ove $f'(p)$ è la matrice Jacobiana (e tenderemo ad identificare differenziale, cioè l'applicazione lineare, e matrice Jacobiana, cioè la matrice ad essa associata). Questo implica che la definizione è ben posta, nel senso che non dipende dalla scelta della curva γ tale che $\gamma'(0) = v$ e prova anche la linearità del differenziale.

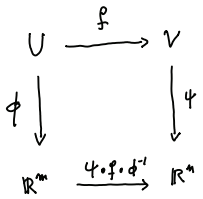
3.3.B La mappa tangente puntuale. Il procedimento precedente si generalizza in modo diretto alle mappe fra varietà, naturalmente avendo l'accortezza di sostituire le derivate delle curve con classi di equivalenza di curve. Consideriamo prima la mappa risultante in un punto, e poi la globalizziamo.

Definizione 3.9 *Sia $f : M \to N$ differenziabile. Per ogni $p \in M$, la mappa*

$$T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N\,, \qquad T_p f([\gamma]) = [f \circ \gamma] \tag{3.3.2}$$

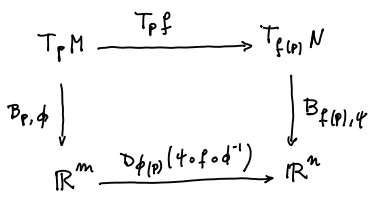
(che è ben definita, come mostriamo dopo) si chiama la mappa tangente (puntuale) *di f in p.*

Avvertiamo che in letteratura la terminologia non è univoca e queste mappe sono variamente chiamate differenziali, derivate, push-forward, sollevamento tangente. Per prima cosa determiniamone la rappresentativa locale rispetto alle basi naturali degli spazi tangenti.



Proposizione 3.10 *Sia $f : M \to N$ differenziabile e siano (U, ϕ) una carta di M con $p \in U$ e (V, ψ) una carta di N con $f(p) \in V$. Allora*

$$B_{f(p),\psi} \circ T_p f \circ B^{-1}_{p,\phi} \;=\; D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\,.$$



Dimostrazione. Sia $[\gamma] \in T_p M$ e $v = B_{p,\phi}([\gamma]) \in \mathbb{R}^m$. Allora

$$\begin{aligned}
B_{f(p),\psi} \circ T_p f \circ B^{-1}_{p,\phi}(v) &= B_{f(p),\psi} \circ T_p f([\gamma]) \\
&= B_{f(p),\psi}([f \circ \gamma]) \\
&= (\psi \circ f \circ \gamma)'(0) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)'(0) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p))\,(\phi \circ \gamma)'(0) \\
&= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\, B_{p,\phi}([\gamma]) \\
&= D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(v)
\end{aligned}$$

che, per l'arbitrarietà di v, implica l'asserto. ■

Dunque, la rappresentativa locale di T_pf nelle basi naturali è il differenziale (o matrice Jacobiana, come si preferisce) della rappresentativa locale di f. Questo si può anche scrivere

$$T_pf = B^{-1}_{f(p),\psi} \circ D_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ B_{p,\phi} \tag{3.3.3}$$

ed ha un certo numero di conseguenze, alcune tecniche ed altre più interpretative.

Innanzitutto, questo prova che la definizione (3.3.2) della mappa tangente è una buona definizione, cioè indipendente dalla scelta di γ nella classe di equivalenza $[\gamma]$ (cosa che non era a priori ovvia, visto che al secondo membro della (3.3.2) compare $[f \circ \gamma]$). Poi:

1. $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ è lineare. (Per la (3.3.3), è la composizione di tre mappe lineari).
2. Se $M \subseteq \mathbb{R}^m$ e $N \subseteq \mathbb{R}^n$ sono due aperti, allora $T_pf = D_pf$ (perché $\phi = \psi = \mathrm{id}$).
3. T_pf ha molte proprietà in comune con il differenziale. Per esempio:
   - 3.a. $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_pf$
   - 3.b. $T_p(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$
   - 3.c. $T_p(\mathrm{const}) = 0$
   - 3.d. Se f è un diffeomorfismo, T_pf è un isomorfismo e
   $$T_{f(p)}(f^{-1}) = (T_pf)^{-1}\,.$$
   Vale anche se f è solo un diffeomorfismo locale in p,[5] intendendo con f^{-1} l'inversa locale.

   (per le prove si vedano gli esercizi).

Possiamo ora reinterpretare le biezioni B_p, ϕ e i vettori tangenti a varietà come mappe tangenti, rispettivamente di funzioni coordinate e di curve. Qui usiamo l'identificazione standard degli spazi tangenti ad $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con $\mathbb{R}^n$, nella quale ad ogni curva $\eta : I \to \mathbb{R}^n$ corrisponde il suo vettore velocità $\eta'(0)$. (Questa identificazione si ottiene particolarizzando l'esempio 1 della sezione 3.1.C a $V = \mathbb{R}^n$, $\phi = \mathrm{id}$). Dunque, in questa identificazione,

$$[\eta] \equiv \eta'(0)\,. \tag{3.3.4}$$

4. Sia (U, ϕ) una carta di M. Allora, per ogni $[\gamma] \in T_pM$, $T_p\phi([\gamma]) = [\phi \circ \gamma]$ e $B_{p,\phi}([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0)$. Dunque, con l'identificazione 3.3.4,
$$T_p\phi = B_{p,\phi}\,. \tag{3.3.5}$$

[5] vedere la Definizione 3.12 più avanti.

5. Finora, non abbiamo potuto caratterizzare i vettori tangenti come derivate (o "velocità") di curve perché non sapevamo derivare mappe a valori su varietà; ma la mappa tangente è precisamente un tale oggetto. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to M$ (o $\gamma : I \to M$, ma è irrilevante) una curva per p. Allora $T_0\gamma : T_0\mathbb{R} \to T_pM$ è la mappa lineare che ad ogni $[\eta] \in T_0\mathbb{R}$, con $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una curva per 0, associa $T_0\gamma([\eta]) = [\gamma \circ \eta]$. Se scegliamo $\eta = \mathrm{id}$ abbiamo $[\gamma] = T_0\gamma([\mathrm{id}])$. Ma, nell'identificazione 3.3.4, $[\mathrm{id}] = \mathrm{id}'(0) = 1$ e dunque

$$[\gamma] = T_0\gamma(1)\,.$$

D'altra parte, ogni mappa lineare $\ell : \mathbb{R} \to V$, uno spazio vettoriale, è determinata dal suo valore in 1 (che forma una base di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale, e ogni mappa lineare è determinata dai suoi valori su una base) e dunque l'insieme di queste mappe lineari è identificabile con V tramite $\ell \equiv \ell(1)$. Usando anche questa identificazione si ha

$$[\gamma] \;=\; T_0\gamma\,. \tag{3.3.6}$$

In questo senso, un vettore tangente a M può essere interpretato come una derivata, o "velocità", di una curva. Per sottolineare questo aspetto si definisce

$$\dot\gamma(0) := T_0\gamma$$

(o $= T_0\gamma(1)$). Naturalmente la velocità di una curva $\gamma : I \to M$ si può poi definire in ogni suo punto:

$$\dot\gamma(t) := T_t\gamma \qquad \forall t \in I\,. \tag{3.3.7}$$

3.3.C La mappa tangente. Globalizziamo ora la costruzione precedente.

Definizione 3.11 *La mappa tangente di una mappa differenziabile $f : M \to N$ è la mappa*

$$Tf : TM \to TN\,, \qquad Tf(p,[\gamma]) = (f(p), T_pf([\gamma]))\,.$$

Dalla Proposizione 3.10 segue che la rappresentativa locale di Tf in ogni coppia di coordinate fibrate $(TU, \widetilde\phi)$ su TM e $(TV, \widetilde\psi)$ su TN con $f(U) \cap V \neq \emptyset$ è

$$\widetilde\psi \circ Tf \circ \widetilde\phi^{-1}(x,v) \;=\; \Big(\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x)\,,\; (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(x)v\Big) \tag{3.3.8}$$

e questo implica che Tf è differenziabile. Inoltre, le proprietà precedenti delle mappe tangenti puntuali si trasferiscono in modo ovvio alla mappa tangente. Per esempio:

6. $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.
7. Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, allora $Tf : TM \to TN$ è un diffeomorfismo e $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.
8. Se $(TU, \widetilde{\phi})$ è una carta fibrata di TM allora

$$\widetilde{\phi} = T\phi \tag{3.3.9}$$

Dunque, d'ora in poi denoteremo $(TU, T\phi)$ le carte fibrate.

Esercizi 3.3.1 *(i) Verificare le proprietà 3, 6, 7 e 8.* [R]

(ii) Sia $\widehat{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ una rappresentativa locale di una mappa differenziabile f. Mostrare che la rappresentativa locale $\widetilde{\psi} \circ Tf \circ \widetilde{\phi}^{-1}$ di Tf è $T\widehat{f}$. [R]

(iii) Mostrare che, se $f : M \to N$ è differenziabile e $\pi_M : TM \to M$ e $\pi_N : TN \to N$ sono le proiezioni canoniche dei due fibrati tangenti, allora

$$\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M \,.$$

[R]

3.4 Sottovarietà

Una sottovarietà di una varietà M è un sottoinsieme di M che è anche una varietà. Ma vi sono due tipi di sottovarietà, a seconda che la loro topologia di varietà sia quella relativa indotta da M oppure no. Inoltre, si desiderano dei criteri che permettano di stabilire se un sottoinsieme sia una sottovarietà, e di che tipo. I due principali, che utilizzano il calcolo differenziale, le descrivono come insiemi di livello di sommersioni e/o come immagini di immersioni con certe proprietà. Precisiamo innanzitutto questi termini.

3.4.A Sommersioni, immersioni, diffeomorfismi locali. Queste nozioni sono del tutto analoghe a quelle per mappe fra spazi euclidei.

Definizione 3.12 *Sia $f : M \to N$ una funzione differenziabile fra due varietà.*

i. f è una sommersione in $p \in M$ *se $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ è suriettiva. f è una* sommersione *se lo è in ogni punto del suo dominio.*

ii. *f è una* immersione in un punto $p \in M$ *se* $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ *è iniettiva.* *f è una* immersione *se lo è in ogni punto del suo dominio.*

iii. *f è un diffeomorfismo locale a $p \in M$ se esistono due intorni $U \ni p$ in M e $V \ni f(p)$ in N tali che $f|_U : U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

Naturalmente $f : M \to N$ può essere una sommersione solo se $\dim M \geq \dim N$, ed un immersione solo se $\dim M \leq \dim N$. Inoltre, dalla (3.3.3) segue che f è sommersione o immersione in un punto $p \in M$ se e solo se ogni sua rappresentativa locale relativa a carte $(U \ni p, \phi)$ e $(V \ni f(p), \psi)$ lo è in $\phi(p)$. Se f è un diffeomorfismo locale in p allora necessariamente $\dim M = \dim N$, ed f è sia una sommersione che un'immersione in p. Questo segue dalla seguente versione del teorema della funzione inversa fra varietà:

Proposizione 3.13 *Una funzione $f : M \to N$ fra due varietà è un diffeomorfismo locale in $p \in M$ se e solo se $T_p f$ è invertibile.*

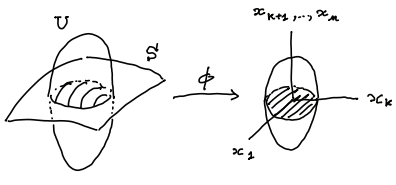
Dimostrazione. Per la Proposizione 2.10, f è un diffeomorfismo locale in p se e solo se una sua rappresentativa locale $\psi \circ f \phi^{-1}$ lo è in $\phi(p)$. Per il teorema della funzione inversa, questo è equivalente al fatto che $D_{\phi(p)}(\psi \circ f\phi^{-1})$ è invertibile e, per la (3.3.3), questo è a sua volta equivalente all'invertibilità di $T_p f$. ■

Esempi 1. La proiezione sul primo fattore $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$ è una sommersione. I suoi insiemi di livello sono i sottospazi n-dimensionali $\{(x, y) : y \in \mathbb{R}^n\}$, $x \in \mathbb{R}^k$.

Il "teorema delle sommersioni" afferma che ogni sommersione è, localmente, in opportune coordinate sul dominio e sul codominio, una proiezione su un fattore. Più precisamente, se f è una sommersione in p, allora esistono opportune carte intorno a p e ad $f(p)$ nelle quali la rappresentativa locale di f è la proiezione su un fattore.

2. La mappa $\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n+k}$, $x \mapsto (x, 0)$, è un'immersione. Il "teorema delle immersioni" afferma che, localmente, in opportune coordinate sul dominio e sul codominio, ogni immersione è l'inclusione $x \mapsto (x, 0)$.

3.4.B Sottovarietà (embedded). In questa sezione M è una varietà di dimensione n.



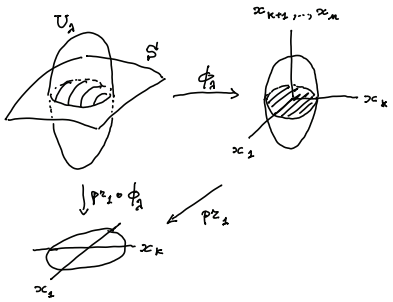
Definizione 3.14 *Un sottoinsieme S di M è una* sottovarietà *(o* sottovarietà embedded*, se si vuole evitare ogni possibile confusione) di M di dimensione $k \leq n$ se per ogni punto $p \in S$ esiste una carta (U, ϕ) di M con $p \in U$ tale che*

$$\phi(S \cap U) = \{x \in \phi(U) \,:\, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}\,.$$

Ogni tale carta si chiama adattata *ad S.*

Questa condizione implica che S, con la topologia relativa, è localmente euclidea di dimensione k. Ma, di più:

Proposizione 3.15 *Una sottovarietà di M di dimensione k è una varietà di dimensione k (e la topologia soggiacente la struttura differenziale è quella relativa indotta da M).*



Per dimostrarlo si considera una famiglia di carte $\{(U_\lambda, \phi_\lambda) \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ di M adattate ad S l'unione dei cui domini contenga S e si costruisce un atlante per S con le carte $(U_\lambda \cap S, \mathrm{pr}_{\le k} \circ \phi_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, ove $\mathrm{pr}_{\le k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è la proiezione sui primi k fattori. Lasciamo i dettagli come esercizio, ma si noti che i sottoinsiemi $U_\lambda \cap S$ sono aperti nella topologia relativa di S.

> **Esempio** 1. Le sottovarietà di M di dimensione $= \dim M$ sono tutti e soli gli aperti di M.
>
> 2. Consideriamo la proiezione sul primo fattore $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$. I suoi insiemi di livello sono i sottospazi n-dimensionali $\{(c, y) : y \in \mathbb{R}^n\}$, $c \in \mathbb{R}^k$. Ciascuno di essi è una sottovarietà n-dimensionale di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, come si vede considerando la carta adattata globale $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, \phi_c)$ con $\phi_c(x, y) = (y, x - c)$.

È noto dai corsi di analisi che gli insiemi di livello delle sommersioni sono sottovarietà. Questo fatto si generalizza alle varietà.

Definizione 3.16 *Sia $f : M \to N$ una funzione differenziabile fra due varietà.*

i. $p \in M$ è un punto regolare *di f se f è una sommersione in p.*

ii. Un insieme di livello di f è regolare *se tutti i suoi punti sono regolari.*

Per alcuni esempi illustrativi elementari vedere gli esercizi.

Proposizione 3.17 *Gli insiemi di livello regolari di una mappa differenziabile $f : M \to N$ sono sottovarietà di M di dimensione* $\dim M - \dim N$.

Esempi 1. Sappiamo che il gruppo generale lineare GL(n) è una varietà di dimensione n^2 (esempio 10 della sezione 2.2.C). Mostriamo che il gruppo speciale lineare

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL(n},\mathbb{R}) \,:\, \det A = 1\}$$

è una sottovarietà di GL(n) di dimensione $n^2 - 1$. Siccome $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ è un insieme di livello della funzione

$$\det : \mathrm{GL(n)} \to \mathbb{R}$$

ci basta mostrare che tale insieme è regolare, ovvero che per tutte le matrici $A \in \mathrm{GL(n)}$ tali che $\det A = 1$ si ha che $T_A \det : T_A\mathrm{L(n},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è suriettiva. In realtà, come ora vediamo, questa condizione è soddisfatta in tutto GL(n).

Per fare il calcolo passiamo a coordinate. Siccome GL(n) è un aperto dello spazio vettoriale $\mathrm{L(n},\mathbb{R})$, possiamo fare il calcolo in tutto $\mathrm{L}(n)$ e poi restringere il risultato a GL(n). In $\mathrm{L(n},\mathbb{R})$ usiamo le coordinate fornite dalla base formata dalle n^2 matrici che hanno tutti gli elementi nulli eccetto uno che è $= 1$. In questa base, ogni matrice A è rappresentata dalla lista $A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}$ dei suoi n^2 elementi. Per la formula dei cofattori (o sviluppo di Laplace) si ha, per ogni $h = 1, \ldots, n$,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{h+k} A_{hk} \det(C_{hk}) \tag{3.4.1}$$

ove C_{hk} è la matrice ottenuta cancellando la h-ma riga e la k-ma colonna di A. (Più propriamente, qui $\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ è il rappresentativo di $\det : \mathrm{L(n},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ in questa base; si noti peraltro che questo implica che $\det : \mathrm{L(n},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è differenziabile).

Dire che det è una sommersione in $A \in \mathrm{L(n},\mathbb{R})$ significa che il vettore $(\frac{\partial \det}{\partial A_1{}^1}(A), \ldots, \frac{\partial \det}{\partial A_n{}^n}(A))$ è non nullo, ovvero che vi è almeno una derivata $\frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}}(A)$ non nulla.

Fissiamo i, j. Siccome le matrici $C_{i1}, \ldots, C_{in}$ non contengono elementi della riga i di A, e dunque non dipendono da A_{ij}, utilizzando la (3.4.1) con $h = i$ abbiamo

$$\frac{\partial \det}{\partial A_{ij}}(A) = (-1)^{i+j} \det(C_{ij})\,.$$

Se $A \in \mathrm{GL(n)}$ allora ha determinante diverso da zero e almeno uno dei suoi minori $\det(C_{ij})$ è non nullo. Questo prova che $T_A \det$ ha rango 1 in tutto GL(n).

2. Un sistema meccanico è costituito da un numero N di punti materiali. Una volta fissato un sistema di riferimento, la posizione del punto i-mo è determinata da un punto $x_i \in \mathbb{R}^3$. Quindi la 'configurazione" del sistema è determinata da un punto in $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 \ni (x_1, \ldots, x_N)$. Un *vincolo olonomo* è costituito dall'assegnazione di una sottovarietà (connessa[6]) Q di $\mathbb{R}^{3N}$, chiamata la *varietà delle configurazioni del sistema*; la dimensione di Q è il *numero dei*

[6]Per il requisito di connessione si veda il capitolo 6 di F. Fassò, *Dispense per il corso di Fisica Matematica per il corso di laurea in Matematica* (CLEUP, Padova)

gradi di libertà del sistema vincolato. Poi, lo spazio delle fasi (o degli atti di moto, o degli stati cinematici) del sistema vincolato, nel quale le equazioni di Lagrange sono un sistema del primo ordine, è il fibrato tangente TQ (ma di questo parleremo quando avremo introdotto i campi vettoriali).

Non tutte le sottovarietà sono insiemi di livello di una sommersione. Per esempio, quelle non chiuse certamente non lo sono. Un altro esempio, il nastro di Möbius, verrà fatto più avanti. Però, localmente, in un intorno di ciascun punto, ogni sottovarietà lo è. Inoltre, siccome le curve a valori in una sottovarietà S di una varietà M sono anche curve in M, gli spazi tangenti ad S possono essere riguardati come (propriamente, identificati con) sottospazi degli spazi tangenti ad M. Precisamente:

Proposizione 3.18 *Sia S una sottovarietà di dimensione k di una varietà M di dimensione m. Allora, per ogni $p \in S$ esistono un intorno U di p in M ed una sommersione*

$$f : U \to \mathbb{R}^{m-k}$$

tali che

$$S \cap U = f^{-1}(0)\,.$$

Inoltre, per ogni $q \in S \cap U$,

$$T_q S = \ker(T_q f)\,.$$

Dimostrazione. Sia (U, ϕ) una carta di M adattata ad S, nel senso della Definizione 3.14, e con $p \in U$. Allora $\mathrm{pr}_{>k} \circ \phi$ è una sommersione con le proprietà richieste. Se $[\gamma] \in T_q S$, allora $f \circ \gamma$ è costante e dunque $T_q f([\gamma]) = 0$. Questo implica che $T_q S \subseteq \ker T_q f$. Siccome entrambi hanno dimensione k, sono uguali. ■

Esercizi 3.4.1 *(i) Stabilire quali insiemi di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, sono regolari. Quelli non regolari sono sottovarietà di $\mathbb{R}^2$?*

(ii) Stabilire quali insiemi di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, sono regolari. Quelli non regolari sono sottovarietà di $\mathbb{R}^2$?

(iii) È possibile che una sottovarietà non chiusa sia l'insieme di livello di una sommersione? [R]

(iv) Si riesce ad immaginare un esempio di una sottovarietà che non sia insieme di livello regolare di una funzione differenziabile? [Suggerimento: cosa succede se si toglie un punto ad una sottovarietà?] [R]

3.4.C Immersioni e sottovarietà immerse. Le sottovarietà possono anche essere caratterizzate, e prodotte, come immagini di immersioni di certi tipi, ma il viceversa non è propriamente vero.

Esempi 1. Una curva differenziabile $\gamma : I \to M$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ ed M una varietà è un'immersione se e solo se la sua velocità $\dot\gamma(t) = T_t\gamma \neq 0$ per tutti i $t \in I$ (si veda la (3.3.7)). Se $M = \mathbb{R}^n$, questa è l'usuale condizione $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t$. Per esempio,

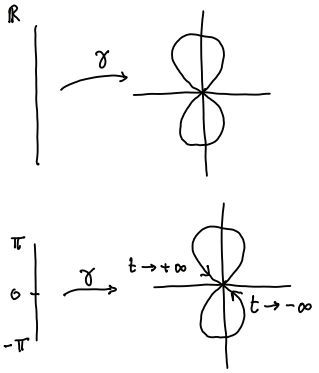
$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (t, t)\,,$$

è un'immersione iniettiva e $\gamma(\mathbb{R})$ è una sottovarietà unidimensionale di $\mathbb{R}^2$.

2. La curva

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t))$$

è un'immersione, ma non è iniettiva. La sua immagine $\gamma(\mathbb{R})$ ha la forma di un "otto" e non è una sottovarietà a causa dell'autointersezione nell'origine. Infatti, l'intersezione di $\gamma(\mathbb{R})$ con ogni intorno di $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfa ad un intervallo reale, come richiesto dalla Definizione 3.14 per una sottovarietà 1-dimensionale (per i dettagli si veda l'esercizio 3.4.2.ii).



3. La curva

$$\gamma : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t))\,,$$

è un'immersione iniettiva, e la sua immagine è ancora l'"otto" dell'esempio 2., che non è una sottovarietà.

4. La mappa $\gamma : S^1 \to S^2$, $\gamma([t]) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ è un'immersione iniettiva di S^1 (identificato con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$) nella sfera S^2 la cui immagine, l'equatore, è una sottovarietà di S^2.

5. In questo esempio identifichiamo S^1 con $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, cioè l'insieme delle classi di equivalenza $[x] := x \bmod 2\pi$. Per ogni $R > r > 0$, la mappa

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad f([\theta], [\varphi]) = \Big((R + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta\Big)\,,$$

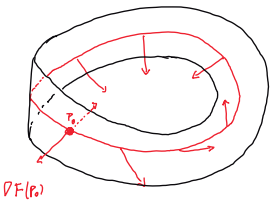
è ovviamente ben definita, è iniettiva ed è un'immersione di $\mathbb{T}^2$ in $\mathbb{R}^3$. La sua immagine ha la forma di una ciambella, o salvagente, di raggi maggiore R e minore r, ed è una sottovarietà bidimensionale di $\mathbb{R}^3$. (Essa è chiamata a volte toro di rivoluzione). Per verificare che $f(\mathbb{T}^2)$ è effettivamente una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ si può osservare che essa è insieme di livello 0 della mappa

$$F : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\} \to \mathbb{R}\,, \quad F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2\,,$$

che è una sommersione in tutti i punti ove si annulla, ed invocare la Proposizione 3.17.

6. Consideriamo il nastro di Möbius $M := Q/\sim$, ove $Q = [-\pi, \pi] \times (-1, 1)$ con la relazione di equivalenza $(-\pi, s) = (\pi, -s)\ \forall s \in (-1, 1)$ (si veda l'esempio della sezione (2.1.B); per convenienza, qui abbiamo cambiato la base $[-1, 1]$ di Q in $[-\pi, \pi]$). Consideriamo la mappa

$$f : M \to \mathbb{R}^3\,, \qquad f([\theta, s]) = \Big((1 + s\cos\tfrac{\theta}{2})\cos\theta,\ (1 + s\cos\tfrac{\theta}{2})\sin\theta,\ s\sin\tfrac{\theta}{2}\Big)\,.$$



Essa è ben definita perché, per ogni $s \in (-1,1)$, il membro di destra assume lo stesso valore in $(\theta = \pi, s)$ e $(\theta = -\pi, -s)$ ed è inoltre un'immersione iniettiva.

Anche adesso $f(M)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$, ma questo non si può mostrare come nell'esempio precedente perché essa non è globalmente zero di una sommersione. Per assurdo, supponiamo sia $f(M) = F^{-1}(0)$ con una funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che è sommersione nei punti di $f(M)$. Allora $\mathrm{grad}F(p) \neq 0$ in tutti i punti di $f(M)$. Ma se ci si muove lungo il cerchio $f([-\pi, \pi] \times \{0\})$ di $f(M)$, partendo da un punto p_0, il vettore $\mathrm{grad}F(p) \in \mathbb{R}^3$ cambia con continuità e, in modo geometricamente intuitivo, dopo un giro completo torna in $-\mathrm{grad}F(p_0)$, cosa impossibile se $\mathrm{grad}F(p_0) \neq 0$. (Quello che succede, ovviamente, è che il nastro di Möbius non è orientabile, una nozione che introdurremo piú avanti).

Questi esempi elementari mostrano che l'immagine di un'immersione di una varietà S in un'altra può o meno essere una sottovarietà di dimensione $= \dim S$, e che la mancanza di iniettività può essere (ma non necessariamente è: si vedano gli esercizi) un'ostruzione. Tuttavia, anche l'immagine di un'immersione iniettiva può non essere una sottovarietà, come nell'esempio 3. Però, anche quando non sono sottovarietà, le immagini delle immersioni iniettive sono oggetti con delle proprietà sufficientemente buone, e sono chiamate "sottovarietà immerse".

Definizione 3.19 *L'immagine di un'immersione iniettiva si chiama* sottovarietà immersa.

Nel trattare questi oggetti ci troviamo a dover considerare topologie e strutture differenziali diverse su uno stesso insieme. Per questo, quando serve le specifichiamo.

Proposizione 3.20 *Siano $(S, \mathcal{A}_S)$ ed $(M, \mathcal{A}_M)$ due varietà e $f : S \to M$ un'immersione iniettiva. Allora*

i. $f(S)$ ha una struttura differenziale $\mathcal{A}_{f(S)}$ di varietà di dimensione $= \dim S$.

ii. f è un diffeomorfismo fra $(S, \mathcal{A}_S)$ ed $(f(S), \mathcal{A}_{f(S)})$.

iii. Per ogni $s \in S$, lo spazio tangente $T_{f(s)}f(S)$ può essere identificato con $T_s f(T_s S)$.

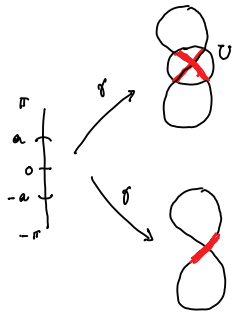
Non dimostriamo questo risultato, ma ci limitiamo ad un'osservazione. Il fatto che f sia un diffeomorfismo fra $(S, \mathcal{A}_S)$ ed $(f(S), \mathcal{A}_{f(S)})$ implica che la struttura differenziale $\mathcal{A}_{f(S)}$ su $f(S)$ coincide con quella "trasportata" da S per mezzo di f. Poiché f è anche un omeomorfismo, la stessa relazione vale fra le topologie $\mathcal{T}_S$ e $\mathcal{T}_{f(S)}$ soggiacenti le strutture differenziali. In particolare, gli aperti di $f(S)$ sono le immagini sotto f degli

aperti di S. Di conseguenza, *la topologia $\mathcal{T}_{f(S)}$ potrebbe non coincidere con la topologia relativa di $f(S)$ come sottoinsieme di M*. Se questo avviene, *$f(S)$ è una sottovarietà immersa in M ma non una sottovarietà (embedded) di M* perché, come osservato nella Proposizione 3.15, in quel caso la topologia di varietà di $f(S)$ è quella relativa.

Esempi 7. La curva

$$\gamma : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 , \qquad \gamma(t) = (\sin(2t), \sin(t)) ,$$

è un'immersione iniettiva e dunque la sua immagine $P = \gamma((-\pi, \pi))$ è una sottovarietà immersa ma, come osservato nell'esempio 3. della sezione 3.4.C, non è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$. Nella topologia relativa, gli aperti di P sono intersezioni di P con aperti di $\mathbb{R}^2$ e quindi ogni intorno U dell'origine in P contiene una "ics" centrata nell'origine. Invece, nella topologia indotta da γ, nella quale P ha la struttura di sottovarietà immersa, gli aperti di P sono le immagini sotto γ degli aperti di $(-\pi, \pi)$. Dunque, ogni "arco" $\gamma((-a, a))$ di P, con $0 < a < \pi$, è un intorno dell'origine in P. La differenza fra le due topologie è evidente.



8. Consideriamo la curva

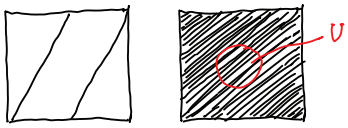
$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 , \qquad \gamma(t) = (\omega_1 t, \omega_2 t) \bmod 1$$

sul toro $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, ove ω_1 ed ω_2 sono costanti reali e $\omega_1 \neq 0$. Se si rappresenta $\mathbb{T}^2$ come il quadrato con i lati opposti identificati, $\gamma(\mathbb{R})$ consiste di segmenti paralleli, con pendenza che dipende dal rapporto $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. È facile vedere che $\gamma(\mathbb{R})$ è una curva chiusa (percorsa periodicamente da $t \mapsto \gamma(t)$) se e solo se $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q}$.

Se $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q}$ allora $\gamma(\mathbb{R})$ è una sottovarietà di $\mathbb{T}^2$ diffeomorfa ad S^1. Questo si può vedere in vari modi. Per esempio, sia $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p_2}{p_1}$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ e primi fra loro e consideri la funzione

$$F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R} , \qquad F([\alpha_1, \alpha_2]) = \sin(2\pi(p_2\alpha_1 - p_1\alpha_2)) .$$

Il suo insieme di livello 0 è regolare ed è dunque una sottovarietà di dimensione 1. Esso ha due componenti connesse, una su cui $p_2\alpha_1 - p_1\alpha_2 = 0 \bmod 1$ e l'altra su cui $p_2\alpha_1 - p_1\alpha_2 = \frac{1}{2} \bmod 1$. Le componenti connesse di una sottovarietà sono ovviamente sottovarietà, e la prima di esse coincide con $\gamma(\mathbb{R})$. Per quanto riguarda il diffeomorfismo con $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, basta considerare la mappa $\eta : S^1 \to \mathbb{T}^2$, $\eta([t]) = ([p_1 t], [p_2 t])$, che è un'immersione iniettiva (perché p_1 e p_2 sono primi fra loro) e ha come immagine $\gamma(\mathbb{R})$.



Invece, è un risultato classico (dovuto a Kronecker, che era interessato ad esso per questioni di teoria dei numeri) che se $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$ allora $\gamma(\mathbb{R})$ non solo non è chiusa, ma è densa in $\mathbb{T}^2$. Questo implica che essa non è una sottovarietà. Infatti, $\gamma(\mathbb{R})$ interseca ogni aperto non vuoto di $\mathbb{T}^2$, e dunque il dominio di ogni carta, in infiniti segmenti paralleli, e non in uno solo come sarebbe richiesto dalla Definizione 3.14. D'altra parte, nella topologia trasportata da γ su $\gamma(\mathbb{R})$, per $a > 0$ abbastanza piccolo, gli insiemi $\gamma(t)$, $t \in (-a, a)$, sono segmenti, mentre

ogni aperto di $\mathbb{T}^2$, e quindi ogni aperto di $\gamma(\mathbb{R})$ nella topologia relativa, contiene infiniti di tali segmenti paralleli.

Osservazioni: (i) Ogni sottovarietà S di una varietà M è (quasi tautologicamente) l'immagine di una immersione iniettiva di S in M. Infatti, l'inclusione $\iota : S \hookrightarrow M$ (la mappa che trasforma un punto di S nello stesso punto di M) è un'immersione iniettiva. Omettiamo la prova.

ii) Le curve "lineari" su $\mathbb{T}^2$ dell'esempio 8, e le loro generalizzazioni a $\mathbb{T}^n$, emergono in meccanica classica come orbite di sistemi integrabili. Nella terminologia usata in quel campo, il caso $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q}$ è chiamato "risonante" e quello $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$ è chiamato "non risonante"; nel secondo caso, i moti sono chiamati anche "quasi-periodici".

Esercizi 3.4.2 *(i) La curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ non è iniettiva, ma la sua immagine, il cerchio unitario, è una sottovarietà. Si trovino una varietà S ed un'immersione iniettiva γ di S in $\mathbb{R}^2$ tali che $\gamma(S)$ sia il cerchio unitario.* [R]

(ii) Con riferimento all'esempio 2, mostrare che in nessun intorno dell'origine l'insieme $\gamma(\mathbb{R})$ è omeomorfo ad un intervallo reale. [Suggerimento: La restrizione di un omeomorfismo ad un aperto è un omeomorfismo e gli omeomorfismi preservano il numero delle componenti connesse degli spazi (il primo fatto è già stato usato e si prova senza difficoltà; il secondo si basa sul fatto che un omeomorfismo manda componenti connesse in componenti connesse, cosa che si può prendere come ovvia o, se lo si desidera, provare)].

3.4.D Embedding. A questo punto è naturale domandarsi sotto quali condizioni una sottovarietà immersa $f(S)$ sia anche una sottovarietà (embedded). La risposta è che questo avviene esattamente quando la topologia trasportata da S con f coincide con quella relativa di $f(S)$, ovvero se f è un omeomorfismo fra S con la sua topologia e $f(S)$ con la topologia relativa. Dunque, l'ostruzione al fatto che una sottovarietà immersa sia una sottovarietà è di natura topologica, non differenziabile. Questo si precisa nel modo seguente:

Definizione 3.21 *Un* embedding *di una varietà S in un'altra varietà M è un'immersione iniettiva $f : S \to M$ che, considerata come mappa $f : S \to f(S)$, con $f(S)$ equipaggiata con la topologia relativa, è un omeomorfismo.*

Proposizione 3.22 *Sia f un embedding di S in M. Allora:*

i. $f(S)$ è sottovarietà di M.

ii. Per ogni $s \in S$, $T_{f(s)}(f(S)) = T_s f(T_s S)$.

Chiaramente, può non essere facile verificare se un'immersione iniettiva è un embedding, ma si conoscono delle condizioni sufficienti perché questo avvenga. Per esempio:

Proposizione 3.23 *Sia $f : S \to M$ un'immersione iniettiva. Se f è propria (in particolare, se S è compatto) allora f è un embedding e $f(S)$ è una sottovarietà di M.*

Osservazioni: (i) Le immersioni iniettive di S^1 in $\mathbb{R}^3$ sono embedding (per la Proposizione 3.23) e si chiamano *nodi*. Lo studio delle loro proprietà topologiche (più che di quelle differenziali) costituisce l'oggetto della *teoria dei nodi* e riveste interesse in molte aree della fisica (meccanica statistica, fluidodinamica, teoria delle stringhe, ...).

(ii) Secondo lo "strong embedding theorem" di Whitney ogni varietà M di dimensione n ammette un embedding in $\mathbb{R}^{2n}$. In un certo senso, quindi, tutta la teoria delle varietà potrebbe essere ricondotta a quella delle sottovarietà di spazi euclidei, che è molto più semplice. Tuttavia, vi sono molti motivi per non farlo. Innanzitutto, senza una topologia differenziale per varietà non sarebbe possibile provare (né formulare, probabilmente) un tale risultato. In secondo luogo, l'embedding di una varietà in $\mathbb{R}^m$ può essere estremamente complicato o anche non determinabile in pratica, per cui non è un utile strumento di lavoro. Ancora, sarebbe necessario distinguere le proprietà intrinseche delle (sotto)varietà da quelle estrinseche dell'embedding, una questione affrontata già da Gauss per le superfici in $\mathbb{R}^3$ con il suo *Theorema Egregium* e che ha portato allo sviluppo della teoria delle varietà e alla geometria differenziale. Ancora, certe varietà nascono naturalmente come oggetti astratti, per esempio con operazioni di quoziente (si pensi ai proiettivi), e non vi è alcun naturale ruolo di uno spazio euclideo nel quale immergerle. Infine, e forse soprattutto, il punto di vista globale aggiunge dei livelli di astrazione e comprensione insostituibili.

(iii) Se $n > 1$, ogni varietà n-dimensionale ammette un'immersione in $\mathbb{R}^{2n-1}$. Tuttavia, l'immersione potrebbe non essere iniettiva. Per esempio, la bottiglia di Klein, che ha dimensione due, può essere immersa in $\mathbb{R}^3$ ma non in modo iniettivo. (Vi sono però sue immersioni iniettive, e anzi embedding, in $\mathbb{R}^4$).

3.5 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi 3.1.1

(i) $B_{p,\phi}([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0) = \widehat{\gamma}'(0) = (\widehat{\gamma}_1'(0), \ldots, \widehat{\gamma}_n'(0)) = \sum_{i=1}^n \widehat{\gamma}_i'(0) e_i$ e dunque $[\gamma] = \sum_{i=1}^n \widehat{\gamma}_i'(0) B_{p,\phi}^{-1}(e_i)$.

(ii) Le coordinate sferiche (θ, φ) su S^2 sono la restrizione a $r = 1$ delle coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$ considerate nell'esempio 3. della sezione 3.1.C. Quindi

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)\,, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_p = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)\,.$$

La risposta alla seconda domanda è negativa: se p tende a un polo allora $\theta \to 0, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_p \to 0$; questo riflette il fatto che la lunghezza dei paralleli tende a 0 quando ci si avvicina ai poli.

(iii) Sia $\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\Big|_p \in T_pM$. Per la (3.1.10), $\sum_j \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_p = \sum_{j,i} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} v_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\Big|_p = \sum_i v_i \sum_j \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\Big|_p$. Questo uguaglia $\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ per tutti i $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ se e solo se vale la (3.1.11).

(iv) Per controllare che $x \mapsto \tilde{\phi}(x)$, che scriviamo $x \mapsto \tilde{x}(x)$, sia una carta globale dell'atlante standard basta controllare che essa sia un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in sè. Questo si controlla senza difficoltà (l'inversa è $x(\tilde{x}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1^3)$). Usando la (3.1.11) si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p &= \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\Big|_p + \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\Big|_p + 3x_1^2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\Big|_p \\
\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p &= \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\Big|_p + \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\Big|_p .
\end{aligned}$$

e dunque $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p - 3\tilde{x}_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$ e $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$.

Esercizi 3.3.1

(i) La proprietà 3.a segue dalla (3.3.3) e dalle proprietà del differenziale di mappe fra spazi euclidei. Siano $f : M \to N$ e $g : N \to Q$ e siano ϕ, ψ, ξ carte in M vicino a p, in N vicino a $f(p)$ e in Q vicino a $g(f(p))$, rispettivamente. Si ha (scrivendo la matrice Jacobiana invece del differenziale, che rende appena più semplice usare la regola a catena)

$$T_p(g \circ f) = B^{-1}_{(g\circ f)(p),\xi} \circ (\xi \circ g \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \circ B_{p,\phi} .$$

Ma

$$\begin{aligned}
(\xi \circ g \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) &= (\xi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \\
&= (\xi \circ g \circ \psi^{-1})'(\psi(f(p))) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p))
\end{aligned}$$

e dunque

$$T_p(g \circ f) = B^{-1}_{(g(f(p)),\xi} \circ (\xi \circ g \circ \psi^{-1})'(\psi(f(p))) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \circ B_{p,\phi}$$

che diventa $T_{f(p)}g \circ T_p f$ inserendo $B_{f(p),\psi} \circ B^{-1}_{f(p),\psi}$ fra le due matrici Jacobiane. Le 3.b e 3.c seguono dalla (3.3.3). Per la 3.d si calcola, usando 3.a e 3.b, $\mathrm{id} = T_p(f^{-1} \circ f) = T_{f(p)}(f^{-1}) \circ T_p f$.
Per la 6., usando 3.a,

$$\begin{aligned}
T(g \circ f)(p, [\gamma]) &= \Big(g \circ f(p),\, T_p(g \circ f)([\gamma])\Big) \\
&= \Big(g(f(p)),\, T_{f(p)}g \circ T_p f([\gamma])\Big) \\
&= Tg\Big(f(p),\, T_p f([\gamma])\Big) \\
&= Tg(Tf(p, [\gamma])) .
\end{aligned}$$

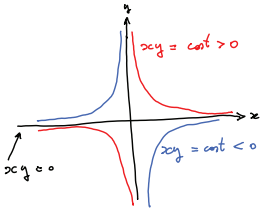
La 7. segue dalla 6. Per la 8.: $\widetilde{\phi}(p, [\gamma]) = (\phi(p), T_p\phi([\gamma])) = T\phi(p, [\gamma])$.

(ii) $\widetilde{\psi} \circ Tf \circ \widetilde{\phi}^{-1} = T\psi \circ Tf \circ (T\phi)^{-1} = T\psi \circ Tf \circ T(\phi^{-1}) = T(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$.

(iii) $\pi_N \circ Tf(p, [\gamma]) = \pi_N\Big(f(p), T_p f([\gamma])\Big) = f(p)$ e $f \circ \pi_M(p, [\gamma]) = f(p)$.

Esercizi 3.4.1

(i) La matrice Jacobiana di $f(x, y) = x^2 + y^2$ è $f'(x, y) = (2x, 2y)$ ed ha rango 1 in tutti i punti eccetto l'origine, ove ha rango zero. Tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ eccetto l'origine sono regolari. L'insieme di livello che contiene l'origine è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$, cioè l'origine stessa. Tutti gli altri sono regolari e sono i cerchi $x^2 + y^2 = \mathrm{const} > 0$, che sono varietà 1-dimensionali. L'insieme singolare, che contiene l'origine, è invece una varietà 0-dimensionale.



(ii) La matrice Jacobiana di $f(x,y) = xy$ è $f'(x,y) = (y,x)$, che ha rango uno in tutti i punti eccetto l'origine, ove ha rango zero. Anche adesso tutti i punti di $\mathbb{R}^2$, eccetto l'origine, sono regolari. L'insieme di livello 0, che contiene l'origine, non è regolare ed è l'unione degli assi x ed y. Gli altri insiemi di livello sono regolari e sono formati ciascuno dai due rami dell'iperbole $xy = \text{const} \neq 0$; essi sono sottovarietà 1-dimensionali. L'insieme di livello non regolare non è invece una sottovarietà. Infatti, in un intorno di un qualunque punto diverso dall'origine esso è omeomorfo ad un intervallo reale, per cui se fosse una varietà dovrebbe avere dimensione 1. Ma in ogni intorno di 0 esso ha la forma di una croce e non è omeomorfo ad un intervallo reale (si veda l'esercizio 3.4.2.ii).

(iii) No: gli insiemi di livello di una funzione continua sono chiusi (sono preimmagini di punti, che sono chiusi).

(iv) Se S è una sottovarietà di dimensione $n > 0$ allora anche S privata di un punto P è una sottovarietà di dimensione n (le carte adattate ad $S \setminus \{P\}$ si costruiscono in modo ovvio da quelle carte adattate ad S). Se S è chiusa, per esempio una sfera, $S \setminus \{P\}$ non è chiusa.

Esercizi 3.4.2

(i) $S = S^1$, $\gamma([t]) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.