ fissano tali curve e la $y \in \mathbb{R}$ è una coordinata lungo di essa. L'equazione ristretta a $u =$ cost, $\dot{y} = Y(y,u)$, determina dunque la legge oraria $t \mapsto y(t)$ sulle orbite che compongono $u =$ cost, scritta usando la coordinata y su di essa.

Per esempio, l'oscillatore armonico $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x$ ha l'integrale primo $x^2 + v^2$, i cui insiemi di livello regolari sono i cerchi con centro l'origine. Una scelta di coordinate nel piano delle fasi (privato dell'origine) adattate alla foliazione invariante sono dunque le coordinate polari, che denotiamo qui (y, u), con u la distanza dall'origine ed y l'angolo: $x = u\cos y$, $v = u \sin y$. In queste coordinate il sistema $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x$ diventa



$$\dot{y} \;=\; -1\,, \qquad \dot{u} \;=\; 0$$

(si veda l'esercizio 2.4.1.iii, con $\omega = 1$). La seconda equazione costituisce l'equazione ristretta. Il fatto che essa sia la stessa per tutti i valori dell'integrale primo riflette l'*isocronia* dell'oscillatore armonico: tutti i moti hanno lo stesso periodo.

Usiamo ora l'equazione ristretta per determinare la legge oraria (già ben nota). L'equazione $\dot{y} = -1$ ha soluzioni $y_t = y_0 - t$. Sostituendo questa espressione e la $u_t = u_0$ nelle equazioni che esprimono il cambio di coordinate otteniamo

$$x_t = u_t \cos(y_0 - t) = u_0 \cos y_0 \cos t + u_0 \sin y_0 \sin t = x_0 \cos t + v_0 \sin t$$

ed in modo analogo $v_t = u_t \sin(y_0 - t) = v_0 \cos t - x_0 \sin t$.

(iii) Il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3)$

$$\dot{x}_1 \;=\; x_2 x_3\,, \qquad \dot{x}_2 \;=\; -x_1 x_3\,, \qquad \dot{x}_3 \;=\; 0 \tag{3.1.8}$$

già considerato negli esercizi 3.1.3, ha i due integrali primi $f_1 = x_1^2 + x_2^2$ ed $f_2 = x_3$. Come coordinate (y, u_1, u_2) adattate alla foliazione invariante possiamo prendere $u_1 = x_3$ e le coordinate polari (u_2, y) nel piano (x_1, x_2):

$$x_1 = u_2 \cos y\,, \qquad x_2 = u_2 \sin y\,, \qquad x_3 = u_1\,,$$

cosicché $f_2 = u_1$ ed $f_3 = u_2^2$. Naturalmente, queste coordinate sono definite solo per $u_2 > 0$, cioè fuori dall'asse x_3 (che però consiste di equilibri). Nelle coordinate (u_1, u_2, y) il sistema diviene

$$\dot{y} = -u_1\,, \qquad \dot{u}_1 = 0\,, \qquad \dot{u}_2 = 0$$

ESTRATTO

(verificarlo). L'equazione ristretta $\dot{y} = -u_1$ dipende ora dal valore di uno dei due integrali primi. Integrando l'equazione ristretta abbiamo $y(t) = y(0) - tu_1$, che fornisce la legge oraria. Nelle coordinate originali, le curve $t \mapsto (y(0)-tu_1, u_1, u_2)$ sono rotazioni uniformi di asse l'asse x_3 e con frequenza angolare $-u_1 = -x_3$ (che cambia da superficie di livello a superficie di livello dell'integrale primo $u_1 = x_3$).

Osservazioni: (i) Il sistema 'ristretto' è spesso chiamato 'ridotto'. Preferiamo evitare l'uso del termine ridotto perché, come vedremo quando parleremo delle simmetrie dei sistemi lagrangiani, tale termine designa anche una situazione un po' diversa, ed è bene non confonderle.

(ii) Per ogni u fissato, la (3.1.5) è un esempio di equazione differenziale su una varietà (l'insieme di livello di f dato da quei valori delle u), scritta usando le y come coordinate su tale varietà.

Esercizi 3.1.4 *(i) Il sistema in* $\mathbb{R}^2 \ni (z_1, z_2)$

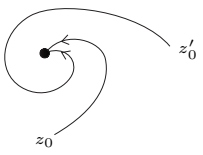
$$\dot{z}_1 \;=\; -(z_1^2 + z_2^2)z_2\,, \qquad \dot{z}_2 \;=\; (z_1^2 + z_2^2)z_1$$

ha l'integrale primo $z_1^2+z_2^2$*. Verificarlo, ed utilizzare poi questo integrale primo per abbassare l'ordine dell'equazione scrivendo l'equazione ristretta agli insiemi di livello dell'integrale primo e determinando la legge oraria. [Suggerimento: un sistema di coordinate adattate all'integrale primo sono quelle polari].* [R]

(ii) Abbassare la dimensione dell'equazione del repulsore armonico $\dot{x} = v$, $\dot{v} = x$ *in* $\mathbb{R}^2 \ni (x, v)$ *sfruttando l'integrale primo* $v^2 - x^2$ *e le coordinate* $(y, u) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ *tali che* $x = u \sinh y$, $v = u \cosh y$ *(le quali sono definite nel cono* $|v| > |x|$*; per il cono* $|v| < |x|$ *basta scambiare* sinh *e* cosh*).* [R]

3.1.E Integrali primi e attrattività degli equilibri. L'esistenza anche di un solo integrale primo (non banale) ha una importante conseguenza: rende impossibile l'esistenza di equilibri attrattivi:

Proposizione 3.1.6 *Se un'equazione differenziale ha un equilibrio attrattivo* $\overline{z}$ *allora esiste un intorno* V *di tale equilibrio nel quale ogni integrale primo dell'equazione è costante.*



Dimostrazione. Sia f un integrale primo e $\overline{z}$ un equilibrio attrattivo. Allora esiste un intorno V di $\overline{z}$ tale che $\lim_{t\to+\infty} z_t = \overline{z}$ per ogni soluzione z_t con dato iniziale $z_0 \in V$. Siccome f è integrale primo, $t \mapsto f(z_t) = f(z_0)$ è una funzione costante da $\mathbb{R}$ in V. Essa ha pertanto limite per $t \to +\infty$, e questo limite vale $f(z_0)$. Ma f è continua, e quindi $\lim_{t\to+\infty} f(z_t) = f(\lim_{t\to+\infty} z_t) = f(\overline{z})$. Dunque $f(z_0) = f(\overline{z})$ per ogni $z_0 \in V$. ■

A causa di questo, la caratterizzazione delle proprietà di stabilità degli equilibri di equazioni differenziali che abbiano degli integrali primi devono fare riferimento a comportamenti non attrattivi, quali quelli dei centri, ed il loro studio è più delicato. La nozione di stabilità appropriata per questi casi è quella di stabilità alla Lyapunov, che verrà trattata in seguito.

ESTRATTO