(Version 2026.1)

Capitolo 5

Campi vettoriali

5.1 Campi vettoriali

I campi vettoriali su una varietà sono di interesse per vari motivi. Uno è che possono essere riguardati come l'analogo delle equazioni differenziali ordinarie in $\mathbb{R}^n$ e quindi inducono una dinamica (un "flusso") su varietà. Questo è importante in meccanica classica e, più in generale, nel campo dei sistemi dinamici, che con la geometria differenziale è in rapporto profondo e reciproco: la geometria fornisce strumenti per studiare la dinamica, mentre lo studio della dinamica ha contribuito allo sviluppo di idee e metodi geometrici. In particolare, la nascita e lo sviluppo di alcune aree della geometria differenziale, come la teoria dei gruppi di Lie e lo studio delle simmetrie, sono profondamente legati al mondo dinamico.

Un altro motivo di interesse dei campi vettoriali è che essi possono essere naturalmente riguardati come operatori di derivazione di vari oggetti (funzioni, campi vettoriali, campi tensoriali) e questa interpretazione è alla base di importanti costruzioni geometriche (derivate di Lie, derivate covarianti).

Inoltre, i campi vettoriali svolgono un ruolo nella teoria delle distribuzioni e delle foliazioni e anche nello studio di questioni di natura topologica, come la parallelizzabilità delle varietà (si pensi al caso di S^2 menzionato nella Sezione 3.2.B).

5.1.A Campi vettoriali. In questa sezione M è una varietà di dimensione $n \geq 1$.

Definizione 5.1 *Un* campo vettoriale *su M è una mappa differenziabile*

$$X : M \to TM$$

tale che

$$X(p) \in T_pM \qquad \forall p \in M\,. \tag{5.1.1}$$

Dunque, un campo vettoriale è l'assegnazione (differenziabile) di un vettore in ogni spazio tangente ad M.

Qui è opportuno fare un'osservazione sulla notazione. Ciascuno spazio tangente T_pM è al tempo stesso uno spazio vettoriale a sè stante e è immerso in TM come la fibra $\{p\} \times T_pM$, ma la nostra notazione non distingue bene fra queste due interpretazioni e questo può creare delle ambiguità in certi calcoli. Per evitarle penseremo allora $X(p) \in TM$ e scriveremo

$$X(p) = (p, X|_p) \in \{p\} \times T_pM \qquad \forall p \in M\,.$$

In realtà abbiamo già usato la notazione $|_p$ quando abbiamo denotato i vettori della base naturale come $\partial_{x^i}|_p \in T_pM$. Quando la distinzione non è necessaria, però, per semplicità useremo $X(p)$ anche per denotare $X|_p$.[1]

Tecnicamente, la condizione (5.1.1) si può esprimere in altri due modi. Uno è che, se $\pi : TM \to M$ è la proiezione canonica del fibrato tangente ($\pi(p, \xi) = p$ per tutti i $(p, \xi) \in TM$), allora X soddisfa

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_M\,.$$

L'altro usa la nozione di "sezione" del fibrato tangente, che introduciamo però in modo molto generale perché avremo bisogno di utilizzarla anche in altri contesti.

Definizione 5.2 *Una* sezione *di una mappa differenziabile $\rho : N \to B$ fra due varietà N e B è una mappa differenziabile $\sigma : B \to N$ tale che $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_B$.*

[1] Usando questa notazione, le fibre $\pi^{-1}(p)$ di TM sono $\{p\} \times T_pM$ e non, come detto nella sezione 3.2.A, T_pM.

Dunque, un campo vettoriale è una sezione della proiezione canonica $\pi : TM \to M$ o, come normalmente si dice, una sezione di TM.

Denoteremo $\mathfrak{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi vettoriali su una varietà M. Esso è uno spazio vettoriale (di dimensione infinita) con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite puntualmente, ovvero

$$(c_1X_1 + c_2X_2)(p) := c_1X_1(p) + c_2X_2(p)$$

per ogni $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $p \in M$.

Inoltre, per ogni funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$ ed ogni campo vettoriale X su M si definisce il campo vettoriale fX su M come il prodotto puntuale di f e X:

$$(fX)(p) = f(p)X(p) \qquad \forall p \in M\,.$$

Esempi 1. Sia (U, ϕ) una carta di M. Al solito scriviamo $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ e, in ogni punto $p \in U$, consideriamo i vettori $\partial_{x^1}|_p, \dots, \partial_{x^n}|_p$ della base naturale di T_pM indotta da ϕ. Per ogni $i = 1, \dots, n$, consideriamo la mappa

$$\partial_{x^i} : U \to TU\,, \qquad \partial_{x^i}(p) = (p, \partial_{x^i}|_p)\,,$$

che, ad ogni $p \in U$, associa l'i-mo vettore della base naturale di T_pM. Chiaramente, la mappa ∂_{x^i} soddisfa la (5.1.1). Osserviamo ora che la rappresentativa locale della mappa ∂_{x^i} rispetto alle carte (U, ϕ) su U e $(TU, T\phi)$ su TU è $T\phi \circ \partial_{x^i} \circ \phi^{-1}$. Per ogni $x \in \phi(U)$, e scrivendo $p = \phi^{-1}(x)$, si ha

$$T\phi \circ \partial_{x^i} \circ \phi^{-1}(x) = T\phi \circ \partial_{x^i}(p) = (\phi(p), T_p\phi(\partial_{x^i}|_p)) = (x, e_i)\,. \qquad (5.1.2)$$

Questo mostra che $T\phi \circ \partial_{x^i} \circ \phi^{-1}$ è una mappa differenziabile. Dunque, ∂_{x^i} è differenziabile e pertanto è un campo vettoriale su U. I campi vettoriali ∂_{x^i} si chiamano *campi (vettoriali) coordinati* indotti dalla carta (U, ϕ).

2. Nella situazione dell'esempio precedente, per ogni scelta di funzioni differenziabili $f^1, \dots, f^n : U \to \mathbb{R}$, la combinazione lineare $f^i\partial_{x^i}$ è un campo vettoriale su U.

3. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, che riguardiamo come una varietà con la struttura differenziabile standard data dalla carta globale (A, id). Nell'identificazione di TA con $A \times \mathbb{R}^n$, un campo vettoriale su A è una mappa

$$X : A \to A \times \mathbb{R}^n\,, \qquad X(x) = (x, X|_x)\,,$$

ove si identifica $X|_x \in T_xA$ con un elemento di $\mathbb{R}^n$ e $x \mapsto X|_x$ è una funzione differenziabile da A in $\mathbb{R}^n$. È usuale identificare il campo vettoriale X con la sua sola componente $x \mapsto X|_x$ sugli spazi tangenti.

Osservazione: Per costruire un campo vettoriale su una varietà M si può partire da una mappa $X : M \to TM$ che soddisfa la (5.1.1) e dimostrarne la differenziabilità. Analogamente, per costruire una sezione di una mappa differenziabile $\rho : N \to B$, si può partire da una mappa $\sigma : B \to N$ tale che $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_B$ e dimostrarne la differenziabilità. Faremo così in vari casi.

5.1.B Riferimenti mobili. Lo spazio vettoriale $\mathfrak{X}(M)$, essendo di dimensione infinita, non ha basi finite. Tuttavia, almeno localmente, in aperti $U \subseteq M$, possono esistere insiemi di n campi vettoriali $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{X}(U)$ i quali sono ovunque linearmente indipendenti, e dunque i vettori $Y_1|_p, \ldots, Y_n|_p$ formano una base per ogni spazio tangente T_pM, $p \in U$. Ogni tale insieme di campi vettoriali si chiama *riferimento mobile su* U. L'aggettivo mobile si riferisce al fatto che i campi vettoriali del riferimento forniscono una base per gli spazi tangenti che varia da punto a punto.

Se $Y_1, \ldots, Y_n$ è un riferimento mobile su U, la restrizione ad U di ogni campo vettoriale X si può scrivere come combinazione lineare

$$X|_U = f^i Y_i$$

di $Y_1, \ldots, Y_n$, con coefficienti che sono funzioni $f^i : U \to \mathbb{R}$, di fatto (come si potrebbe vedere) differenziabili, e che si chiamano le *componenti* di X in tale riferimento mobile.

In generale, può non esistere un riferimento mobile su tutto M; di fatto, esso esiste se e solo se M è parallelizzabile. Tuttavia, come segue dall'esempio successivo, esiste sempre un riferimento mobile locale in un intorno di ogni punto.

Esempio I campi vettoriali coordinati $\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n}$ associati ad una carta (U, ϕ) di M formano un riferimento mobile su U, chiamato il *riferimento coordinato* indotto dalla carta (U, ϕ). Denoteremo X^i_ϕ le componenti di un campo vettoriale X in tale riferimento, cosicché

$$X|_U = X^i_\phi \partial_{x^i} \,. \tag{5.1.3}$$

La n-upla delle componenti di $X|_U$ è legata alla rappresentativa locale della mappa $X|_U : U \to TU$ relativa alle carte (U, ϕ) su M e $(TU, T\phi)$ su TM, che è la mappa

$$T\phi \circ X \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to T\phi(U) \,.$$

Precisamente, posto

$$\widehat{X}_\phi = (X^1_\phi \circ \phi^{-1}, \ldots, X^n_\phi \circ \phi^{-1}) : \phi(U) \to \mathbb{R}^n \,. \tag{5.1.4}$$

si ha

$$T\phi \circ X \circ \phi^{-1}(x) = (x, \widehat{X}_\phi(x)) \,. \tag{5.1.5}$$

Infatti, con un calcolo analogo a quello nella (5.1.2), nel quale scriviamo $p = \phi^{-1}(x)$ e calcoliamo X con la (5.1.3), si ha

$$T\phi \circ X \circ \phi^{-1}(x) = (x, T_p\phi(X^i_\phi(p)\partial_{x^i}|_p)) = (x, (X^1_\phi(p), \ldots, X^n_\phi(p))) = (x, \widehat{X}_\phi(x)) \,.$$

È usuale identificare la rappresentativa locale solo con la mappa $\widehat{X}_\phi$ e riguardarla come un campo vettoriale su $\phi(U)$ (si veda l'esempio 3 della sezione precedente).

5.1.C Costruzione di campi vettoriali dalle rappresentative locali. In pratica, molti conti con i campi vettoriali si fanno lavorando con le loro componenti nei riferimenti coordinati, che entrano nella (5.1.3). Anzi, come nel caso delle funzioni (esercizio 2.1.3.iii), a volte si assegna un campo vettoriale specificandone le espressioni in coordinate nelle varie carte.

Proposizione 5.3 *Consideriamo un atlante* $\{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ *di* M *e, per ogni* $\lambda \in \Lambda$*, scriviamo* $\phi_\lambda = (x^1_\lambda, \dots, x^n_\lambda)$*. Come nell'esempio 3 della sezione 4.3 scriviamo le funzioni di transizione, se* $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$*, come* $(\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1})(x) =: x_\mu(x)$*.*

Supponiamo che, per ogni $\lambda \in \Lambda$*, sia data una mappa differenziabile*

$$\widehat{X}_\lambda : \phi_\lambda(U_\lambda) \to \mathbb{R}^n$$

e che, per ogni coppia λ, μ *con* $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$*, esse soddisfino*

$$\widehat{X}_\mu(x_\mu(x)) = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda}(x)\widehat{X}_\lambda(x) \qquad \forall x \in \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)\,. \tag{5.1.6}$$

Allora esiste un unico campo vettoriale X *su* M *tale che*

$$X|_{U_\lambda} = (\widehat{X}^i_\lambda \circ \phi_\lambda)\partial_{x^i_\lambda} \qquad \forall \lambda \in \Lambda\,. \tag{5.1.7}$$

Dimostrazione. Per la prima delle (4.3.4), nei punti $p = \phi_\lambda^{-1}(x)$ di $U_\lambda \cap U_\mu$, se non vuoto, si ha $\partial_{x^i_\lambda}|_p = \frac{\partial x^j_\mu}{\partial x^i_\lambda}(x)\partial_{x^j_\mu}|_p$ e dunque, per la (5.1.6),

$$\widehat{X}^i_\lambda(x)\partial_{x^i_\lambda}|_p \;=\; \widehat{X}^i_\lambda(x)\frac{\partial x^j_\mu}{\partial x^i_\lambda}(x)\partial_{x^j_\mu}|_p \;=\; \widehat{X}^j_\mu(x_\mu(x))\partial_{x^j_\mu}|_p\,.$$

Dunque possiamo definire una mappa $X : M \to TM$ come

$$X(p) = (p, (\widehat{X}^i_\lambda \circ \phi_\lambda)(p)\partial_{x^i_\lambda}|_p) \qquad \forall p \in U_\lambda\,,\ \lambda \in \Lambda$$

ed essa soddisfa le (5.1.7), ed anzi è l'unica che le soddisfa. Inoltre, essa soddisfa (5.1.1). Per dimostrare che è un campo vettoriale non resta che provare che è differenziabile. Questo segue dal fatto che, come segue dalle (5.1.2)-(5.1.5), la sua rappresentativa locale è la $x \mapsto (x, \widehat{X}_\lambda(x))$, che è differenziabile. ■

5.2 Il flusso di un campo vettoriale

5.2.A Curve integrali dei campi vettoriali.

Definizione 5.4 *Sia X un campo vettoriale su una varietà M. Una* curva integrale di X con intervallo di esistenza I, *ove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto, è una curva differenziabile*

$$\gamma : I \to M$$

tale che

$$\dot\gamma(t) = X|_{\gamma(t)} \qquad \forall t \in I\,.$$

Consideriamo una curva integrale $\gamma : I \to M$ di X e supponiamo che, per $t \in I_U \subseteq I$, $\gamma(t)$ appartenga al dominio U di una carta (U, ϕ) di M. Allora la rappresentativa locale $\phi \circ \gamma|_{I_U} : I_U \to \phi(U)$ di $\gamma|_{I_U}$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\tfrac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t) = \widehat{X}_\phi(\phi \circ \gamma(t)) \tag{5.2.1}$$

ove $\widehat{X}_\phi$ è la rappresentativa locale di X, si vedano le (5.1.5) e (5.1.4). Infatti $\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t) = T_{\gamma(t)}\phi(T_t\gamma) = T_{\gamma(t)}\phi(\dot\gamma(t)) = T_{\gamma(t)}\phi(X|_{\gamma(t)}) = \widehat{X}_\phi(\phi \circ \gamma(t))$ (in questo calcolo sono sottintese alcune identificazioni; se se ne sente il bisogno, per i dettagli si vedano gli esercizi).

Questo permette di estendere il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle ODE da $\mathbb{R}^n$ alle varietà.

Come in $\mathbb{R}^n$, si dice che una curva integrale $\tilde\gamma : \tilde I \to M$ è un *prolungamento* di una curva integrale $\gamma : I \to M$ se $\tilde I \supset I$ e $\tilde\gamma|_I = \gamma$. Una curva integrale è detta *massimale* se non ammette alcun prolungamento. Inoltre, una *curva integrale per un punto p di M* è una curva integrale $\gamma : I \to M$ con $I \ni 0$ e $\gamma(0) = p$.

Proposizione 5.5 *Esiste una ed una sola curva massimale di X per ogni punto $p \in M$.*

Non dimostriamo questo fatto, ma osserviamo che esso si prova applicando il teorema di esistenza e unicità per le ODE alle rappresentative locali dei campi vettoriali, incollando le soluzioni locali grazie all'unicità e considerando infine la loro estensione massimale.

Esercizi 5.2.1 *(i) Si verifichi in tutti i dettagli la (5.2.1). [Suggerimento: calcolare $T(\phi \circ \gamma)(t, 1)$ direttamente e con la chain rule].*