(Version 2026.1)

Capitolo 4

Il fibrato cotangente

4.1 Dualità in spazi vettoriali

4.1.A Il duale di uno spazio vettoriale e le basi duali. Cominciamo con alcuni richiami di algebra lineare. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Le funzioni lineari $\alpha : V \to \mathbb{R}$ sono variamente chiamate "funzionali", "forme lineari", "covettori", "vettori duali". È noto, e facile da verificare, che una funzione lineare è determinata dai suoi valori su una base di V e che le funzioni lineari formano uno spazio vettoriale V^* di dimensione n, chiamato lo *spazio duale* di V, con somma e moltiplicazione per scalari definite puntualmente:

$$(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)(v) := c_1\alpha_1(v) + c_2\alpha_2(v) \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1, \alpha_2 \in V^*,\ v \in V\,.$$

La mappa bilineare

$$\langle\ ,\ \rangle_{VV^*} : V^* \times V \to \mathbb{R}\,, \qquad \langle \alpha, v\rangle_V := \alpha(v)\,,$$

si chiama *dualità* (o *pairing*) di V e V^*.

Anche V^*, essendo uno spazio vettoriale, possiede uno spazio duale $V^{**} := (V^*)^*$, che ha la stessa dimensione di V^* e dunque di V. Se, come nel nostro caso, V ha dimensione finita, V^{**} è identificabile in modo naturale con V. Consideriamo infatti la mappa

$$^{**} : V \to V^{**}$$

che ad ogni $v \in V$ associa il co-co-vettore $v^{**} \in V^{**}$, cioè una funzione lineare $v^{**} : V^* \to \mathbb{R}$, definita da

$$v^{**}(\alpha) = \alpha(v) \qquad \forall \alpha \in V^*\,.$$

Questa mappa è chiaramente ben definita, è lineare ed è iniettiva (esercizio). Di conseguenza, essendo $\dim V = \dim V^{**}$, essa è anche suriettiva, ed è dunque un isomorfismo fra V e V^{**}, che possiamo usare per identificarli. Si noti che, se denotiamo $\langle\ ,\ \rangle_{V^*V^{**}}$ il pairing fra V^* e V^{**}, si ha

$$\langle v^{**}, \alpha\rangle_{V^*V^{**}} = \langle \alpha, v\rangle_{VV^*} \qquad \forall v \in V\,,\ \alpha \in V^*\,.$$

Sotto l'identificazione di V^{**} con V, il pairing fra V^* e V^{**} diviene un pairing fra V^* e V che coincide con quello fra V e V^* a meno dello scambio dell'ordine degli argomenti, $\langle v, \alpha\rangle_{V^*V} = \langle \alpha, v\rangle_{VV^*}\ \forall v \in V\,,\ \alpha \in V^*$. È usuale non distinguere fra i due, pensando dunque che i vettori agiscano sui covettori, e denotare entrambi $\langle\ ,\ \rangle_V$. Dunque

$$\langle v, \alpha\rangle_{V} = \langle \alpha, v\rangle_{V} \qquad \forall v \in V\,,\ \alpha \in V^*\,.$$

Se lo spazio vettoriale è assegnato, si scrive anche semplicemente $\langle\ ,\ \rangle$. Osserviamo che, invece, non vi è una identificazione naturale di V e V^* (torniamo su questo fra breve).

Per ogni base $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ di V esiste una base $\mathcal{B}^* := \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ di V^*, chiamata la *base duale* di $\mathcal{B}$, i cui elementi soddisfano (e sono definiti da)

$$\beta_i(b_j) = \delta_{ij} \qquad \forall\, i, j = 1, \dots, n\,. \tag{4.1.1}$$

Questo implica che, per ogni vettore $v = \sum_{j=1}^n v_j b_j$ di V,

$$\beta_i(\textstyle\sum_{j=1}^n v_j b_j) = v_i\,, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4.1.2}$$

e dunque i covettori della base duale $\mathcal{B}^*$, applicati ad un vettore, ne danno le componenti nella base $\mathcal{B}$.

Usando una base per V e la sua duale per V^* si ha

$$\langle \textstyle\sum_i \alpha_i\beta_i, \sum_j v_j b_j\rangle_V = \sum_i \alpha_i v_i \tag{4.1.3}$$

(ma *non è* un prodotto scalare, perché V e V^* sono spazi vettoriali diversi).

Esercizi 4.1.1 *(i) Mostrare che, nell'identificazione di V^{**} con V, la base duale di $\mathcal{B}^*$ è $\mathcal{B}$. Dedurne che i vettori di $\mathcal{B}$, applicati a un covettore, ne danno le componenti nella base $\mathcal{B}^*$:*

$$b_i(\sum_{j=1}^n \alpha_j\beta_j) = \alpha_i\,. \tag{4.1.4}$$

[Suggerimento: non serve fare conti se si nota che, nell'identificazione di V^{**} con V, la base duale di $\mathcal{B}^*$ è . . .]

4.1.B Convenzioni e terminologia: "covariante" e "controvariante". Spesso, quando si considerano questioni in spazi vettoriali, si lavora in una base. Per questo, ed anche in vista di quel che succede sulle varietà, è indispensabile avere chiaro come trasformano i rappresentativi di vettori e covettori sotto un cambiamento delle basi.

Siano $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n\}$ due basi di V. Allora esiste una matrice invertibile L con componenti L_{ij} tale che

$$\widetilde{b}_i = \textstyle\sum_{j=1}^n L_{ij} b_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,. \tag{4.1.5}$$

Siano poi $\mathcal{B}^* = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}^* = \{\widetilde{\beta}_1, \dots, \widetilde{\beta}_n\}$ le basi duali di $\mathcal{B}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$, rispettivamente. Un conto standard (si vedano gli esercizi) dà

$$\widetilde{\beta}_i = \textstyle\sum_{j=1}^n (L^{-T})_{ij} \beta_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,, \tag{4.1.6}$$

ove L^{-T} è l'inversa della trasposta di L.

Siano ora $v_1, \dots, v_n$ e $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_n$ le componenti di uno stesso vettore $v \in V$ nelle due basi $\mathcal{B}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$, cioè $v = \sum_i v_i b_i = \sum_i \widetilde{v}_i \widetilde{b}_i$, e similmente siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_n$ le componenti di un covettore $\alpha \in V^*$ nelle basi duali, cioè $\alpha = \sum_i \alpha_i \beta_i = \sum_i \widetilde{\alpha}_i \widetilde{\beta}_i$. Allora un conto standard dà

$$\widetilde{v}_i = \textstyle\sum_{j=1}^n (L^{-T})_{ij} v_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,, \tag{4.1.7}$$

e

$$\widetilde{\alpha}_i = \textstyle\sum_{j=1}^n L_{ij} \alpha_j \,, \qquad i = 1, \dots, n \,. \tag{4.1.8}$$

Tradizionalmente, si interpretano le (4.1.5)-(4.1.8) dicendo che i rappresentativi dei covettori cambiano come i vettori della base di V, ovvero in modo *covariante*, mentre i rappresentativi dei vettori di V cambiano al contrario, per la presenza (della trasposta) dell'inversa di L, ovvero in modo *controvariante*. Anzi, spesso (e soprattutto nella letteratura fisica), si rappresentano vettori e covettori per mezzo di n-uple in $\mathbb{R}^n$, chiamandole *vettori controvarianti* se, sotto un cambio di base, trasformano controvariamente e dunque rappresentano vettori, e *vettori covarianti* se invece trasformano covariamente e dunque rappresentano covettori.

Inoltre, è tradizionale adottare una notazione e delle convenzioni che distinguono i due tipi di n-uple. Innanzitutto, si indicizzano i vettori delle basi di V scrivendo gli indici in basso e le componenti dei vettori in tali basi con indici scritti in alto; inoltre, si sottintende sempre

la sommatoria su indici ripetuti, uno in alto ed uno in basso, e si ha pertanto

$$v = v^i b_i \,.$$

Al contrario, i covettori delle basi duali si indicizzano in alto e le componenti dei covettori in tali basi si indicizzano in basso, cosicché

$$\alpha = \alpha_i \beta^i \,.$$

Usando questa convenzione, la (4.1.3) si scrive

$$\langle \alpha_i \beta^i, v^j b_j \rangle = \alpha_i v^i \,.$$

Useremo spesso queste convenzioni (ma non in modo esclusivo). Notiamo che in letteratura è anche frequente denotare i vettori di una base e della base duale con gli stessi simboli, ma con indici in basso ed in alto: se $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ allora $\mathcal{B}^* = \{b^1, \ldots, b^n\}$, e quindi $b^i(b_j) = \delta_{ij}$.

> **Osservazione:** Per consistenza con questa notazione, se (U, ϕ) è una carta di una varietà M, le funzioni coordinate vengono scritte con gli indici in alto,
>
> $$\phi = (x^1, \ldots, x^n) \,,$$
>
> anche se non sono le componenti di funzioni vettoriali perché $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ non ha una struttura naturale di spazio vettoriale. Il motivo è che allora i vettori della base naturale di T_pM sono i $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ o $\partial_{x^i}|_p$ e sono scritti con gli indici in basso, come si conviene ai vettori di una base. Corrispondentemente, le componenti di un vettore di T_pM in questa base vengono scritte con gli indici in alto, $v^1, \ldots, v^n$, e quel vettore viene allora scritto come la combinazione lineare $v^i \partial_{x^i}$ alla quale si applica la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

Esercizi 4.1.2 *(i) Provare le (4.1.6) - (4.1.8).* [R]

4.1.C La mappa duale di una mappa lineare. Ogni mappa lineare $\mathcal{L} : V \to W$ fra due spazi vettoriali induce una mappa lineare

$$\mathcal{L}^* : W^* \to V^* \,,$$

chiamata la sua *duale* e definita nel modo seguente: per ogni $w^* \in W^*$, $\mathcal{L}^*(w^*)$ è quell'elemento di V^* tale che

$$\langle \mathcal{L}^*(w^*), v \rangle_V = \langle w^*, \mathcal{L}(v) \rangle_W \qquad \forall\, v \in V \,.$$

Che questa condizione definisca un unico elemento di V^* segue dal fatto che un covettore è determinato dalla sua azione sui vettori di V (come già notato, basta la sua azione su una base di V).

Osserviamo che se $\mathcal{L}$ è invertibile allora anche $\mathcal{L}^*$ lo è e

$$(\mathcal{L}^*)^{-1} = (\mathcal{L}^{-1})^*$$

e che, se $\mathcal{L} : U \to V$ e $\mathcal{M} : V \to W$ sono due mappe lineari, allora

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{L})^* = \mathcal{L}^* \circ \mathcal{M}^* \,.$$

Esercizi 4.1.3 *(i) Provare le due ultime affermazioni.*

(ii) Provare che se L è la matrice associata ad una mappa lineare $\mathcal{L} : V \to W$ rispetto ad una base $\mathcal{B}_V$ di V e ad un base $\mathcal{B}_W$ di W, allora la matrice associata a $\mathcal{L}^* : W^* \to V^*$ rispetto alle basi duali $\mathcal{B}_W^*$ e $\mathcal{B}_V^*$ è L^T.

4.1.D Identificazioni fra V e V^*. Come osservato, non vi è una identificazione naturale di uno spazio vettoriale con il suo duale (cioè un'unica mappa lineare, definita indipendentemente da ogni altra scelta, che ad ogni vettore di V associa un determinato covettore di V^*). Invece, identificazioni fra V e V^* possono essere indotte da strutture addizionali su V. Il caso più interessante è quello delle strutture date da forme bilineari su V.

Ogni forma (= funzione) bilineare

$$\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$$

induce una mappa lineare

$$\sigma^\flat : V \to V^* \tag{4.1.9}$$

definita così

$$\sigma^\flat(v) := \sigma(v, \ ) \qquad \forall v \in V$$

Cioè, $\sigma^\flat$ associa ad ogni $v \in V$ la mappa lineare $\sigma^\flat(v) : V \to \mathbb{R}$ definita da $\sigma^\flat(v)(w) := \sigma(v, w)$ per tutti i $v, w \in V$, che è un elemento di V^*.

Se, di più, σ is *non degenere*, nel senso che, per ogni $v \in V$,

$$\sigma(v, w) = 0 \quad \forall\, w \in V \qquad \Rightarrow \qquad v = 0\,, \tag{4.1.10}$$

allora $\sigma^\flat$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Infatti in tal caso $\sigma^\flat$ ha nucleo $\{0\}$ ed è dunque invertibile (vedere gli esercizi). L'inversa di $\sigma^\flat$ si denota

$$\sigma^\sharp : V^* \to V$$

e, al pari di $\sigma^\flat$, è un isomorfismo. Per ogni $\alpha \in V^*$, $\sigma^\sharp(\alpha)$ è il vettore di V tale che $\sigma(\sigma^\sharp(\alpha),\ ) = \alpha$.

L'origine della notazione e terminologia usata per i due isomorfismi "musicali" $\sigma^\flat$ e $\sigma^\sharp$, quando σ è non degenere, è la seguente: $\sigma^\flat$, trasformando vettori in covettori, dunque oggetti controvarianti in oggetti covarianti, "abbassa gli indici", proprio come, in musica, il bemolle $\flat$ abbassa il tono di una nota; e $\sigma^\sharp$ fa il contrario, alzando gli indici, come il diesis $\sharp$ che alza il tono di una nota. Di fatto, questo è quanto si fa passando alla descrizione in coordinate.

Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di V. Allora, per ogni coppia di vettori $u^i b_i$ e $v^i b_i$ di V si ha $\sigma(u^i b_i, v^j b_j) = u^i v^j \sigma(b_i, b_j)$. Dunque, introducendo la matrice S di componenti

$$S_{ij} := \sigma(b_i, b_j)$$

si ha

$$\sigma(u^i b_i, v^j b_j) = S_{ij} u^i v^j = u \cdot Sv$$

dove u e v sono le n-uple $u = (u^1, \dots, u^n)$ e $v = (v^1, \dots, v^n)$. La nondegenerazione di σ è equivalente all'invertibilità di S. Il rappresentativo $a \in \mathbb{R}^n$ del covettore $\sigma^b(v^i b_i)$ associato da σ a un vettore di rappresentativo $v \in \mathbb{R}^n$ è $a = S^T v$, ovvero $a_i = S_{ji} v^j$. Nella letteratura fisica è usuale denotarne le componenti v_i, scrivendo $v_i = S_{ji} v^j$.

Vi sono vari casi molto importanti di questa costruzione.

1. (Teorema di Riesz) σ è simmetrica ($\sigma(u, v) = \sigma(v, u)\ \forall u, v \in V$) e definita positiva ($\sigma(v, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$), ovvero è un prodotto scalare su V. Chiaramente la positiva definitezza implica la nondegenerazione. In questo caso, V equipaggiato con σ è uno spazio vettoriale euclideo e su di esso si può fare la geometria euclidea.

   In particolare, il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ fornisce un'identificazione di $(\mathbb{R}^n)^*$ con $(\mathbb{R}^n)$, nella quale ad ogni covettore $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ è associata quella n-upla $a \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle \alpha, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = a \cdot v = a_i v^i$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Chiameremo "standard" questa identificazione di $(\mathbb{R}^n)^*$ con $\mathbb{R}^n$ e la useremo senza indicarla esplicitamente.
2. σ è simmetrica e indefinita, ma comunque nondegenere. Per esempio, in $\mathbb{R}^4$, il prodotto scalare Lorentziano (o Minkowskiano) $\sigma(u, v) = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3$.
3. σ è antisimmetrica ($\sigma(u, v) = -\sigma(v, u)\ \forall u, v \in V$) e non degenere. In questo caso σ si chiama "forma simplettica" e la geometria risultante si chiama geometria simplettica (su uno spazio vettoriale).

Per esempio, sia $\mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$, ove 0_n e $\mathbb{I}_n$ sono le matrici nulla ed unità $n \times n$, la cosiddetta unità simplettica di dimensione $2n$. Allora la forma bilineare in $\mathbb{R}^{2n}$

$$\sigma(u, v) := u \cdot \mathbb{J}v$$

è simplettica.

Adeguate estensioni alle varietà di questi casi portano alle geometrie (differenziali) riemanniana, pseudo-riemanniana e simplettica, che svolgono un ruolo basilare in matematica e in fisica.

Esercizi 4.1.4 *(i) Mostrare che una mappa lineare iniettiva fra due spazi vettoriali di uguali dimensioni è anche suriettiva, e quindi invertibile.* [R]

(ii) Verificare che la forma bilineare dell'esempio 3 è nondegenere (e dunque simplettica). [R]

(iii) Se σ è una forma bilineare non degenere su V diciamo che due vettori $u, v \in V$ sono σ-ortogonali se e solo se $\sigma(u, v) = 0$. In uno dei tre casi 1, 2 e 3 precedenti avviene che ogni $u \in V$ sia σ-ortogonale a sè stesso? [R]

4.2 Il fibrato cotangente

4.2.A Gli spazi cotangenti. Sia M una varietà n-dimensionale. Per ogni $p \in M$, lo spazio duale $(T_pM)^*$ dello spazio tangente ad M in p si chiama lo *spazio cotangente* ad M in p e si denota T_p^*M. I suoi elementi si chiamano *vettori cotangenti*.

Su ogni spazio cotangente T_p^*M si possono considerare le basi duali delle basi naturali di T_pM. Come sappiamo, ogni carta (U, ϕ) di M, con $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, induce una base su ogni spazio tangente T_pM con $p \in U$, la base naturale formata dai vettori

$$\partial_{x^1}|_p, \dots, \partial_{x^n}|_p \,,$$

che sono definiti dalle $T_p\phi(\partial_{x^i}|_p) = e_i$ per ogni i. Denotiamo

$$dx^1(p) \dots, dx^n(p)$$

i vettori della base di T_p^*M duale della base naturale di T_pM. In ogni punto $p \in U$, i covettori della base duale della base naturale $\{\partial_{x^1}|_p, \dots, \partial_{x^n}|_p\}$ di T_pM si denotano. Per definizione, essi sono tali che

$$dx^i(p)(v^j \partial_{x^j}|_p) = v_i$$

ovvero l'azione di $dx^i(p)$ su un vettore di T_pM produce la componente i-ma di quel vettore nella base naturale di T_pM.

4.2.B La mappa cotangente puntuale. Sia $f : M \to N$ una mappa differenziabile fra due varietà. Per ogni $p \in M$, la mappa tangente puntuale $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ è una mappa lineare e, come tale, ha una mappa duale

$$(T_p f)^* : T^*_{f(p)} N \to T^*_p M$$

che si denota $T^*_p f$ ed è chiamata *la mappa cotangente puntuale* di f in p. Si noti che essa mappa $T^*_{f(p)} N$ in $T^*_p M$; questo ha senso anche se f non è invertibile perché nella definizione di $(T_p f)^*$ si assegna p, non $f(p)$. La mappa cotangente puntuale è caratterizzata da

$$\langle T^*_p f(\alpha), v\rangle_{T_p M} = \langle \alpha, T_p f(v)\rangle_{T_{f(p)} N} \qquad \forall \alpha \in T^*_{f(p)} N \,,\, v \in T_p M \,.$$

Esempio Sia (U, ϕ) una carta di M e $p \in U$. Allora $T_p\phi : T_p M \to \mathbb{R}^n$ manda ogni vettore di $T_p M$ nella n-upla delle sue componenti nella base naturale indotta da ϕ, cioè $T_p\phi(v^i \partial_{x^i}|_p) = (v^1, \dots, v^n)$ (infatti $T_p\phi = B_{p,\phi}$, si veda la sezione 3.3.B). Siccome $T_p\phi$ è un isomorfismo, anche

$$T^*_p\phi : \mathbb{R}^n \to T^*_p M$$

è un isomorfismo (qui abbiamo usato l'identificazione di $(\mathbb{R}^n)^*$ con $\mathbb{R}^n$). Esplicitamente

$$T^*_p\phi(a) = a_i dx^i(p) \qquad \forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,.$$

Infatti, per ogni $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \left\langle T^*_p\phi(a), v^i \partial_{x^i}|_p \right\rangle_{T_p M} &= \left\langle a, T_p\phi(v^i \partial_{x^i}|_p) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle a, v\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= a_i v_i \\ &= \left\langle a_i dx^i(p), v^j \partial_{x^j}|_p \right\rangle_{T_p M} \end{aligned}$$

Dunque, l'inversa $(T^*_p\phi)^{-1}$ associa ad ogni covettore $\alpha \in T^*_p M$ la n-upla delle sue componenti nella base duale della base naturale indotta da ϕ.

4.2.C Il fibrato cotangente. L'unione disgiunta

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T^*_p M = \{(p, \alpha) : p \in M,\, \alpha \in T^*_p M\}$$

si chiama il *fibrato cotangente* di M. Si noti che in esso è definita la proiezione

$$\pi^* : T^*M \to M \,, \qquad \pi^*(p, \alpha) = p \,.$$

(ed è un fibrato vettoriale).

Come nel caso del fibrato tangente, ogni carta di M produce una carta, "fibrata" o "naturale", di T^*M, che risulta essere una varietà di dimensione $2\dim M$. Ricordiamo che una carta (U,ϕ) di M induce la carta $(TU,\widetilde{\phi})$ per TM, con $\widetilde{\phi} = T\phi : TU \to \phi(U)\times\mathbb{R}^n$, $\widetilde{\phi}(p,\xi) = (\phi(p), T_p\phi(\xi))$. Siccome $T_p\phi$ è invertibile, possiamo definire, per ogni tale carta, la mappa

$$\widetilde{\phi}^* : T^*U \to \phi(U)\times\mathbb{R}^n\,, \qquad \widetilde{\phi}^*(p,\alpha) = (\phi(p), (T^*_p\phi)^{-1}(\alpha))\,,$$

che, come visto nell'Esempio della sezione precedente, associa ad ogni $(p, a_i dx^i(p))$ la coppia $(\phi(p), a)$, ovvero le coordinate di p nella carta considerata e le componenti di α nella base dei $dx^i(p)$.

Proposizione 4.1 *Se M è una varietà di dimensione n, allora T^*M è una varietà di dimensione $2n$. Inoltre:*

i. Ogni atlante di M con carte (U_λ,ϕ_λ), $\lambda\in\Lambda$, induce un atlante $T^*\mathcal{A}$ con carte $(T^*U_\lambda,\widetilde{\phi}^*_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ chiamato atlante fibrato.

ii. La proiezione π^* è differenziabile.

La dimostrazione di questo fatto è del tutto simile a quella dell'analoga Proposizione 3.7 per il fibrato tangente, e la omettiamo. g Sottolineiamo che TM e T^*M sono varietà distinte, e in generale non vi è un'identificazione naturale fra di loro (perché non vi è fra singoli spazi tangenti e cotangenti).

4.2.D La mappa cotangente di un diffeomorfismo. A differenza della mappa tangente, la mappa cotangente puntuale non può in generale essere globalizzata ad una mappa da T^*N a T^*M, perché dovrebbe mandare da un punto di N alla sua preimmagine sotto f in M, e questo è possibile solo se f è invertibile. Però, se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, allora la sua *mappa cotangente*

$$T^*f : T^*N \to T^*M\,, \qquad T^*f(q,\beta) = (f^{-1}(q), T^*_{f^{-1}(q)}f(\beta))$$

è ben definita ed è un diffeomorfismo.

Esercizi 4.2.1 *(i) Verificare che, se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, allora $T^*f : T^*N \to T^*M$ è un diffeomorfismo, che $(T^*f^{-1}) = T^*(f^{-1})$ e che, se $g : N \to P$ è un altro diffeomorfismo, $T^*(g\circ f) = T^*f\circ T^*g$.*

(ii) Si definiscano le trivializzazioni e la banalità di T^*M come per TM, sostituendo gli spazi tangenti con quelli cotangenti nella Definizione 3.8. Mostrare che il fibrato cotangente T^*W di un aperto W di $\mathbb{R}^n$ ammette una trivializzazione. [Suggerimento: considerare la carta (W, id)].

(iii) Verificare che per ogni carta (U, ϕ) di M si ha, con l'identificazione $T^*(\phi(U)) \overset{\text{triv}}{\sim} \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\phi}^* = T^*(\phi^{-1})$ e dunque le carte di un atlante fibrato di T^*M sono $(T^*U, T^*(\phi^{-1}))$.

(iv) Mostrare che T^*M è banale se e solo se TM è banale. [Suggerimento: si costruisce una trivializzazione di T^*M a partire da una di TM sostituendo gli isomorfismi sulle fibre con le mappe duali dei loro inversi].

4.3 Il differenziale esterno delle funzioni reali

Si ricorderà che, se $\gamma : \mathbb{R} \to M$ è una mappa differenziabile, allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$,$T_t\gamma$ si può interpretare come un vettore tangente $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Vi è un duale di questo fatto.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile allora

$$T_pf : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

è una funzione lineare sullo spazio tangente T_pM e dunque un elemento dello spazio cotangente T_p^*M. Quando lo si pensa in questo modo, T_pf viene scritto $df(p)$ e si chiama il *differenziale (esterno)* di f in p; il legame fra i due oggetti è dato da

$$\langle df(p), v\rangle_{T_pM} = T_pf(v) \qquad \forall v \in T_pM\,.$$

Come vedremo più avanti, il differenziale esterno di funzioni reali è un oggetto di importanza fondamentale.

Esempi In questi esempi (o forse più esercizi che esempi) si considera una carta (U, ϕ) di una varietà M e un punto $p \in U$. Scriviamo $\phi = (x^1, \dots, x^n)$.

1. Innanzitutto verifichiamo che le componenti nella base $\mathcal{B}^*_\phi := \{dx^1(p), \dots, dx^n(p)\}$ di T_p^*M del differenziale esterno $df(p)$ di una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ sono le derivate parziali della rappresentativa locale $f \circ \phi^{-1}$ di f, e dunque

$$df(p) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))dx^i(p)\,. \tag{4.3.1}$$

Siccome $\mathcal{B}^*_\phi$ è la base duale della base naturale $\mathcal{B}_\phi := \{\partial_{x^1}|_p, \dots, \partial_{x^n}|_p\}$ di T_pM, per la (4.1.4), le componenti a_i di $df(p)$ nella base $\mathcal{B}^*_\phi$ sono date da

$$a_i = \langle df(p), \partial_{x^i}|_p\rangle_{T_pM} = T_pf(\partial_{x^i}|_p) = D_{\phi(p)}(f \circ \phi^{-1}) \circ B_{p,\phi}(\partial_{x^i}|_p)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (3.3.3) (con ψ l'identità). Ma, per definizione, $B_{p,\phi}(\partial_{x^i}|_p) = e_i$ e dunque

$$a_i = (f \circ \phi^{-1})'(\phi(p))e_i$$

è la $i-ma$ colonna della matrice Jacobiana $(f\circ\phi^{-1})'(\phi(p))$, cioè $\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))$.

La (4.3.1) è una generalizzazione della "formula del differenziale totale" $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ per funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ (e di fatto si riduce ad essa in questo caso, perché allora $\phi = \mathrm{id}$). Questo dà una prima indicazione sul motivo del termine "differenziale esterno" adottato per $df(p)$.

2. I covettori $dx^i(p)$ della base naturale di T_p^*M sono stati definiti per dualità dai vettori $\partial_{x^i}|_p$ della base naturale di T_pM. La notazione usata per i covettori suggerisce però che ciascuno di essi coincida con il differenziale esterno della corrispondente funzione coordinata $x^i : U \to \mathbb{R}$. In effetti, è così.

Per vederlo, applichiamo la (4.3.1) alla funzione $f = x^j$. La sua rappresentativa locale $f \circ \phi^{-1} = x^j \circ \phi^{-1}$ è la funzione $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^j$ (la proiezione sul j-mo fattore) e dunque $\frac{\partial(f\circ f^{-1})}{\partial x^i} = \delta_{ij}$. Di conseguenza, per la (4.3.1), $df(p) = dx^j(p)$ (dove a primo membro compare il differenziale esterno della funzione $f = x^j$ e a secondo a membro il covettore della base di T_p^*M).

3. *Cambi di carta.* Siano (U, ϕ) e $(\overline{U}, \overline{\phi})$ due carte con $U \cap \overline{U} \neq \emptyset$ e sia $p \in U \cap \overline{U}$. Scriviamo $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\overline{\phi} = (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)$. Come nell'esempio 1 denotiamo $\mathcal{B}_\phi$ e $\mathcal{B}_{\overline{\phi}}$ le basi naturali di T_pM indotte da queste due carte e $\mathcal{B}_\phi^*$ e $\mathcal{B}_{\overline{\phi}}^*$ le loro basi duali. Vogliamo scrivere la relazione fra i vettori $\partial_{x^i}|_p$ e $\partial_{\overline{x}^i}|_p$ e i covettori $dx^i(p)$ e $d\overline{x}^i(p)$ di queste basi e fra le componenti di vettori e covettori relative ad esse. Come nella sezione 3.1.C, scriviamo la funzione di transizione fra le due carte come $(\overline{\phi} \circ \phi^{-1})(x) =: \overline{x}(x)$, e denotiamone inoltre l'inversa $(\overline{\phi} \circ \phi^{-1})^{-1}(\overline{x}) =: x(\overline{x})$. Si noti che allora

$$\Big(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}(\phi(p))\Big)^{-1} = \frac{\partial x}{\partial \overline{x}}(\overline{\phi}(p))\,.$$

Siano ora $\xi = v^i \partial x^i|_p = \overline{v}^i \partial \overline{x}^i|_p \in T_pM$ e $\alpha = a_i dx^i(p) = \overline{a}_i d\overline{x}^i(p) \in T_p^*M$. Allora, per la (3.1.10),

$$\overline{v}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}(\phi(p))v^j\,. \tag{4.3.2}$$

Da questo e dalle (4.1.7) e (4.1.8) segue senza alcun calcolo

$$\overline{a}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{\phi}(p))a_j\,. \tag{4.3.3}$$

In breve, se $J = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x}(\phi(p))$, $\overline{v} = Jv$ e $\overline{a} = J^{-T}a$. Cioè, come deve essere, i rappresentativi dei vettori trasformano in modo controvariante e quelli dei covettori in modo covariante. Inoltre, per le (4.1.5) e (4.1.6),

$$\partial_{\overline{x}^i}|_p = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{\phi}(p))\partial_{x^j}|_p\,, \qquad d\overline{x}^i(p) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}(\phi(p))dx^j(p)\,. \tag{4.3.4}$$

4.4 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi 4.1.2

(i) (4.1.6) Si ha $\tilde\beta_i = \sum_h M_{ih}\beta_h$ con certi $M_{ih} \in \mathbb{R}$, e sia M la matrice di componenti M_{ih}. Allora $\delta_{ij} = \tilde\beta_i(\tilde b_j) = \sum_h M_{ih}\beta_h(\sum_k L_{jk}b_k) = \sum_{h,k} M_{ih}L_{jk}\beta_h(b_k) = \sum_{h,k} M_{ih}L_{jk}\delta_{hk} = \sum_h M_{ih}L_{jh} = \sum_h M_{ih}L^T_{hj} = (ML^T)_{ij}$. Dunque $M = L^{-T}$.

(4.1.7) $\sum_j \tilde v_j \tilde b_j = \sum_{ji} \tilde v_j L_{ji} b_i = \sum_i (\sum_j L^T_{ij}\tilde v_j) b_i$. Uguagliando a $\sum_i v_i b_i$ si ottiene

$$v_i = \sum_j L^T_{ij}\tilde v_j \,.$$

Dunque $\sum_i L^{-T}_{hi} v_i = \sum_{ij} L^{-T}_{hi} L^T_{ij}\tilde v_j = \sum_j (L^{-T}L^T)_{hj}\tilde v_j = \sum_j \delta_{hj}\tilde v_j = \tilde v_h$.

(4.1.8) Il calcolo è del tutto simile al precedente (o semplicemente si cambia L^{-T} con L).

Esercizi 4.1.4

(i) È noto che, per ogni mappa lineare $f : V \to W$, $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim V$. Se f è iniettiva, $\ker(f) = \{0\}$ e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim V$. Se $\dim W = \dim V$, questo implica $\mathrm{Im}(f) = W$ ed f è suriettiva.

(ii) σ è antisimmetrica perché, come matrice, $\mathbb{J}$ è antisimmetrica, ovvero $\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$. Allora $\sigma(u,v) = u \cdot \mathbb{J}v = \mathbb{J}^T u \cdot v = -\mathbb{J}u \cdot v = -v \cdot \mathbb{J}u = -\sigma(v,u)$. Per la non degenerazione di σ si osservi che se $\sigma(u,v) = u \cdot \mathbb{J}v = -\mathbb{J}u \cdot v = 0$ per tutti i $v \in \mathbb{R}^{2n}$ allora $\mathbb{J}u = 0$; ma $\mathbb{J}$ è invertibile, perché $\det \mathbb{J} = 1$, e dunque $u = 0$.

(iii) Se σ è simplettica, dall'antisimmetria segue che $\sigma(u,u) = 0$ per ogni $u \in V$.