Proposizione 5.5 *Esiste una ed una sola curva massimale di X per ogni punto $p \in M$.*

Non dimostriamo questo fatto, ma osserviamo che esso si prova applicando il teorema di esistenza e unicità per le ODE alle rappresentative locali dei campi vettoriali, incollando le soluzioni locali grazie all'unicità e considerando infine la loro estensione massimale.

Esercizi 5.2.1 *(i) Si verifichi in tutti i dettagli la (5.2.1). [Suggerimento: calcolare $T(\phi \circ \gamma)(t, 1)$ direttamente e con la chain rule].* [R]

5.2.B Il flusso di un campo vettoriale. Un campo vettoriale è detto *completo* se tutte le sue curve integrali massimali hanno intervallo di esistenza $I = \mathbb{R}$. In geometria differenziale di solito si considerano solo campi vettoriali completi.

Se X è completo, allora dalla Proposizione 5.5 segue l'esistenza di una mappa che ad ogni $t \in \mathbb{R}$ e $p \in M$ associa il valore $\gamma(t)$ della curva integrale per p (cioè $\gamma(0) = p$).

Definizione 5.6 *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ completo. La mappa*

$$\Phi^X : \mathbb{R} \times M \to M\,,$$

tale che, per ogni $p \in M$,

$$t \mapsto \Phi^X(t, p)$$

è la curva integrale massimale di X per p si chiama flusso *di X.*

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo la mappa al tempo t del flusso di X come

$$\Phi_t^X : M \to M\,, \qquad \Phi_t^X(p) = \Phi^X(t, p)\,.$$

Proposizione 5.7 *$\Phi^X : \mathbb{R} \times M \to M$ è differenziabile. Inoltre:*

i. $\Phi_0^X = \mathrm{id}_M$

ii. $\Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X$ *per tutti i* $t, s \in \mathbb{R}$.

iii. Φ_X^t *è invertibile e* $(\Phi_t^X)^{-1} = \Phi_{-t}^X$.

iv. $\Phi_X^t : M \to M$ *è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. La differenziabilità segue dalla teoria in $\mathbb{R}^n$, dalla quale si sa che le soluzioni di una ODE (con campo vettoriale differenziabile) dipendono in modo differenziabile non solo da t ma anche dal dato iniziale. (i.) Per definizione di flusso, $\Phi_0^X(p) = p \ \forall p \in M$. (ii.) Questo è un risultato noto come "traslabilità temporale" delle soluzioni nella teoria in $\mathbb{R}^n$: è facile verificare che, per p ed s fissati, sia $t \mapsto \Phi_{t+s}^X(p)$ che $t \mapsto \Phi_t^X(\Phi_s^X(p))$ sono curve integrali di X per $\Phi_s^X(p)$, e dunque coincidono (che $\Phi_{t+s}^X(p)$ sia curva integrale si verifica con la regola a catena). (iii.) Prendendo $s = -t$, da (ii) e (i) segue $\Phi_t^X \circ \Phi_{-t}^X = \Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^X = \mathrm{id}_M$ e dunque Φ_t^X e Φ_{-t}^X sono l'una l'inversa dell'altra. (iv) $\Phi_t^X : M \to M$ è differenziabile ed invertibile, e la sua inversa è differenziabile perché è una mappa a tempo fissato del flusso. ■

Osservazioni: (i) Da un punto di vista dinamico, ovviamente, il fatto che le soluzioni di un'ODE siano o meno definite per tutti i tempi può essere molto rilevante. Per l'uso dei campi vettoriali che si fa in geometria differenziale, tuttavia, considerare solo quelli completi non è realmente limitativo. Un motivo è che spesso ciò che veramente si utilizza delle curve integrali dei campi vettoriali è solo la loro esistenza in un intorno di 0. Segnaliamo anche che ogni campo vettoriale X su una varietà M ha un riscalamento differenziabile completo: esiste cioè una funzione ovunque positiva $f : M \to \mathbb{R}$ tale che fX è completo; la cosa è rilevante perché le curve integrali massimali di X ed fX differiscono solo per una riparametrizzazione (un diffeomorfismo fra i loro intervalli di esistenza), e hanno in particolare le stesse immagini. Vi sono comunque varie classi di campi vettoriali completi:

- I campi vettoriali a supporto compatto (cioè nulli nel complementare di un compatto).
- Tutti i campi vettoriali su una varietà compatta.
- I campi vettoriali invarianti a sinistra e a destra nei gruppi di Lie (che vedremo più avanti).

(ii) Per i campi vettoriali che non sono completi si può definire un analogo del flusso, definito sul sottoinsieme di $\mathbb{R} \times M$ che, per ogni $p \in M$, contiene l'intervallo di esistenza massimale della curva integrale per p, e chiamato *flusso locale*.

(iii) Il flusso è una mappa che dipende da due variabili, t e p, ed avviene che si sia interessati a differenziarlo solo rispetto ad una delle due variabili, in particolare la t. Non abbiamo una notazione per questo. Allora scriveremo

$$\tfrac{d}{dt}\Phi_t^X(p)$$

che si deve interpretare come $T_t\gamma$ con $t \mapsto \gamma(t) := \Phi_t^X(p)$. Dunque $\frac{d}{dt}\Phi_t^X(p) \in T_{\Phi_t^X(p)}M$.

Esercizi 5.2.2 *(i) Mostrare che, per p fissato, $t \mapsto \gamma(t) := \Phi_t^X(p)$ è l'unica curva tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(t) = X|_{\gamma(t)}$.*

5.3 Pushforward e pullback di funzioni e campi vettoriali

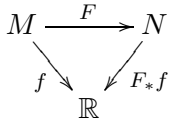
Le leggi di trasformazione sotto diffeomorfismi, o in certi casi sotto mappe differenziabili, degli oggetti differenziabili definiti su varietà sono molto importanti.

5.3.A Definizioni. Cominciamo con il caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Denotiamo $C^\infty(M)$ l'insieme di tutte le funzioni differenziabili $f : M \to \mathbb{R}$.

Definizione 5.8 *Sia $F : M \to N$ una diffeomorfismo fra due varietà.*

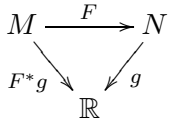
i. Il pushforward *sotto F di una funzione $f \in C^\infty(M)$ è la funzione $F_*f \in C^\infty(N)$ definita da*

$$F_*f := f \circ F^{-1} . \tag{5.3.1}$$



ii. Il pullback *sotto F di una funzione $g \in C^\infty(N)$ è la funzione $F^*g \in C^\infty(M)$ definita da*

$$F^*g := g \circ F . \tag{5.3.2}$$



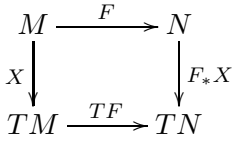
Si noti che in realtà il pullback F^*g di una funzione non coinvolge l'inversa di F e si può quindi definire per ogni mappa differenziabile $F : M \to N$, non solo i diffeomorfismi. Come vedremo questa è una proprietà generale delle forme differenziali, delle quali le funzioni sono il caso più semplice.

Consideriamo ora la trasformazione di campi vettoriali sotto diffeomorfismi. Per capire le definizioni conviene riferirsi ai diagrammi mostrati a margine.

Definizione 5.9 *Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo fra due varietà.*

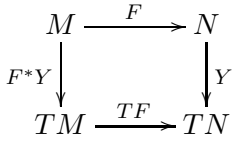
i. Il pushforward *sotto F di un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ è il campo vettoriale $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$ definito da*

$$F_*X := TF \circ X \circ F^{-1} . \tag{5.3.3}$$



ii. Il pullback *sotto F di un campo vettoriale $Y \in \mathfrak{X}(N)$ è il campo vettoriale $F^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ definito da*

$$F^*Y := TF^{-1} \circ Y \circ F . \tag{5.3.4}$$



Esempi 1. Siano (U,ϕ) una carta su M, $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Allora

$$\phi_* f = f \circ \phi^{-1}\,, \qquad \phi_* X = T\phi \circ X \circ \phi^{-1}$$

sono le rappresentative locali di f ed X in questa carta. (In queste formule si sottintende la restrizione di f e X a U, che per altro nei membri di destra non è necessaria perché ϕ^{-1} prende valori solo in U).

2. Se M ed N sono aperti di $\mathbb{R}^n$ ed identifichiamo i campi vettoriali con n-uple di $\mathbb{R}^n$, si veda l'esempio 3 della sezione 5.1.A, allora il pushforward diviene

$$F_* X(y) = F'(F^{-1}(y))X(F^{-1}(y)) \qquad \forall\, y \in N\,,$$

ove $F'(x)$ è la matrice Jacobiana di F nel punto $x \in M$. Si noti che, siccome F è suriettiva, questa si può anche scrivere

$$F_* X(F(x)) = F'(x)X(x) \qquad \forall\, y \in M\,, \tag{5.3.5}$$

Similmente, per il pullback si ha

$$F^* Y(x) = F'(x)^{-1} Y(F(x)) \qquad \forall\, x \in M\,. \tag{5.3.6}$$

4. Le condizioni di compatibilità (5.1.7) fra le rappresentative locali di un campo vettoriale X in carte fibrate $(TU_\lambda, T\phi_\lambda)$ e $(TU_\mu, T\phi_\mu)$ con $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ si scrivono

$$\widehat{X}_\mu = (\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1})_* \widehat{X}_\lambda = (\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1})^* \widehat{X}_\lambda\,. \tag{5.3.7}$$

Esercizi 5.3.1 *(i) Verificare che, se $F : M \to N$ è un diffeomorfismo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ allora, per ogni $p \in M$,*

$$(F_* X)(F(p)) = \Big(F(p), T_p F(X|_p)\Big) \tag{5.3.8}$$

e

$$(F^* Y)(p) = \Big(p, T_{F(p)}(F^{-1})(Y|_{F(p)})\Big) = \Big(p, (T_p F)^{-1}(Y|_{F(p)})\Big) \tag{5.3.9}$$

(ii) In questo esercizio e nei successivi si riguardino il pushforward ed il pullback sotto un diffeomorfismo come operatori sugli spazi di funzioni e campi vettoriali. Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo. Mostrare che

$$F^* = (F^{-1})_*\,.$$

(iii) Siano $F : M \to N$ e $G : N \to P$ diffeomorfismi. Mostrare che

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*\,, \qquad (G \circ F)^* = F^* \circ G^*\,.$$

Dedurne che $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$ e lo stesso per i pullback.

(iv) $F^* = (F_*)^{-1}$.

5.3.B Legame con il flusso. Due oggetti collegati da pushforward o pullback sotto un diffeomorfismo vanno considerati lo stesso oggetto a meno del diffeomorfismo. È l'analogo del cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^n$. È intuitivo, allora, che due campi vettoriali così collegati abbiano curve integrali collegate dal diffeomorfismo. Si può esprimere questa condizione in termini di flussi:

Proposizione 5.10 *Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo e sia X un campo vettoriale completo su M. Allora F_*X è completo e*

$$F \circ \Phi_t^X = \Phi_t^{F_*X} \circ F \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{5.3.10}$$

Inoltre, F_*X è l'unico campo vettoriale su N con questa proprietà: se $F \circ \Phi_t^X = \Phi_t^Y \circ F$ $\forall t \in \mathbb{R}$ allora $Y = F_*X$.

Dimostrazione. Per $q \in N$, consideriamo la curva $\gamma : \mathbb{R} \to N$, $\gamma(t) := F \circ \Phi_t^X \circ F^{-1}(q)$. Se $p = F^{-1}(q)$ allora $\gamma(t) = F \circ \Phi_t^X(p)$ e

$$\begin{aligned}
\dot\gamma(t) &= \tfrac{d}{dt}(F \circ \Phi_t^X(p)) \\
&= T_{\Phi_t^X(p)}F(\tfrac{d}{dt}\Phi_t^X(p)) \\
&= T_{\Phi_t^X(p)}F(X|_{\Phi_t^X(p)}) \\
&= (F_*X)|_{F\circ\Phi_t^X(p)} \\
&= (F_*X)|_{\gamma(t)}\,.
\end{aligned}$$

Insieme al fatto che $\gamma(0) = q$, questo mostra che γ è la curva integrale di F_*X per q, ovvero, per l'arbitrarietà di q,

$$F \circ \Phi_t^X \circ F^{-1} = \Phi_t^{F_*X} \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Questo prova la (5.3.10) e anche che F_*X è l'unico campo vettoriale con questa proprietà. ■

Per un diffeomorfismo, $F^* = (F^{-1})_*$ (esercizio 5.3.1.iv) e dunque questa Proposizione vale anche per il pullback.

Esempi 1. L'oscillatore armonico è la ODE del secondo ordine $\ddot x = -x$ in $\mathbb{R} \ni x$. Per vederla come campo vettoriale va scritta come il sistema del primo ordine $\dot x = v$, $\dot v = -x$ in $T\mathbb{R} \ni (x, v)$. Questo è in realtà un sistema Hamiltoniano e, per motivi legati a tale interpretazione, scambiamo l'ordine delle due coordinate, riguardandolo come il campo vettoriale

$$Y(v, x) = (-x, v)\,, \qquad (v, x) \in \mathbb{R}^2\,.$$

In meccanica Hamiltoniana si introducono le cosiddette coordinate azione-angolo I, φ, con

$$I = \frac{1}{2}(x^2 + v^2)$$

e φ l'angolo antiorario nel piano (v, x) misurato dal semiasse $v > 0$. Ovviamente, come nel caso delle coordinate polari, dovremmo restringere il dominio, ma ignoriamo questo aspetto. Vogliamo scrivere il campo vettoriale Y, cioè l'equazione dell'oscillatore armonico, in queste coordinate. È conveniente lavorare con l'inversa $(I, \varphi) \mapsto (v, x)$ del cambio di coordinate $(v, x) \mapsto (I, \varphi)$, cioè con il diffeomorfismo

$$F(I, \phi) = (\sqrt{2I}\cos\varphi, \sqrt{2I}\sin\varphi)\,.$$

Per la (5.3.6) si ha allora

$$\begin{aligned} F^*Y(I,\varphi) &= F'(I,\varphi)^{-1}Y(F(I,\varphi)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2I}} & -\sqrt{2I}\sin\varphi \\ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2I}} & \sqrt{2I}\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\sqrt{2I}\sin\varphi \\ \sqrt{2I}\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2I}\cos\varphi & \sqrt{2I}\sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2I}} & \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2I}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2I}\sin\varphi \\ \sqrt{2I}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque l'ODE diviene $\dot I = 0$, $\dot\varphi = 1$.

2. *Covarianza (o invarianza in forma) delle equazioni di Lagrange.* Nella formulazione locale della meccanica lagrangiana, un sistema lagrangiano è dato da una funzione $L : TU \to \mathbb{R}$, $(q, \dot q) \mapsto L(q, \dot q)$ sul fibrato tangente di un aperto U di $\mathbb{R}^n$ (lo spazio delle configurazioni). Le equazioni di Lagrange sono le equazioni

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}(q,\dot q)\Big) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(q,\dot q) = 0 \qquad i = 1, \dots, n\,, \tag{5.3.11}$$

ove $\frac{d}{dt}$ indica la cosiddetta derivata totale (vedere un qualunque libro di meccanica analitica). Esplicitamente (ma omettendo per semplicità gli argomenti)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j}\ddot q^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial q^j}\dot q^j\,. \tag{5.3.12}$$

La Lagrangiana L è detta *regolare* se la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j}(q, \dot q)$ è, in tutti i $(q, \dot q) \in TU$, invertibile. In tal caso le (5.3.11) possono essere messe in forma normale, $\ddot q = \big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q}\big)^{-1}(\dots)$ e definiscono un campo vettoriale in TU, che denotiamo Z_L e si chiama il *campo vettoriale lagrangiano* di L. Esplicitamente,

$$Z_L = \dot q^i \partial_{q^i} + \Big(\Big[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q}\Big)^{-1}\Big]_{ij}\Big(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^j \partial q^h}\dot q^h\Big)\partial_{\dot q^i}\,.$$

I cambiamenti di coordinate che si considerano in meccanica lagrangiana sono sollevamenti tangenti di cambiamenti di coordinate sullo spazio delle configurazioni, ovvero diffeomorfismi $TF : TU \to T\tilde U$ con un diffeomorfismo $F : U \to \tilde U$. In realtà è conveniente lavorare con l'inversa. Consideriamo quindi un diffeomorfismo $F : \tilde U \to U$, $u \mapsto F(u) = q$, ove $\tilde U$ è un aperto in $\mathbb{R}^n$, e la sua mappa tangente

$$TF : T\tilde U \to TU\,, \qquad (u, \dot u) \mapsto (F(u), F'(u)\dot u) = (q, \dot q)\,,$$

In meccanica lagrangiana si dimostra il seguente risultato, chiamato *covarianza,*[3] *o invarianza in forma (o geometrica), delle equazioni di Lagrange*: le equazioni di Lagrange (5.3.12) della Lagrangiana L, scritte nelle coordinate $(u, \dot{u})$, sono le equazioni di Lagrange della stessa Lagrangiana scritta nelle nuove coordinate, ovvero della Lagrangiana

$$\tilde{L}(u, \dot{u}) := L(F(u), F'(u)\dot{u}) .$$

Viste come campo vettoriale, le equazioni di Lagrange (5.3.12) scritte nelle coordinate $(u, \dot{u})$ sono il campo vettoriale $(TF)^* Z_L$ su $T\tilde{U}$. D'altra parte,

$$\tilde{L} = L \circ TF = (TF)^* L . \tag{5.3.13}$$

Dunque, questo risultato di meccanica lagrangiana significa che, per ogni Lagrangiana regolare $L : TU \to \mathbb{R}$ ed ogni diffeomorfismo $F : \tilde{U} \to U$ dello spazio delle configurazioni,

$$(TF)^* Z_L = Z_{(TF)^* L} . \tag{5.3.14}$$

La covarianza, o invarianza in forma, è precisamente la condizione che permette di incollare i campi vettoriali lagrangiani locali.

3. *Sistemi lagrangiani su varietà.* Nei corsi introduttivi di meccanica analitica i sistemi lagrangiani sono definiti sul fibrato tangente di un aperto di $\mathbb{R}^n$, ma essi sono in realtà definibili sul fibrato tangente di una qualunque varietà, e questo discende dall'invarianza in forma delle equazioni di Lagrange. Consideriamo una varietà n-dimensionale Q ed una funzione differenziabile

$$L : TQ \to \mathbb{R} .$$

Consideriamo un atlante di Q con carte $(U_\lambda, \phi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ed il corrispondente atlante fibrato di TQ. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ consideriamo la rappresentativa locale

$$\widehat{L}_\lambda := L \circ T\phi_\lambda^{-1}$$

di L. Supponiamo che L sia tale che tutte le sue rappresentative locali nell'atlante considerato siano regolari. Allora, in ogni carta λ, le equazioni di Lagrange per L_λ definiscono un campo vettoriale $Z_{\widehat{L}_\lambda}$ su $T\phi_\lambda(U_\lambda)$. Se $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, le rappresentative locali $\widehat{L}_\lambda$ e $\widehat{L}_\mu$ di L soddisfano

$$L_\mu = L_\lambda \circ T\phi_\lambda \circ T\phi_\mu^{-1} = L_\lambda \circ T(\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1}) = T(\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1})^* L_\lambda .$$

Di conseguenza, per la (5.3.14),

$$Z_{\widehat{L}_\mu} = T(\phi_\lambda \circ \phi_\mu^{-1})^* Z_{\widehat{L}_\lambda} .$$

Per la Proposizione 5.3 (si veda anche la (5.3.7)), queste condizioni assicurano che gli $Z_{\widehat{L}_\lambda}$ sono i rappresentativi locali di un campo vettoriale Z_L su TQ.

[3] L'appropriatezza di questo termine verrà spiegata più avanti.

Osservazione: Nella teoria dei sistemi dinamici, il campo vettoriale le cui curve integrali sono le immagini sotto un diffeomorfismo F delle curve integrali di un campo vettoriale X si chiama *coniugato* ad X da F. La (5.3.10) mostra che esso è il pushforward di X sotto F.

Esercizi 5.3.2 *(i) Mostrare che, nell'esempio 3, il fatto che le rappresentative locali di $L : TQ \to \mathbb{R}$ in tutte le carte di un atlante fibrato siano regolari non dipende dall'atlante fibrato considerato, ed è quindi una proprietà di L. [Suggerimento: la restrizione della funzione di transizione fra due carte fibrate a ciascuno spazio tangente è lineare].*

5.4 Campi vettoriali come operatori differenziali

5.4.A Algebre e derivazioni. Un'*algebra* $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale sul quale è definita un'operazione bilineare $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(a, b) \mapsto ab$, chiamata *prodotto*.

Una *derivazione* su un'algebra è una mappa lineare $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che soddisfa la regola di Leibniz

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}\,.$$

L'insieme $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ di tutte le derivazioni su un'algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale con somma e prodotto scalare definiti puntualmente

$$(c_1 D_1 + c_2 D_2)(a) := c_1 D_1(a) + c_2 D_2(a)\,.$$

Esempi 1. L'insieme $C^\infty(M)$ delle funzioni differenziabili $M \to \mathbb{R}$ è un'algebra, con somma, prodotto per scalare e prodotto definiti puntualmente:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)(p) := c_1 f_1(p) + c_2 f_2(p)\,, \qquad (f_1 f_2)(p) := f_1(p) f_2(p)$$

per tutti i $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $p \in M$.

2. $\mathbb{R}^3$ è un'algebra con il prodotto vettoriale.

3. La mappa $f \mapsto f'$ che ad ogni funzione differenziabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa la sua derivata è una derivazione in $C^\infty(\mathbb{R})$.

4. Sia $v \in \mathbb{R}^n$. La derivata direzionale $D_v : f \mapsto D_v(f) := v \cdot \mathrm{grad} f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, che in ogni punto si può anche scrivere $D_p f(v)$ o $f'(p)v$, è una derivazione in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

5.4.B La derivata di Lie come derivazione su $C^\infty(M)$. D'ora in poi, per analogia con la notazione $X|_p$ per i campi vettoriali, scriveremo $df|_p$ per il differenziale esterno di f in p, indicato con $df(p)$ nel capitolo 4.[4]

Definizione 5.11 *La* derivata di Lie *associata a un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ è la mappa*

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

che ad ogni $f \in C^\infty(M)$ associa la funzione $\mathcal{L}_X f \in C^\infty(M)$ definita da

$$\mathcal{L}_X f(p) := \langle df|_p, X|_p \rangle_{T_pM} \qquad \forall p \in M\,.$$

Esempi 1. Ricaviamo l'espressione di $\mathcal{L}_X f$ in termini delle rappresentative locali, relative ad una carta (U,ϕ) di M, di f ed X. Ricordando le (4.3.1), (5.1.3) e $\langle dx^i|_p, \partial_{x^j}|_p\rangle_{T_pM} = \delta_{ij}$, si ha, per ogni $p \in U$, $\langle df|_p, X|_p\rangle_{T_pM} = \langle \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))dx^i|_p\,,\, X^j_\phi(p)\partial_{x^j}|_p\rangle_{T_pM} = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))X^i_\phi(p)$ e dunque

$$\mathcal{L}_X f|_U \circ \phi^{-1} = (X^i_\phi \circ \phi^{-1})\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i} \tag{5.4.1}$$

Se denotiamo $\widehat{f} := f\circ\phi^{-1}$ e $\widehat{X} = (\widehat{X}^1,\dots,\widehat{X}^n)$ con $\widehat{X}^i = X^i_\phi\circ\phi^{-1}$ le rappresentative locali di f ed X nella carta considerata (si veda la (5.1.6)), e $\widehat{\mathcal{L}_X f}$ quella di $\mathcal{L}_X f$, abbiamo

$$\widehat{\mathcal{L}_X f} = \widehat{X}^i\frac{\partial\widehat{f}}{\partial x^i}\,, \tag{5.4.2}$$

che coincide con $\mathcal{L}_{\widehat{X}}\widehat{f}$.

2. Se, relativamente ad una carta (U,ϕ), $X|_U = X^i_\phi\partial_{x^i}$, allora per ogni $p\in U$ si ha $\mathcal{L}_X x^i(p) = \langle dx^i|_p\,,\, X^j_\phi(p)\partial_{x^j}|_p\rangle_{T_pM} = X^i_\phi(p)$ e così

$$\mathcal{L}_X x^i = X^i_\phi\,. \tag{5.4.3}$$

(Per fare il calcolo con le formule dell'esempio precedente si ricordi che, come visto nell'esempio 2 della sezione 4.3, si ha $\frac{\partial(x^j\circ\phi^{-1})}{\partial x^i} = \delta_{ij}$).

3. Nel caso di $M=\mathbb{R}^n$ e X costante, $X(x)=v$ per tutti gli x, $\mathcal{L}_X$ è la derivata direzionale D_v.

È immediato verificare che, fissato X, $\mathcal{L}_X$ è una derivazione su $C^\infty(M)$, perché il differenziale esterno $f\mapsto df|_p = T_pf$ è lineare ed inoltre soddisfa la regola di Leibniz, e quindi

$$\mathcal{L}_X(c_1f_1+c_2f_2) = c_1\mathcal{L}_Xf_1+c_2\mathcal{L}_Xf_2\,, \qquad \mathcal{L}_X(f_1f_2) = f_1\mathcal{L}_Xf_2+f_2\mathcal{L}_Xf_1\,,$$

[4] In una futura versione, questa notazione verrà cambiata anche nel cap. 4.

per tutti i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$. Ma avviene di più: ogni derivazione su $C^\infty(M)$ è la derivata di Lie associata ad un qualche campo vettoriale:

Proposizione 5.12 *La mappa*

$$\mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M)) , \qquad X \mapsto \mathcal{L}_X$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Dimostrazione. [parziale] Dobbiamo mostrare che $X \mapsto \mathcal{L}_X$ è lineare, iniettiva e suriettiva. La linearità, ovvero

$$\mathcal{L}_{c_1 X_1 + c_2 X_2} = c_1 \mathcal{L}_{X_1} + c_2 \mathcal{L}_{X_2} \tag{5.4.4}$$

per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ segue dalla definizione stessa di derivata di Lie, perché i covettori agiscono linearmente sui vettori e quindi, per ogni f e p, $\mathcal{L}_{c_1 X_1 + c_2 X_2} f(p) = \langle df|_p \, , \, (c_1 X_1 + c_2 X_2)|_p \rangle_{T_p M} = \langle df|_p \, , \, c_1 X_1|_p + c_2 X_2|_p \rangle_{T_p M} = c_1 \mathcal{L}_{X_1} f(p) + c_2 \mathcal{L}_{X_2} f(p)$.

Per l'iniettività bisogna provare che se $\mathcal{L}_X = 0$, cioè $\mathcal{L}_X f = 0 \ \forall f \in C^\infty(M)$, allora $X = 0$. Fissiamo $p \in M$ e consideriamo una carta (U, ϕ) di M con $p \in U$. Restringendoci a U, dall'ipotesi $\mathcal{L}_X = 0$ segue $\mathcal{L}_{X|_U} = 0$. Applicando la (5.4.2) alle funzioni coordinate x^i abbiamo $X^i_\phi(p) = 0$ per ogni i, e dunque $X|p = 0$.

Per l'iniettività bisogna provare che se $\mathcal{L}_X = 0$, cioè $\mathcal{L}_X f = 0 \ \forall f \in C^\infty(M)$, allora $X = 0$. Fissiamo $p \in M$ e consideriamo una carta (U, ϕ) di M con $p \in U$. Se prendiamo $f = x^i$, $i = 1, \ldots, n$, dalla (5.4.2) abbiamo

$$0 = \mathcal{L}_X x^i(p) = X^i_\phi(p) \, .$$

Dunque tutte le componenti di $X(p)$ sono nulle e $X(p) = 0$.

Omettiamo la dimostrazione della suriettività (che è un po' tecnica, anche se non difficile). ■

Osserviamo che la derivata di Lie *di funzioni* soddisfa anche, per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_{fX} = f \mathcal{L}_X \tag{5.4.5}$$

(la precisazione "di funzioni" qui è necessaria perché questo non sarà vero per la derivata di Lie di campi vettoriali e altri campi tensoriali).

Osservazione: L'isomorfismo della Proposizione 5.12 permette di identificare campi vettoriali su M e derivazioni su $C^\infty(M)$, riguardando i campi vettoriali come oggetti che agiscono sulle funzioni. Alla luce di questo fatto in vari testi la derivata di Lie $\mathcal{L}_X f$ è denotata $X(f)$. Allo stesso tempo, questo fatto è alla base della scelta della notazione $\frac{\partial}{\partial x^i}$ o ∂_{x^i} per i vettori delle basi naturali degli spazi tangenti ad M. In particolare, la (5.4.1) mostra che X agisce sulle rappresentative locali delle funzioni $f \in C^\infty$ esattamente come l'operatore differenziale $(X^i_\phi \circ \phi^{-1})\frac{\partial}{\partial x^i}$.

5.4.C Derivata di Lie e flusso. La derivata di Lie $\mathcal{L}_X$ ha anche un'origine dinamica, perché è legata al flusso di X. D'ora in poi, è sottointeso che tutti i campi vettoriali che considereremo siano completi.

Proposizione 5.13 *Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed $f \in C^\infty(M)$,*

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* f = (\Phi_t^X)^* \mathcal{L}_X f \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$, e posto $q = \Phi_t^X(p)$, si ha $\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t^X)(p) = T_q f(\frac{d}{dt}\Phi_t^X(p)) = \langle df|_q, X|_q\rangle_{T_qM} = \mathcal{L}_X f(q) = \mathcal{L}_X f \circ \Phi_t^X(p)$. ■
Si noti che, poiché $\Phi_0^X = \mathrm{id}$,

$$\mathcal{L}_X f = \tfrac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* f|_{t=0}\,.$$

In effetti, questa uguaglianza è a volte presa come definizione di derivata di Lie di una funzione.

Esempi 1. Nella teoria dei sistemi dinamici, una funzione $f \in C^\infty(M)$ che è costante lungo le curve integrali di un campo vettoriale X, ovvero tale che

$$f \circ \Phi_t^X = f \qquad \forall t$$

è detta *integrale primo* o *costante del moto* di X. Dalla Proposizione 5.13 segue che f è un integrale primo di X se e solo se $\mathcal{L}_X f = 0$.

2. Facciamo un esempio elementare. Consideriamo la "equazione di Newton 1-dimensionale" $m\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, con forza conservativa e posizionale $-V'(x)$ derivata da un'energia potenziale V. Come sistema del primo ordine in $T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \ni (x, v)$ corrisponde al campo vettoriale $X(x, v) = (v, -\frac{1}{m}V'(x))$. Come è ben noto, l'energia totale

$$E : T\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

è un integrale primo di questo sistema. Infatti $\mathcal{L}_X E(x, v) = X(x, v) \cdot \mathrm{grad}E(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{m}V'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial x}(x, v) \\ \frac{\partial E}{\partial v}(x, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{m}V'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V'(x) \\ mv \end{pmatrix} = 0.$

3. Siccome $(\Phi^X_t)_* f = f \circ (\Phi^X_t)^{-1} = f \circ \Phi^X_{-t} = (\Phi^X_{-t})^* f$ e, per la chain rule, $\frac{d}{dt}(g(-t)) = -(\frac{d}{dt}g)(-t)$ per ogni funzione derivabile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si ha anche

$$\tfrac{d}{dt}(\Phi^X_t)_* f = -(\Phi^X_t)_* \mathcal{L}_X f \qquad \forall t\,. \tag{5.4.6}$$

5.4.D Algebre di Lie.

Definizione 5.14 *i. Un'*algebra di Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ])$ *è un'algebra* $\mathcal{A}$ *il cui prodotto* $[\ ,\ ]$ *è antisimmetrico*

$$[a, b] = -[b, a] \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}\,,$$

*e soddisfa l'*identità di Jacobi

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0 \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}\,.$$

ii. Una sottoalgebra di Lie *di un'algebra di Lie* $(\mathcal{A}, [\ ,\ ])$ *è un sottospazio vettoriale* $\mathcal{B}$ *di* $\mathcal{A}$ *che è un'algebra di Lie con la restrizione a* $\mathcal{B}$ *di* $[\ ,\ ]$ *come prodotto.*

Il prodotto di un'algebra di Lie è anche chiamato *parentesi di Lie*. Chiaramente, un sottospazio vettoriale $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra di Lie se e solo se è chiuso per il prodotto, ovvero $[A, B] \in \mathcal{B}\ \forall A, B \in \mathcal{B}$.

Esempi 1. L'insieme $\mathrm{Lin}(V)$ degli operatori lineari di uno spazio vettoriale V in sé è uno spazio vettoriale con somma e prodotto per scalare definiti puntualmente ed è un'algebra di Lie con il commutatore

$$[A, B]_- := A \circ B - B \circ A$$

come prodotto. Infatti il commutatore è bilineare e antisimmetrico, ed il fatto che soddisfi l'identità di Jacobi si verifica con un calcolo diretto: per ogni tre operatori lineari A, B, C si ha (omettendo i simboli di composizione)

$$\begin{aligned}[A,[B,C]_-]_- + [C,[A,B]_-]_- + [B,[C,A]_-]_- \;=\;& A(BC-CB)-(BC-CB)A \\ &+C(AB-BA)-(AB-BA)C \\ &+B(CA-AC)-(CA-AC)B\end{aligned}$$

e i termini a destra si cancellano a due a due.

2. Le matrici $n \times n$ sono un'algebra di Lie con il commutatore matriciale.

3. L'insieme $\mathrm{skew}\,(n)$ delle matrici antisimmetriche $n \times n$ è una sottoalgebra di Lie di $L(n)$. Infatti è un sottospazio vettoriale perché somme e multipli di matrici antisimmetriche sono antisimmetriche, ed inoltre se A e B sono antisimmetriche allora anche $[A, B]_-$ lo è, perché $[A, B]^T_- = (AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B]_-$.