(Version 2026.1)

Capitolo 3

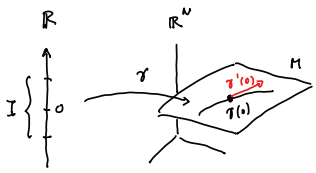
Il fibrato tangente e la mappa tangente

Il fibrato tangente è un oggetto fondamentale della geometria differenziale. Esso rende possibile il calcolo differenziale su una varietà (gli "spostamenti infinitesimi" sono vettori tangenti e il differenziale di una mappa agisce su di essi). Inoltre il fibrato tangente emerge come lo spazio naturale in cui collocare molte teorie fisiche, per esempio la meccanica lagrangiana e varie teorie di campo. Ed ancora, il fibrato tangente è il primo esempio di una classe di oggetti, appunto i fibrati, che hanno rilevante interesse matematico e rilevanza fisica (per esempio, le teorie di gauge sono naturalmente formulate su fibrati "principali").

3.1 Gli spazi tangenti

Gli spazi tangenti ad una varietà possono essere costruiti usando diversi approcci, e noi seguiremo quello che sembra più geometrico.

3.1.A Richiami da $\mathbb{R}^N$. Preliminarmente è utile ricordare la situazione negli spazi euclidei. Nel caso di una sottovarietà n-dimensionale M di $\mathbb{R}^N$ (o di un aperto di $\mathbb{R}^n$, perché gli aperti sono particolari sottovarietà) i vettori tangenti ad M in un suo punto p sono le derivate (o "velocità") $\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$ delle curve $\gamma : I \to M$, con I un intervallo reale che contiene 0, tali che $\gamma(0) = p$. Più precisamente, siccome diverse curve possono avere la stessa derivata, un vettore tangente dovrebbe



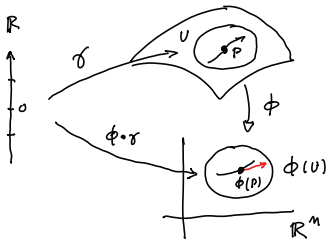
essere pensato come l'insieme di tutte le curve definite in un intervallo contenente 0 e passanti per p a $t = 0$ e con la stessa derivata a $t = 0$. O anche, più propriamente, come una classe di equivalenza di tutte tali curve, sotto la relazione di equivalenza data dall'avere la stessa derivata a $t = 0$ (riguardarli così non è naturalmente necessario fino a che si lavora in $\mathbb{R}^N$, ma è opportuno tenere in mente questo fatto in vista del caso delle varietà). L'insieme dei vettori tangenti ad M in p forma un sottospazio vettoriale n-dimensionale di $\mathbb{R}^N$, chiamato lo spazio tangente T_pM ad M in p.

Trasferire questa struttura ad una varietà si scontra con la difficoltà che non sappiamo derivare curve a valori in una varietà. Si rimedia considerando le rappresentative locali nelle carte ed utilizzandole per indurre oggetti e struttura sulla varietà. In questo modo si utilizzano le carte (e dunque la struttura differenziale) per *costruire* un qualcosa che prima non esisteva. Si deve però mostrare che questa costruzione non dipende dalle carte usate, in modo che sia una proprietà della varietà.

3.1.B Costruzione dello spazio tangente. Sia M una varietà di dimensione n e p un punto di M.

Sia Γ_p l'insieme di tutte le curve differenziabili $\gamma : I \to M$, $t \mapsto \gamma(t)$, definite in un qualche intervallo reale I che contiene 0 e che passano per p a $t = 0$. Definiremo una relazione di equivalenza in Γ_p le cui classi di equivalenza interpreteremo come vettore tangente.

Innanzitutto consideriamo una carta (U, ϕ) con $p \in U$ e, per ogni $\gamma \in \Gamma_p$, la rappresentativa locale



$$\phi \circ \gamma : I \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \,.$$

Allora $(\phi \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^n$ è la velocità della rappresentativa locale di γ ed è un vettore tangente a $\phi(U)$ in $\phi(p)$. Diciamo che due curve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$ sono *equivalenti rispetto a* (U, ϕ), e scriviamo $\gamma_1 \sim_\phi \gamma_2$, se

$$(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0) \,.$$

Lemma 3.1 *La relazione di equivalenza così definita in* Γ_p *è indipendente dalla carta, nel senso che* $\gamma_1 \sim_\phi \gamma_2$ *se e solo se* $\gamma_1 \sim_\psi \gamma_2$ *in ogni altra carta* (V, ψ) *con* $p \in V$.

Dimostrazione. Sia $\gamma \in \Gamma_p$ e $p \in U \cap V$. Allora $(\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)'(0)$. Siccome $\psi \circ \phi^{-1}$ e $\phi \circ \gamma$ sono entrambe mappe fra spazi euclidei, ed hanno un differenziale, si può calcolare la derivata con la regola a catena trovando

$$(\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \cdot (\phi \circ \gamma)'(0)\,. \tag{3.1.1}$$

Qui $(\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p))$ è interpretabile come la matrice Jacobiana della funzione di transizione fra le due carte, ed è pertanto invertibile. Si conclude quindi che, se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$, si ha $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$ se e solo se $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$. ■

Abbiamo dunque una relazione di equivalenza $\sim$ in Γ_p, definita dal fatto che $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se e solo se $\gamma_1 \sim_\phi \gamma_2$ in una (e quindi ogni) carta il cui dominio contiene p. Denotiamo $[\gamma]$, $\gamma \in \Gamma_p$, le classi di equivalenza e $\Gamma_p/\sim$ lo spazio quoziente.

Definizione 3.2 $\Gamma_p/\sim =: T_pM$ *si chiama lo* spazio tangente ad M in p. *I suoi elementi* $[\gamma]$ *si chiamano* vettori tangenti ad M in p.

Dunque, i vettori tangenti sono classi di equivalenza di curve.

Mettiamo ora una struttura di spazio vettoriale su T_pM. Per ogni carta (U, ϕ) con $p \in U$ definiamo la mappa

$$B_{p,\phi} : T_pM \to \mathbb{R}^n\,, \qquad B_{p,\phi}([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0) \tag{3.1.2}$$

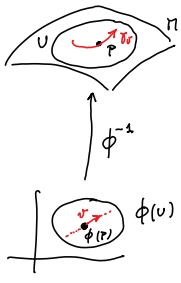
(è chiaro che essa è ben definita perché, per definizione, $(\phi \circ \gamma)'(0)$ non dipende dalla scelta di γ in una classe di equivalenza). Per brevità, se è chiaro quale sia p, a volte scriveremo B_ϕ.

Lemma 3.3 $B_{p,\phi}$ *è biettiva.*

Dimostrazione. L'iniettività è ovvia, perché se $(\phi\circ\gamma_1)'(0) = (\phi\circ\gamma_2)'(0)$ allora $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Per la suriettività dobbiamo mostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ esiste $\gamma \in \Gamma_p$ tale che $B_\phi([\gamma]) = v$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$. Siccome $\phi(U)$ è aperto, la curva $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(p) + tv \in \mathbb{R}^n$, che passa per $\phi(p)$ a $t = 0$, prende valori in $\phi(U)$ per t in un qualche intervallo I che contiene 0. Dunque la curva

$$\gamma_v : I \to U\,, \qquad \gamma_v(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv) \tag{3.1.3}$$

è ben definita e appartiene a Γ_p. Inoltre, essa soddisfa $B_\phi([\gamma_v]) = (\phi \circ \gamma_v)'(0) = \frac{d}{dt}(\phi(p) + tv)|_{t=0} = v$. ■



Possiamo ora usare le biiezioni $B_{p,\phi}$ per "trasportare" a T_pM la struttura vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (nello stesso modo in cui avevamo trasportato topologie e strutture differenziali).

Lemma 3.4 *Con la somma e moltiplicazione per scalare definite come*

$$\begin{aligned} [\gamma_1] + [\gamma_2] &:= B_\phi^{-1}\Big(B_\phi([\gamma_1]) + B_\phi([\gamma_2])\Big) \qquad \forall\, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p \\ c[\gamma] &:= B_\phi^{-1}\Big(cB_\phi([\gamma])\Big) \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}\,,\ \gamma \in \Gamma_p \end{aligned}$$

T_pM è uno spazio vettoriale di dimensione $= \dim M$. Inoltre, $B_\phi : T_pM \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La dimostrazione è elementare e lasciata come esercizio. Ma c'è di più: questa struttura non dipende dalla scelta della carta.

Lemma 3.5 *La struttura di spazio vettoriale su T_pM definita nel Lemma 3.4 non dipende dalla carta considerata.*

Dimostrazione. Consideriamo due carte (U, ϕ) e (V, ψ) con $p \in U \cap V$. La (3.1.1) può essere riscritta $B_\psi([\gamma]) = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p))B_\phi([\gamma])$ ed il fatto che essa valga per ogni $[\gamma] \in T_pM$ implica $B_\psi = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \circ B_\phi$. Dunque la mappa

$$B_\psi \circ B_\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

è data da

$$B_\psi \circ B_\phi^{-1} = (\psi \circ \phi^{-1})'(\phi(p)) \tag{3.1.4}$$

ed è lineare.[1] Per provare il Lemma dobbiamo mostrare che, per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$B_\phi^{-1}\Big(c_1B_\phi([\gamma_1]) + c_2B_\phi([\gamma_2])\Big) = B_\psi^{-1}\Big(c_1B_\psi([\gamma_1]) + c_2B_\psi([\gamma_2])\Big)\,.$$

Ma questo è equivalente a

$$B_\psi \circ B_\phi^{-1}\Big(c_1B_\phi([\gamma_1]) + c_2B_\phi([\gamma_2])\Big) = c_1B_\psi([\gamma_1]) + c_2B_\psi([\gamma_2])\,,$$

che è vero per la linearità di $B_\psi \circ B_\phi^{-1}$. ■

In conclusione:

[1] Qui stiamo confondendo la matrice con l'associata trasformazione lineare.

Proposizione 3.6 *Per ogni $p \in M$, T_pM è uno spazio vettoriale di dimensione $= \dim M$ e, per ogni carta (U, ϕ) con $p \in U$, $B_{p,\phi} : T_pM \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

> **Osservazione:** I vettori tangenti ad una varietà si possono definire anche in altri due modi: o come "derivazioni" delle funzioni reali sulla varietà, cosa sulla quale diremo qualcosa, o per mezzo dei loro rappresentativi; si veda per esempio la sezione 2.1 in: Jeffrey Lee, *Manifolds and Differential Geometry* (AMS 2009).

3.1.C Le "basi naturali" degli spazi tangenti. Per lavorare sugli spazi tangenti serve introdurre una base in ciascuno di essi. Vi è un modo standard di farlo, che parte dalle coordinate locali su M. Avviene infatti che ogni carta (U, ϕ) di M induce una base, chiamata base "naturale" associata ad essa, su ciascuno spazio tangente T_pM con $p \in U$. Essa è formata dagli $n = \dim M$ vettori

$$\{B_{p,\phi}^{-1}(e_1), \dots, B_{p,\phi}^{-1}(e_n)\},$$

ove $e_1, \dots, e_n$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Che questi vettori siano linearmente indipendenti, e quindi formino una base di T_pM, segue dal fatto che $B_{p,\phi}$ è un isomorfismo. Tradizionalmente, se le componenti di ϕ si indicano $(x_1, \dots, x_n)$, allora i vettori della base naturale si denotano

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p := B_{p,\phi}^{-1}(e_i), \qquad i = 1, \dots, n$$

(o anche $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$, $\partial_{x_i}|_p$, $\partial_{x_i}(p)$). L'origine di questa notazione verrà spiegata in seguito.

È possibile, ed interessante, caratterizzare diversamente i vettori della base naturale associata ad una carta (U, ϕ). Per ogni $p \in U$ ed $i = 1, \dots, n$, la curva

$$t \mapsto \gamma_{e_i}(t) := \phi^{-1}(\phi(p) + te_i) \tag{3.1.5}$$

è definita per t in un intorno di 0 (si veda la (3.1.3)) e si chiama "curva coordinata i-ma per il punto p". Siccome $B_{p,\phi}([\gamma_{e_i}]) = \frac{d}{dt}(\phi(p) + te_i)|_{t=0} = (\phi \circ \gamma_{e_i})'(0) = e_i$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = [\gamma_{e_i}]. \tag{3.1.6}$$

Dunque, i vettori tangenti della base naturale nel punto p sono le classi di equivalenza delle curve coordinate, ed hanno una chiara interpretazione geometrica. Si veda anche l'esercizio 3.1.1.i.

Esempi *1. Spazi tangenti a uno spazio vettoriale.* È ovvio che gli spazi tangenti ad uno spazio vettoriale V sono identificabili con V stesso. Infatti, come nel caso di $\mathbb{R}^n$ considerato a inizio sezione 3.1.A, la derivata di una curva γ a valori in V è anch'essa un vettore di V.[2] È tuttavia interessante guardare questa identificazione nel contesto di questa sezione.

Ricordiamo che V è una varietà n-dimensionale e, se $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ ne è una base, una carta globale è data dalla mappa

$$\phi : V \to \mathbb{R}^n\,, \qquad \phi(\textstyle\sum_i v_i b_i) = (v_1, \dots, v_n)\,,$$

che manda la base $\mathcal{B}$ nella base canonica di $\mathbb{R}^n$ (Esempio 8 della sezione 2.2.C). Allora si può costruire una biiezione fra T_pV e V nel modo seguente: prima si identifica T_pV con $\mathbb{R}^n$ per mezzo di $B_{p,\phi}$, ovvero per mezzo della base naturale indotta da ϕ, e poi si identifica $\mathbb{R}^n$ con V per mezzo di ϕ^{-1}, ovvero della base $\mathcal{B}$ di V:

$$\phi^{-1} \circ B_{p,\phi} : T_pV \xrightarrow{B_{p,\phi}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi^{-1}} V\,.$$

Si usano, dunque, due distinte identificazioni. Esplicitamente, per ogni curva $\gamma = \sum_i \gamma_i b_i \in \Gamma_p$, $\phi^{-1} \circ B_{p,\phi}([\gamma]) = \phi^{-1}((\phi \circ \gamma)'(0)) = \phi^{-1}((\sum_i \gamma_i e_i)'(0)) = \phi^{-1}(\sum_i \gamma_i'(0) e_i) = \sum_i \gamma_i'(0) b_i$ e dunque

$$\phi^{-1} \circ B_{p,\phi}([\gamma]) = \gamma'(0)$$

come doveva essere. In particolare, $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ è identificato con b_i.

2. In uno spazio vettoriale, o in suo aperto, si possono usare anche coordinate $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ diverse da quelle date da una base. In tal caso, nell'identificazione di T_pV con V spiegata nell'esempio precedente (attenzione che adesso ϕ *non* è la carta dell'esempio precedente!) si ha che al vettore $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_pV$ corrisponde il vettore $\gamma'_{e_i}(0) \in V$, con γ_{e_i} dato dalla (3.1.5). Allora

$$\gamma'_{e_i}(0) = \frac{d}{dt}\phi^{-1}(\phi(p) + te_i)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi^{-1}(\phi(p)_1, \dots, \phi(p)_i + t, \dots, \phi(p)_n)|_{t=0}$$

e dunque

$$\gamma'_{e_i}(0) = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))\,. \tag{3.1.7}$$

Pertanto, a $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ in T_pV corrisponde $\frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_i}(\phi(p))$ in V, e questo dà una prima spiegazione dell'uso del simbolo $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$.

3. Consideriamo un sistema di coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$, ovvero la carta (U, ϕ) con U uguale ad $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse z e di un intero semipiano verticale limitato

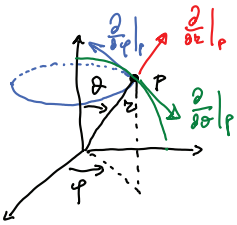
[2] In dettaglio: se $\{b_1, \dots, b_n\}$ è una base di V e $\gamma = \sum_i \gamma_i b_i \in V$ allora $\gamma'(0) = \sum_i \gamma_i'(0) b_i \in V$ ed è facile verificare che questo vettore non dipende dalla base considerata.

da esso, $\phi(U) = \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \ni (r,\theta,\varphi)$ (o qualunque altro intervallo aperto di lunghezza 2π per φ) e

$$\phi^{-1}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,.$$

I vettori della base naturale (identificati con vettori di $\mathbb{R}^3$, come spiegato nell'esempio precedente) in un punto $p = \phi^{-1}(r,\theta,\varphi)$ sono, usando la (3.1.7),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\Big|_p &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)\\
\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_p &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$



e sono tangenti, rispettivamente, alle curve coordinate r (i raggi per l'origine), θ (i meridiani) e φ (i paralleli).

Concludiamo con un'osservazione. Se (U,ϕ) e $(\tilde U,\tilde\phi)$ sono carte di M con $U\cap\tilde U\neq\emptyset$, allora nei T_pM con $p\in U\cap\tilde U$ sono definite le due basi naturali associate alle due carte. I rappresentativi $B_{p,\phi}([\gamma])$ e $B_{p,\tilde\phi}([\gamma])$ di uno stesso vettore tangente nelle due basi sono legati (vedere la (3.1.4)) da

$$B_{p,\tilde\phi}([\gamma]) = (\tilde\phi\circ\phi^{-1})'(\phi(p))B_{p,\phi}([\gamma]) \tag{3.1.8}$$

ovvero trasformano con la matrice Jacobiana della funzione di transizione fra le due carte. Spesso si scrive $\phi = (x_1,\dots,x_n)$, $\tilde\phi = (\tilde x_1,\dots,\tilde x_n)$, $(\tilde\phi\circ\phi^{-1})(x) =: \tilde x(x)$ e corrispondentemente $(\tilde\phi\circ\phi^{-1})' = \tilde x'$ o anche $\frac{\partial\tilde x}{\partial x}$. Allora fra $\tilde v = B_{p,\tilde\phi}([\gamma])$ e $v = B_{p,\phi}([\gamma])$ si ha la relazione

$$\tilde v = \frac{\partial\tilde x}{\partial x}(x)v \tag{3.1.9}$$

o

$$\tilde v_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\tilde x_i}{\partial x_j}(x)v_j\,, \qquad i=1,\dots,n\,. \tag{3.1.10}$$

Osservazione: L'espressione "base naturale" è tradizionale, ma l'aggettivo "naturale" qui è fuorviante, perché normalmente significa "indipendente dalle coordinate".

Esercizi 3.1.1 *(i) Verificare che, se $\gamma\in\Gamma_p$ ha rappresentativa locale $\phi\circ\gamma =: \widehat\gamma = (\widehat\gamma_1,\dots,\widehat\gamma_n)$ in una certa carta (U,ϕ), allora*

$$[\gamma] = \sum_{i=1}^n \widehat\gamma_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\,.$$

(ii) Determinare i vettori della base naturale associata a una carta di coordinate sferiche in S^2. Si possono estendere con continuità i vettori di tale base a vettori non nulli tangenti alla sfera nei poli? [R]

(iii) Siano $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ e $\tilde\phi = (\tilde x_1, \dots, \tilde x_n)$ due carte i cui domini contengono uno stesso punto $p = \phi^{-1}(x) = \tilde\phi^{-1}(\tilde x)$. Scriviamo $\tilde\phi \circ \phi^{-1}(x)$ come $\tilde x(x)$. Mostrare che

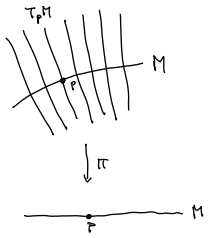
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde x_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial \tilde x_j}\Big|_p \,. \tag{3.1.11}$$

[Suggerimento: scrivere uno stesso vettore tangente nelle due basi ed usare la (3.1.10)]. [R]

(iv) Ciascun vettore $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ della base naturale indotta da una carta dipende da tutte le coordinate $x_1, \dots, x_n$ della carta, non solo dalla i-ma. Come esempio, verificare che $\tilde\phi(x) = (x_1, x_2 + x_1^3) =: \tilde x(x)$ è una carta dell'atlante standard di $\mathbb{R}^2$ e poi calcolarne la base naturale $\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde x_1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial \tilde x_2}\big|_p\right\}$ in un punto $p = \tilde\phi^{-1}(\tilde x)$. È $\frac{\partial}{\partial \tilde x_1}\big|_p = \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p$? [R]

3.2 Il fibrato tangente

3.2.A Costruzione del fibrato tangente. Intuitivamente, il fibrato tangente TM di una varietà M è l'oggetto geometrico costituito da M con tutti i suoi spazi tangenti T_pM, ciascuno "attaccato" nel punto p. Questa idea è formalizzata dalla definizione di TM, come insieme, come "unione disgiunta" degli spazi tangenti, ovvero



$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM = \{(p, [\gamma]) \,:\, p \in M \,,\ [\gamma] \in T_pM\} \,.$$

Si noti che M *non è* un sottoinsieme di TM. Vi è però la "proiezione canonica"

$$\pi : TM \to M \,, \qquad \pi(p, [\gamma]) = p$$

le cui fibre (= insiemi di livello) sono gli spazi tangenti:

$$\pi^{-1}(p) = T_pM \,.$$

Per questo motivo, M è chiamato la *base* di TM.

Così definito, TM è un insieme. Ma, inoltre, esso ha una struttura di varietà di dimensione $2n$ che è indotta da quella di M. Per mostrarlo utilizziamo la procedura della Proposizione 2.6 (lasciando però alcuni dettagli come esercizio).

Consideriamo un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ di M costituito da un numero al più numerabile di carte[3] e, per ciascuna di queste carte, il

[3] Non è difficile vedere che l'esistenza di un atlante numerabile segue dal fatto che la topologia è a base numerabile.

sottoinsieme

$$TU_\lambda = \pi^{-1}(U_\lambda)$$

di TM costituito dagli spazi tangenti basati sui punti di U_λ e la mappa

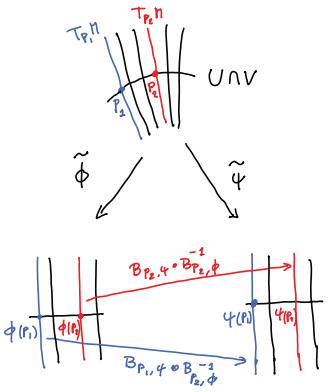
$$\widetilde{\phi}_\lambda : TU_\lambda \to \phi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \qquad \widetilde{\phi}_\lambda(p, [\gamma]) = (\phi_\lambda(p), B_{p,\phi_\lambda}([\gamma]))$$

(ovviamente identifichiamo $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, come insiemi e come spazi topologici). Chiaramente i TU_λ coprono TM. Inoltre, ciascuna delle mappe $\widetilde{\phi}$ (per semplicità di notazione omettiamo l'indice λ quando non è indispensabile) è biettiva, con inversa $\widetilde{\phi}^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^n \to TU$ data da

$$\widetilde{\phi}^{-1}(x, v) = (\phi^{-1}(x), B^{-1}_{\phi^{-1}(x),\phi}(v)) .$$

Dunque, i $(TU_\lambda, \widetilde{\phi}_\lambda)$ sono carte insiemistiche di dimensione $2n$ per TM. Non è difficile verificare che esse hanno le proprietà i. e ii. della Proposizione 2.6.[4] Riguardo alla proprietà iii., limitiamoci a determinare la forma delle funzioni di transizione fra due di queste mappe, diciamo $(TU, \widetilde{\phi})$ e $(TV, \widetilde{\psi})$ con $TU \cap TV \neq \emptyset$. Siccome $TU \cap TV = T(U \cap V)$, questo implica $U \cap V \neq \emptyset$. Se $(x, v) \in \widetilde{\phi}(TU \cap TV)$, e scrivendo per brevità p per $\phi^{-1}(x)$, si ha

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi}^{-1}(x, v) &= \widetilde{\psi}(\phi^{-1}(x), B^{-1}_{p,\phi}(v)) \\ &= (\psi \circ \phi^{-1}(x), B_{p,\psi} \circ B^{-1}_{p,\phi}(v)) \\ &= ((\psi \circ \phi^{-1})(x), (\psi \circ \phi^{-1})'(x)v) \end{aligned}$$



che è differenziabile perché $g := \psi \circ \phi^{-1}$ e quindi g' sono differenziabili e, per quanto riguarda la dipendenza da v, ogni mappa lineare lo è. Il fatto che sia un diffeomorfismo fra $\widetilde{\phi}(TU \cap TV)$ e $\widetilde{\psi}(TU \cap TV)$ segue poi dal fatto che $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è un diffeomorfismo (che implica anche l'invertibilità della matrice Jacobiana $(\psi \circ \phi^{-1})'(x)$). Questo porta alla seguente Proposizione:

Proposizione 3.7 *Sia M una varietà n-dimensionale.*

i. TM è una varietà di dimensione $2n$.

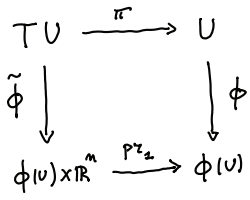
ii. Se $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ è un atlante di M allora

$$T\mathcal{A} := \{(TU_\lambda, \widetilde{\phi}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

è un atlante di TM.

[4] Si veda per esempio John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition (Springer, 2013), pg. 66-67.

iii. $\pi : TM \to M$ *è differenziabile.*



Dimostrazione. i. e ii. si provano con gli argomenti già indicati. Per iii. basta osservare che la rappresentativa locale di π rispetto ad una coppia di carte $(TU, \widetilde{\phi})$ su TM e (U, ϕ) su M è

$$\phi \circ \pi \circ \widetilde{\phi}^{-1}(x, v) = \phi \circ \pi\Big(\phi^{-1}(x), B^{-1}_{\phi^{-1}(x),\phi}(v)\Big) = \phi(\phi^{-1}(x)) = x\,,$$

ovvero la proiezione sul primo fattore, che è differenziabile. ■

L'atlante $T\mathcal{A}$ e le carte $(TU_\lambda, \widetilde{\phi}_\lambda)$ della Proposizione 3.7 si chiamano atlante e carte *fibrate* di TM (è molto usato anche il termine *naturali*).

In ciascuna carta fibrata la mappa

$$\widetilde{\phi}_\lambda : TU_\lambda \to \phi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^n$$

è un diffeomorfismo (esempio 1. della sezione 2.3.B). Siccome anche $\phi_\lambda : U_\lambda \to \phi_\lambda(U_\lambda)$ è un diffeomorfismo, ciascun TU_λ è diffeomorfo al prodotto cartesiano della sua base U_λ e di $\mathbb{R}^n$. Precisamente, componendo $\widetilde{\phi}_\lambda$ con $\phi_\lambda^{-1} \times \mathrm{id}$ si ottiene un diffeomorfismo $TU_\lambda \to U_\lambda \times \mathbb{R}^n$, il quale ha la proprietà che, per ogni $p \in U_\lambda$, manda T_pM su $\{p\} \times \mathbb{R}^n$, ed anzi la cui restrizione a T_pM è un isomorfismo di spazi vettoriali fra T_pM e $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ (identificato con $\mathbb{R}^n$). Dunque, ogni carta fibrata fornisce un'identificazione degli spazi tangenti nel suo dominio con $\mathbb{R}^n$. Però, questa identificazione dipende dalla carta. In generale, non vi è un'identificazione "naturale" degli spazi tangenti di M con $\mathbb{R}^n$ e, come conseguenza, neppure fra diversi spazi tangenti. Un problema correlato è se, globalmente, TM sia diffeomorfo ad $M \times \mathbb{R}^n$.

Esempio $T\mathbb{R}^n$ è naturalmente identificato con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Infatti se si considera la carta globale $\phi = \mathrm{id}$ si ha il diffeomorfismo $\widetilde{\phi} : T\mathbb{R}^n \to \phi(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Come ora discutiamo, in generale, però, la situazione è più complessa.

Osservazioni: (i) (TM, M, π) è un esempio di "fibrato", più precisamente di "fibrato vettoriale", oggetti che studieremo più avanti.

(ii) Il simbolo $\widetilde{\phi}$ per le carte di $T\mathcal{A}$ è provvisorio e verrà sostituito presto con un più significativo $T\phi$ (appena avremo definito la mappa tangente).

3.2.B Varietà parallelizzabili. Per formulare correttamente le domande poste alla fine della sezione precedente conviene essere più precisi sul tipo di diffeomorfismi che si desiderano fra TM e $M \times \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.8 *Sia M una varietà di dimensione n.*

i. Una trivializzazione *di TM è un diffeomorfismo*

$$F : TM \to M \times \mathbb{R}^n \,, \tag{3.2.1}$$

tale che, per ogni $p \in M$,

$$F(T_pM) = \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

e $F|_{T_pM} : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$, con $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ riguardato come $\mathbb{R}^n$, è un isomorfismo di spazi vettoriali.

ii. Se esiste una trivializzazione di TM scriviamo $TM \overset{\text{triv}}{\sim} M \times \mathbb{R}^n$ e diciamo che TM è banale.

iii. M è parallelizzabile *se TM è banale.*

Osservazioni: (i) Un isomorfismo fra uno spazio vettoriale ed $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla scelta di una base. Dunque, la possibilità di avere una trivializzazione di TM è intuitivamente legata alla possibilità di scegliere una base in ciascun spazio tangente la quale cambia in modo differenziabile da spazio tangente a spazio tangente. Per esempio, la base naturale è una tale base nel dominio di una carta fibrata. Usiamo questa idea in modo intuitivo nei prossimi esempi (la sua formalizzazione richiederebbe la nozione di campo vettoriale, che introdurremo a breve).

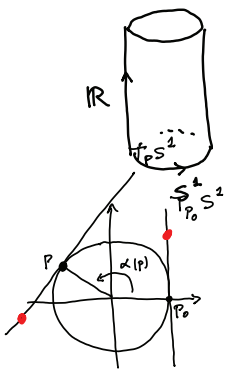
(ii) Una trivializzazione (o *banalizzazione*, in italiano) di TM è un diffeomorfismo fra TM e $M \times \mathbb{R}^n$ che ne "rispetta la struttura di fibrato", nel senso che manda fibre in fibre rispettandone la struttura vettoriale. Questo è un caso particolare di un concetto che si incontra nello studio dei fibrati.

Esempi 1. Ogni varietà M che possiede un atlante formato da una sola carta è parallelizzabile, e $TM \overset{\text{triv}}{\sim} M \times \mathbb{R}^n$.

2. S^1 è parallelizzabile e dunque

$$TS^1 \overset{\text{triv}}{\sim} S^1 \times \mathbb{R} \,,$$

un cilindro. Questo discenderà, rigorosamente, dal fatto che S^1 è un gruppo di Lie. Tuttavia è utile cercare di spiegarlo a livello intuitivo. Riguardiamo S^1 come il cerchio unitario in $\mathbb{R}^2$. In ogni suo punto p, lo spazio tangente T_pS^1 è (identificabile con) la retta tangente al cerchio in quel punto, come si vede derivando le curve a valori in S^1. Sia ora $p_0 = (1, 0)$ e, per ogni altro punto $p \neq p_0$ di S^1, sia $\alpha(p) \in (0, 2\pi)$ l'angolo (antiorario) fra p_0 e p. Chiaramente $\alpha(p)$ dipende differenziabilmente da p. La rotazione $R_{-\alpha(p)}$ di angolo $-\alpha(p)$ manda p su p_0 e la retta T_pS^1 nella retta $T_{p_0}S^1$. In questo modo tutti gli spazi tangenti possono essere identificati con uno di essi.



3. Prodotti di varietà parallelizzabili sono parallelizzabili. Dunque il cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ e tutti i tori $\mathbb{T}^n$ sono parallelizzabili.

4. Invece, S^2 *non è parallelizzabile.* Questo è una conseguenza di un famoso teorema di Poincaré che afferma che *ogni campo vettoriale differenziabile (e anzi continuo) tangente alla sfera si annulla in almeno un punto* (i campi vettoriali su una varietà verranno introdotti in seguito, ma si può comunque probabilmente capire l'idea). Questo risultato si esprime a volte con espressioni colorite, come *non si può pettinare un riccio* (se il riccio è (omeomorfo ad) una sfera, ci sarà sempre almeno un aculeo che non è tangente ad essa) oppure *in ogni dato momento c'è almeno un punto sulla terra senza vento.* Di conseguenza, se non può esistere un singolo campo vettoriale differenziabile ovunque non nullo non possono neppure esisterne due che formino una base in ciascuno spazio tangente e forniscano la trivializzazione.

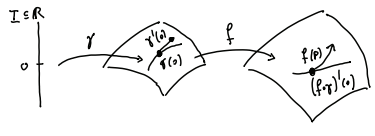
In realtà, non solo non esiste alcuna trivializzazione di TS^2, ma non esiste proprio alcun diffeomorfismo, e neppure alcun omeomorfismo, fra TS^2 ed $S^2 \times \mathbb{R}^2$. Il fatto che non esista alcun omeomorfismo significa che le ostruzioni alla parallelizzabilità sono già di natura topologica.

Osserviamo che un esempio che illustra questo fatto (e che naturalmente non dimostra la non parallelizzabilità) è quello della base naturale associata alle coordinate sferiche: come visto nell'esercizio 3.1.1.ii, non vi è modo di estendere tale base anche nei poli.

5. Fra le sfere S^n, $n \geq 1$, le uniche parallelizzabili sono S^1, S^3 ed S^7.

Esercizi 3.2.1 *(i) Mostrare che la (3.2.1) è equivalente a* $\mathrm{pr}_1 \circ F = \pi$, *ove* $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^n \to M$ *è la proiezione sul primo fattore e* π *è la proiezione di fibrato tangente.*

3.3 La mappa tangente



3.3.A Richiami sulle mappe $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Innanzitutto ricordiamo la situazione fra sottovarietà di spazi euclidei. Siano M ed N sottovarietà di due spazi euclidei, di dimensione m ed n rispettivamente. Ogni mappa differenziabile $f : M \to N$ induce in modo naturale, per ogni $p \in M$, una mappa lineare $D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ fra gli spazi tangenti, chiamata il differenziale di f in p, e definita nel modo seguente. Se $v \in T_p M$ esiste una curva $\gamma : I \to M$ per p ($\gamma(0) = p$) tale che $v = \gamma'(0)$. Allora $f \circ \gamma : I \to N$ è una curva per $f(p)$ ($f(\gamma(0)) = f(p)$) e di conseguenza $(f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)} N$. Allora si definisce

$$D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N\,, \qquad D_p f(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0)\,. \tag{3.3.1}$$

Siccome γ ed f sono mappe fra spazi euclidei, la derivata $(f \circ \gamma)$ si può calcolare con la usuale regola a catena, trovando

$$D_p f(v) = f'(p) v\,,$$