Un caso importantissimo di questa costruzione è il *toro* n-dimensionale, definito come il prodotto di n cerchi

$$\mathbb{T}^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \qquad (n \text{ fattori}) .$$

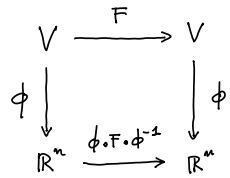
La sua importanza è dovuta in particolare al fatto che i tori sono gruppi di Lie, e anzi svolgono un ruolo rilevante in tale teoria. (Come vedremo poi, S^1 è non solo omeomorfo, ma anche diffeomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e per questo a volte si definisce $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$).

8. Spazi vettoriali. Su ogni spazio vettoriale reale V di dimensione finita n esiste una norma, ed essa definisce una metrica e quindi una topologia (che, in realtà, non dipende dalla norma scelta). Con questa topologia, V è una varietà di dimensione n.

Consideriamo infatti una qualunque base $\{b_1, \dots, b_n\}$ di V. Ogni vettore $v \in V$ può essere scritto in modo unico come la combinazione lineare $v = \sum_{i=1}^n v^i b_i$ con $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$, e questo definisce una mappa

$$\phi : V \to \mathbb{R}^n , \qquad \phi\Big(\textstyle\sum_{i=1}^n v^i b_i\Big) = (v^1, \dots, v^n)$$

che si vede facilmente (o si sa: ogni funzione lineare fra spazi normati finito-dimensionali è continua) essere un omeomorfismo. Questo definisce un atlante su V costituito dall'unica carta (V, ϕ).



In vista dell'esempio successivo facciamo la seguente osservazione: una mappa $F : V \to V$ è continua se e solo se la mappa $\phi \circ F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è continua (si vedano gli esercizi).

9. Aperti di una varietà. Ogni sottoinsieme aperto A di una varietà M è una varietà di dimensione $= \dim M$. Se $\{(U_\lambda, \phi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ è un atlante di M, $\{(A \cap U_\lambda, \phi_\lambda|_{A \cap U_\lambda}) : \lambda \in \Lambda\}$ è un atlante di A.

10. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. L'insieme $\mathrm{L(n, \mathbb{R})}$ di tutte le matrici reali $n \times n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n^2. Una base è costituita dalle n^2 matrici che hanno tutti gli elementi nulli eccetto uno che è $= 1$. Usando questa base, ad ogni matrice è associata la lista dei suoi n^2 elementi.

Il determinante di una matrice è una combinazione lineare di prodotti dei suoi elementi e dunque una funzione continua dei suoi elementi. Per quanto osservato alla fine dell'esempio 8, questo implica che $\det : \mathrm{L(n, \mathbb{R})} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Il "gruppo generale lineare" $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è il sottoinsieme di $\mathrm{L}(n, \mathbb{R})$ costituito dalle matrici invertibili, ovvero con determinante non nullo. Dunque $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Siccome $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è aperto, e il determinante è continuo, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è un aperto di $L(n, \mathbb{R})$ e dunque, come visto nell'esempio precedente, una varietà di dimensione n^2.

11. Varietà complesse. In modo del tutto analogo si possono costruire varietà differenziabili complesse. Una varietà complessa di dimensione complessa n è uno spazio topologico M Hausdorff e a base numerabile che, invece di essere localmente euclideo, è localmente hermitiano, nel senso che ha un ricoprimento costituito da sottoinsiemi omeomorfi ad aperti di $\mathbb{C}^n$, che forniscono delle carte complesse. La struttura differenziabile è poi data richiedendo che le funzioni di transizione, che per costruzione sono omeomorfismi fra aperti di $\mathbb{C}^n$, siano analitici con inversa analitica. Identificando $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e sostituendo le funzioni coordinate con le loro parti reali ed immaginarie, si può riguardare una varietà complessa di dimensione n come una varietà reale di dimensione $2n$.

Esercizi 2.2.2 *(i) Generalizzare l'esempio 1. mostrando che ogni spazio topologico $(M, \mathcal{T})$ che è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ (con la topologia metrica) è una varietà differenziabile di classe C^∞.* [R]

(ii) Con riferimento all'esempio 8, mostrare che una diversa scelta della base per V produce un atlante compatibile. [Suggerimento: le mappe lineari fra spazi vettoriali sono differenziabili.]

(iii) Con riferimento all'esempio 8, provare l'affermazione lì fatta che $F : V \to V$ è continua se e solo $\phi \circ F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è continua. [R]

2.2.D Costruzione di varietà con le carte. Nella definizione di varietà M si è preassegnata la topologia su M e si è aggiunta la struttura differenziabile per mezzo di un atlante differenziabile. In ogni carta (U, ϕ) la mappa ϕ è un omeomorfismo e dunque la preimmagine $\phi^{-1}(A)$ di un aperto A di $\widehat{U}_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto nella topologia della varietà. È chiaro che si può anzi trovare una base per M fatta di sottoinsiemi di questo tipo, e questa base genera la topologia di M. Ma allora è naturale chiedersi se non si sarebbe potuto fare a meno di richiedere, in partenza, che M avesse una topologia, e indurla per mezzo delle carte, ovvero della struttura differenziabile. In effetti questo è possibile, ed in varii testi nella definizione di varietà si parte assumendo che M sia solo un insieme. Tuttavia, una definizione precisa richiede delle condizioni piuttosto tecniche, che ci limitiamo ad enunciare:

Proposizione 2.6 *Sia M un insieme. Si assuma che, per un qualche $n \geq 1$, esista una famiglia di mappe iniettive*

$$\phi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n , \qquad \lambda \in \Lambda ,$$

con le seguenti proprietà:

i. Una sottofamiglia al più numerabile degli U_λ copre M e, per tutti i $\lambda, \mu \in \Lambda$, gli insiemi $\phi_\lambda(U_\lambda)$, $\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ e $\phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$.

ii. Dati due qualunque punti distinti p, q di M, o essi appartengono ad uno stesso U_λ oppure esistono U_λ ed U_μ disgiunti e che contengono uno q e l'altro p.

iii. Se $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ allora $\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \phi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ è un diffeomorfismo.

Allora esistono un'unica topologia $\mathcal{T}$ su M ed un'unica struttura differenziabile su $(M, \mathcal{T})$ nella quale le $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ sono carte.

Non dimostriamo questa proposizione, che però dovrebbe essere abbastanza intuitiva. Infatti, le ipotesi i. servono a definire una topologia a base numerabile, costruendone una base con le preimmagini sotto le ϕ_λ degli aperti di $\mathbb{R}^n$; allora le ϕ_λ sono omeomorfismi. L'ipotesi ii. ha poi lo scopo di rendere tale topologia Hausdorff (all'interno di un U_λ questo segue dall'omeomorfismo con un aperto di $\mathbb{R}^n$). E la iii. è la condizione di compatibilità fra le carte.[5]

Questa proposizione permette di mettere una struttura differenziabile su un insieme senza dichiararne prima la topologia, e anzi fornisce una procedura costruttiva per farlo. Avremo occasione di usarla.

Esempio Gli spazi proiettivi. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geq 1$, è l'insieme costituito da tutte le rette di $\mathbb{R}^{n+1}$ che passano per l'origine, ed è una varietà di dimensione n.

Si può pensare $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ come lo spazio quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sotto la relazione di equivalenza di "appartenere alla stessa retta per l'origine", ovvero $x \sim y$ se e solo se $y = rx$ per qualche $r \in \mathbb{R}$.

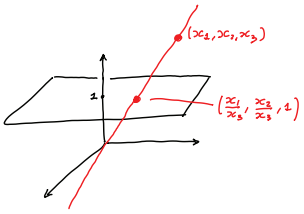
C'è anche una caratterizzazione equivalente. Siccome ogni retta per l'origine interseca la sfera unitaria in due punti diametralmente opposti, e viceversa dato un qualunque punto $x \in S^n$ c'è una retta che passa per x e $-x$, si può anche riguardare $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ come lo spazio quoziente $S^n/\sim_\pm$, ove $\sim_\pm$ è la relazione di equivalenza su S^n data da $x \sim -x$.

Il caso $n = 1$ è facile da visualizzare: $S^1/\sim_\pm$ è in corrispondenza biunivoca con i punti di metà cerchio, ed identificandone gli estremi si ha ancora un cerchio. Così, ci si aspetta che $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \approx S^1$. Ma la topologia di $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ per $n > 1$ è più complessa. Ciascuno di essi è però una varietà di dimensione n. Lo proviamo per $n = 2$ utilizzando l'approccio costruttivo della Proposizione 2.6.

Denotiamo $[x] = [x_1, x_2, x_3]$ la retta per il punto $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ di $\mathbb{R}^3$ (ovvero la classe di equivalenza di tale punto rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ menzionata sopra). Allora

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \{[x] \,:\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}\,.$$

[5] Per i dettagli si può vedere John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition (Springer, 2003), pg. 21.



Consideriamo i tre sottoinsiemi

$$U_i := \{[x] \,:\, x_i \neq 0\}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

di $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ formati dalle rette che intersecano il piano $x_i = 1$ (ovvero che non appartengono al piano coordinato ortogonale ad x_i), e le tre mappe

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^2\,, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

che alla retta $[x]$ associano le due coordinate diverse da x_i del suo punto di intersezione con il piano $x_i = 1$, ovvero

$$\phi_1([x]) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right), \quad \phi_2([x]) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right), \quad \phi_3([x]) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Queste mappe sono (ovviamente) biettive e, per esempio,

$$\phi_3^{-1}(y_1, y_2) = [y_1, y_2, 1] \qquad \text{etc.}$$

Queste tre carte possono essere completate, considerando opportune restrizioni, in una famiglia che soddisfa le condizioni i. e ii. della Proposizione 2.6. Ci limitiamo qui a verificare esplicitamente la condizione iii. di quella Proposizione per una coppia di esse. Consideriamo il sottoinsieme

$$U_1 \cap U_3 = \{[x] \,:\, x_1 \neq 0\,,\; x_3 \neq 0\}\,.$$

Allora

$$\phi_1(U_1 \cap U_3) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y_2 \neq 0\}$$
$$\phi_3(U_1 \cap U_3) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y_1 \neq 0\}$$

e

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(y_1, y_2) = \phi_1([y_1, y_2, 1]) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{1}{y_1}\right)$$

che è un diffeomorfismo da $\phi_3(U_1 \cap U_3)$ a $\phi_1(U_1 \cap U_3)$.

Osservazione: Gli spazi proiettivi *complessi* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ emergono in modo naturale in fisica: in meccanica quatistica, uno stato puro è un "raggio" in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (in generale infinito dimensionale, ma in certi casi finito dimensionale, e consideriamo questo caso). Un raggio è precisamente una "linea complessa", ovvero l'insieme dei punti $c\psi$, $c \in \mathbb{C}$, con un dato $\psi \in \mathcal{H}$. Come varietà reale, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ha dimensione $2n$ ed ha una struttura simplettica, che è quella della meccanica Hamiltoniana. Corrispondentemente, questa descrizione "geometrica" della meccanica quantistica getta della luce sulle relazioni fra meccanica quantistica e meccanica hamiltoniana e sulla quantizzazione. Quanto detto sul caso reale dovrebbe essere di ausilio nella comprensione di quello complesso.

Esercizi 2.2.3 *(i) Si verifichi che le tre mappe $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ introdotte nell'esempio sugli spazi proiettivi soddisfano la condizione i. della Proposizione 2.6.* [R]

(ii) Mostrare che $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ è compatto. [Suggerimento: è $= S^n/\sim$ e dunque è l'immagine della proiezione canonica $\pi : S^n \to S^n/\sim$]. [R]

2.3 Mappe differenziabili fra varietà

Il principale motivo per considerare varietà differenziabili, e non solo varietà topologiche, è la possibilità di fare, su di essi, un calcolo differenziale. Come già osservato, una nozione di differenziabilità di una mappa fra due varietà non può essere data solo in termini della struttura topologica dello spazio (topologia e carte) ma usa la struttura differenziabile, precisamente il fatto che le mappe fra varietà possono essere scritte in coordinate, per mezzo delle rappresentative locali (2.1.4), e richiedendo la differenziabilità (nel senso standard) di queste funzioni. Cominceremo da questo. Successivamente ci porremo il problema di definire un "differenziale" per le mappe differenziabili fra varietà, cosa che non possiamo fare adesso perché richiede l'introduzione degli spazi tangenti alle varietà.

2.3.A Mappe differenziabili. Sebbene si possano considerare funzioni differenziabili di ogni classe C^r ci limiteremo al caso C^∞, che come prima chiameremo "differenziabile"; e con "varietà" intenderemo varietà differenziabile.

Definizione 2.7 *Siano $(M, \mathcal{A}_M)$ ed $(N, \mathcal{A}_N)$ due varietà ed $f : M \to N$ una mappa continua.*

i. *f è* differenziabile in *$p \in M$ se esistono una carta $(U, \phi) \in \mathcal{A}_M$ con $p \in U$ e una carta $(V, \psi) \in \mathcal{A}_N$ con $f(p) \in V$ tali che la rappresentativa locale di f relativa a queste due carte*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_{\phi(U \cap f^{-1}(V))} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V \cap f(U))$$

sia differenziabile in $\phi(p)$ (come mappa da un aperto di $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, se $m = \dim M$ e $n = \dim N$).

ii. *f è* differenziabile *se lo è in ogni punto di M.*

Può apparire strano che si sia definita la differenziabilità solo per mappe continue (come ben si sa, per funzioni fra spazi $\mathbb{R}^n$ la continuità segue dalla differenziabilità). Il motivo è che la continuità di f assicura che $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ sia un aperto di $\mathbb{R}^m$ (perché V è aperto e ϕ un omeomorfismo) e quindi ha senso parlare di differenziabilità di una mappa da tale insieme ad $\mathbb{R}^n$.

A questo proposito faremo la seguente convenzione: sottintenderemo che una funzione differenziabile (anche solo in un punto) sia continua (in tutto il suo dominio).

È importante osservare che la definizione di differenziabilità *non* dipende dalla scelta delle due carte (U, ϕ) e (V, ψ) considerate: se è soddisfatta per una coppia di carte lo è per ogni altra coppia. Come anticipato nella sezione 2.2.A, questa è una conseguenza del fatto che si richiede che le funzioni di transizione fra le carte di un atlante differenziabile siano diffeomorfismi (e forse è addirittura la principale motivazione per questa richiesta). In effetti, se $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ e $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ sono due altre carte tali che $p \in \tilde{U}$ e $f(p) \in \tilde{V}$, le rappresentative locali relative alle prime due carte e a queste due carte sono legate dalla

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})^{-1} \tag{2.3.1}$$

(si veda l'esercizio 2.1.3.i), e, siccome $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ e $\tilde{\phi} \circ \phi^{-1}$ sono diffeomorfismi, la differenziabilità dell'una implica quella dell'altra.

Quando N è un aperto di $\mathbb{R}^n$ sottintendiamo che lo riguardiamo come varietà con la sua struttura differenziabile standard, per cui la differenziabilità di $f : M \to N \subseteq \mathbb{R}^n$ è definita con riferimento alla differenziabilità delle rappresentative locali $f \circ \phi_\lambda^{-1} : \widehat{U}_\lambda \to \mathbb{R}^n$.

Esempi 1. Consideriamo due aperti M di $\mathbb{R}^m$ ed N di $\mathbb{R}^n$ come varietà con la loro struttura differenziabile standard e sia $f : M \to N$ differenziabile secondo la definizione 2.7. Siccome M ha la carta globale (M, id) ed N ha la carta globale (N, id), questo significa che la rappresentativa locale di f è la funzione $\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}^{-1}$, cioè f stessa, e la differenziabilità di f come mappa fra varietà coincide con quella di f come funzione fra aperti di $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$. Dunque, in questo caso la nozione di differenziabilità coincide con quella ordinaria.

2. Sia (U, ϕ) una carta di una varietà M. Riguardiamo $\phi : U \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ come una mappa fra $U \subseteq M$ ed $\mathbb{R}^n$, con $\mathbb{R}^n$ con la sua struttura standard di varietà, dunque con la carta globale $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$. Allora la rappresentativa locale di ϕ è $\mathrm{id} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}$, che è differenziabile. Dunque le carte non sono solo omeomorfismi, ma sono anche funzioni differenziabili (nel senso della Definizione 2.7).

3. Consideriamo la restrizione ad S^1 della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Per verificarne la differenziabilità in un punto (x, y) di S^1 con $y > 0$ possiamo usare su S^1 la carta $\phi_{V,+} : S^1_{V,+} \to \mathbb{R}$ dell'esempio 2 della sezione 2.1.A e su $\mathbb{R}$ la carta globale $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$. Siccome $\phi_{V,+}(x, y) = x$ e $\phi^{-1}_{V,+}(x) = (x, \sqrt{1 - x^2}\,)$, la rappresentativa locale di f è

$$\mathrm{id} \circ f \circ \phi^{-1}(x) = f(x, \sqrt{1 - x^2}\,) = x\sqrt{1 - x^2}$$

che è differenziabile in tutti i punti dell'intervallo $\phi_{V,+}(S^1_{V,+}) = (-1, 1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di angolo α e asse z. Se, come nell'esempio 5 della sezione 2.2.C, scriviamo $(\hat{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ i punti di $\mathbb{R}^3$, allora $f(\hat{x}, z) = (R_\alpha \hat{x}, z)$ con $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ la matrice di rotazione di angolo α in $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo ora la restrizione $f|_{S^2}$ di f alla sfera S^2. Ovviamente essa mappa S^2 in sè, e dunque la riguardiamo come una mappa

$$f|_{S^2} : S^2 \to S^2.$$

Inoltre, essa manda (biiettivamente) il polo nord P_+ della sfera in sè. Quindi, per verificarne la differenziabilità in un punto diverso da P_+ possiamo usare la proiezione stereografica dal polo nord come carta sia sul dominio che sul codominio. Geometricamente, è evidente che la rappresentativa locale di $f|_{S^2}$ rispetto a queste due carte agisce come la rotazione $y \mapsto R_\alpha y$ di angolo α in $\mathbb{R}^2$, e quindi è certamente differenziabile. È comunque istruttivo verificarlo analiticamente. La proiezione stereografica è la mappa $\phi : S^2 \setminus \{P+\} \to \mathbb{R}^2$ data da $\phi(\hat{x}, z) = \frac{\hat{x}}{1-z}$, e con inversa

$$\phi_+^{-1}(y) = \Big(\Big(1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big)y, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big)\,. \tag{2.3.2}$$

Quindi la rappresentativa locale di f è

$$\begin{aligned}
\phi_+ \circ f \circ \phi_+^{-1}(y) &= \phi_+ \circ f\Big(\Big(1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big)y, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big) \\
&= \phi_+\Big(\Big(1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big)R_\alpha y, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\Big) \\
&= \ldots = R_\alpha y
\end{aligned}$$

(dove i puntini indicano conti algebrici banali).

5. Consideriamo la mappa $f : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ che a ogni punto di S^2 assegna la retta per esso. Diamo per assodato che essa sia continua. Indichiamo $(\hat{x}, z)$ con $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ le coordinate sia nell'$\mathbb{R}^3$ che contiene S^2 sia nell'$\mathbb{R}^3$ da cui si ottiene per quoziente $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Vogliamo controllare la differenziabilità di f.

Usiamo per esempio la proiezione stereografica ϕ_+ su $S^2 \setminus \{P_+\}$ e la carta (U_z, ϕ_z) definita come nell'esempio della sezione 2.2.D su $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. U_z è l'insieme di tutte le rette che non appartengono al piano $\hat{x}$. Con riferimento alla definizione 2.7 abbiamo $U = S^2 \setminus \{P_+\}$ e $V = U_z$. Chiaramente la preimmagine sotto f di U_z è S^2 privato dell'equatore $z = 0$. Quindi $U \cap f^{-1}(V)$ è S^2 privato dell'equatore e del polo nord. La proiezione stereografica manda l'equatore di S^2 nel cerchio unitario in $\mathbb{R}^2$ e dunque

$$\phi_+(f^{-1}(V) \cap U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\hat{x}\| = 1\}\,.$$

In conclusione dobbiamo controllare la differenziabilità di

$$\phi_z \circ f \circ \phi_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\|\hat{x}\| = 1\} \to \mathbb{R}^2\,.$$

Per ogni $\hat{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\|\hat{x}\| = 1\}$ si ha, ricordando la (2.3.2),

$$\begin{aligned}
\phi_z \circ f \circ \phi_+^{-1}(\hat{x}) &= \phi_z \circ f\Big(\Big(1 - \frac{\|\hat{x}\|^2 - 1}{\|\hat{x}\|^2 + 1}\Big)\hat{x}, \frac{\|\hat{x}\|^2 - 1}{\|\hat{x}\|^2 + 1}\Big) \\
&= \phi_z\Big(\Big[1 - \frac{\|\hat{x}\|^2 - 1}{\|\hat{x}\|^2 + 1}\,\hat{x}, \frac{\|\hat{x}\|^2 - 1}{\|\hat{x}\|^2 + 1}\Big]\Big) \\
&= \ldots = \frac{2\hat{x}}{\|\hat{x}\|^2 - 1}\,,
\end{aligned}$$

che è differenziabile (perché gli $\hat{x}$ di norma 1 sono esclusi).

(Notiamo che la mappa f considerata qui è la proiezione canonica da S^2 allo spazio quoziente $S^2/\sim_\pm$ considerato nell'esempio della sezione 2.2.D).

6. La differenziabilità di una mappa $f : M \to N$ fra due varietà dipende dalle strutture differenziabili su di esse. Se $M = N = \mathbb{R}$ con la struttura differenziabile standard, allora la funzione $f : M \to N$, $f(x) = x^{1/3}$ non è differenziabile in $x = 0$. Se però su N mettiamo la struttura differenziabile data dall'atlante con l'unica carta $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = y^3$ (Esempio 2. nella sezione 2.2.C) allora f è differenziabile in $x = 0$ perché la sua rappresentativa locale $\phi \circ f \circ \mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è l'identità.

Osservazione: In alcuni testi, nella definizione di mappa differenziabile, il requisito di continuità è sostituito da altre condizioni, equivalenti, che involgono le carte. Per un esempio, e dettagli, si può vedere John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd edition (Springer, 2003), pg. 35 e 48. La necessità della continuità, o di altre condizioni, è illustrata dal fatto che esistono funzioni discontinue (che non si vogliono considerare differenziabili) che hanno solo *alcune* rappresentative locali differenziabili.

Esercizi 2.3.1 *(i) Mostrare che la composizione di due mappe differenziabili è differenziabile.* [S]

(ii) Mostrare che la restrizione di una mappa differenziabile ad un sottoinsieme aperto del suo dominio è differenziabile. [S]

(iii) Mostrare (o convincersi) che, se N e $M_1, \dots, M_k$ sono varietà allora una mappa $f = (f_1, \dots, f_k) : N \to M_1 \times \cdots \times M_k$ è differenziabile se e solo se lo sono le $f_i : N \to M_i$.

(iv) Con riferimento all'esempio 6, f è differenziabile in $x = 0$ anche se sul dominio si mette la struttura differenziabile data dalla carta $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x^3$, e sul codominio quella standard? [R]

(v) Con riferimento all'esercizio 2.1.3.iii, mostrare che se le funzioni $\widehat{f}_\lambda$ sono differenziabili, allora esse sono le rappresentative locali di una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$.

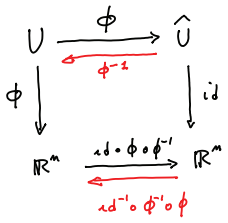
2.3.B Diffeomorfismi fra varietà.

Definizione 2.8 *Siano M ed N due varietà.*

i. Una mappa $f : M \to N$ è un diffeomorfismo *se è differenziabile, biunivoca, ed ha inversa differenziabile.*

ii. M e N sono diffeomorfi se esiste un diffeomorfismo $f : M \to N$.

Ricordando che la differenziabilità presuppone la continuità, si riconosce che, equivalentemente, un diffeomorfismo è un omeomorfismo che è differenziabile ed ha inversa differenziabile. Dunque due varietà diffeomorfe sono anche omeomorfe e necessariamente hanno la stessa dimensione (si veda la Sezione 1.3.D e l'esercizio 2.3.2.iv).



Esempi 1. Una carta $\phi : U \to \widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo. Infatti ϕ è differenziabile (esempio 2. della sezione 2.3.A) e anche la sua inversa $\phi^{-1} : \widehat{U} \to U$ lo è perché ha la rappresentativa locale $\phi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$.

2. La mappa $f : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ dell'esempio 5. della sezione 2.3.A non è un diffeomorfismo perché è, con evidenza, 2 : 1. Si può mostrare che essa è però un diffeomorfismo locale (si veda la prossima Sezione).

3. *Trasporto della struttura differenziabile.* Abbiamo già osservato nella sezione 2.1.B che, per mezzo di una biezione, si può trasportare la struttura topologica da uno spazio topologico ad un qualunque insieme. Lo stesso avviene per la struttura differenziabile. Sia $(M, \mathcal{A})$ una varietà, N un insieme, e $b : M \to N$ una biezione. Dotiamo N della topologia trasportata da M con b: $A \subset N$ è aperto se e solo se $b^{-1}(A)$ è aperto in M. Allora $b : M \to N$ è un omeomorfismo.

Costruiamo ora un atlante differenziabile per N come segue. Per ogni carta (U, ϕ) di M, con $\phi(U) = \widehat{U}$, consideriamo la mappa

$$\phi \circ b^{-1}|_{b(U)} : b(U) \to \widehat{U}\,.$$

Essa è un omeomorfismo e definisce dunque una carta topologica $(b(U), \phi \circ b^{-1})$ per N. Le funzioni di transizione fra queste carte

$$(\phi \circ b^{-1}) \circ (\psi \circ b^{-1})^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}$$

coincidono con quelle fra le corrispondenti carte di M e sono dunque diffeomorfismi. Questo produce un atlante differenziabile e quindi una struttura di varietà differenziabile su N.

Inoltre, $b : M \to N$ è un diffeomorfismo fra queste due varietà. Infatti, se $p \in M$ appartiene al dominio della carta (U, ϕ) allora $b(p) \in N$ appartiene al dominio della carta $(b(U), \phi \circ b^{-1})$ e la rappresentativa locale della biezione $b : M \to N$ relativa a questa coppia di carte è

$$(\phi \circ b^{-1}) \circ b \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}\,;$$

questo implica che $b : M \to N$ è differenziabile; in modo analogo si verifica che b^{-1} è differenziabile.

4. S^1 *ed* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nell'esempio 3 della sezione 2.1.B abbiamo visto che la biezione

$$b_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1\,, \qquad b_2([x]) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)\,,$$

con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munito della topologia quoziente, è un omeomorfismo (si veda anche l'esercizio 2.1.2.ii). Possiamo sfruttare la sua inversa per trasportare la struttura differenziabile di S^1 su $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, che è quindi una varietà differenziabile di dimensione 1 diffeomorfa ad S^1, con diffeomorfismo b_2.

Così come due spazi topologici omeomorfi vanno considerati equivalenti dal punto di vista topologico, due varietà differenziabili devono essere considerate equivalenti dal punto di vista differenziabile. Anche se non possiamo essere molto più precisi perché non abbiamo ancora nozioni

ed esempi, esse possiedono gli stessi "invarianti differenziabili"; ovviamente, fra di essi vi sono tutti gli invarianti topologici (dimensione, compattezza, connessione etc).

A questo punto possiamo dare un nuovo sguardo al fatto che su uno spazio topologico possono esistere diverse strutture differenziabili, dovute ad atlanti massimali non compatibili nel senso della Definizione 2.5. Diremo che due strutture differenziabili (atlanti massimali) $\mathcal{A}$ e $\tilde{\mathcal{A}}$ su uno spazio M sono *differenziabilmente equivalenti*, o *equivalenti*, o anche che esse sono *la stessa struttura differenziabile a meno di diffeomorfismi*, se le due varietà $(M, \mathcal{A})$ e $(M, \tilde{\mathcal{A}})$ sono diffeomorfe. Per esempio, $\mathbb{R}$ con la struttura differenziabile standard e con la struttura differenziabile data dalla carta $(\mathbb{R}, \phi(x) = x^3)$ (esempio 2. della sezione 2.2.C) sono differenziabilmente equivalenti (vedere l'esercizio 2.3.2.ii).

Osservazione: È naturale domandarsi se, su un dato spazio topologico, possano esistere strutture differenziabili non differenziabilmente equivalenti (ma che inducono la topologia data). Questa è una questione che è stata naturalmente studiata ma non è ancora del tutto capita. La risposta è affermativa, ma è una situazione piuttosto rara. Si sa che, fra tutti gli spazi $\mathbb{R}^n$, solo $\mathbb{R}^4$ possiede strutture differenziabili non equivalenti, e di fatto ne possiede un'infinità non numerabile (gli $\mathbb{R}^4$ con le strutture differenziabili non equivalenti a quella standard si chiamano "$\mathbb{R}^4$ esotici"). Non c'è un analogo risultato generale per le sfere S^n, ma si sa che S^7 ne ha 15 e S^{31} oltre 16 milioni.

Esercizi 2.3.2 *(i) La funzione $f|_{S^2}$ dell'esempio 4. della sezione 2.3.A è un diffeomorfismo?* [R]

(ii) Mostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'esempio 6 della sezione 2.3.A, ove il dominio ha la struttura differenziabile standard e il codominio quella data dalla carta globale $\phi(x) = x^3$, è un diffeomorfismo.

(iii) Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo. Mostrare che allora le rappresentative locali di f ed f^{-1} sono (a due a due) le inverse le une delle altre e sono diffeomorfismi (fra dominio e codominio specificati in (2.1.4)). [R]

(iv) Mostrare che se M ed N sono diffeomorfi allora $\dim M = \dim N$. [R]

(v) Sia $f : M \to N$ un omeomorfismo. Mostrare che esso è un diffeomorfismo se e solo se tutte le sue rappresentative locali (2.1.4) sono diffeomorfismi.

(vi) Siano M una varietà, N un insieme e $b, c : M \to N$ due biezioni. Mostrare che trasportando su N la struttura differenziabile di M mediante b e mediante c si ottengono su N due strutture differenziabili equivalenti.

(vii) Mostrare che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con la topologia quoziente, ha un'unica struttura differenziabile a meno di diffeomorfismi. [Suggerimento: si sa che lo stesso vale per S^1]

(viii) Verificare che un atlante di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con la struttura differenziabile dell'esempio 4, è formato dalle due carte seguenti (ove $U_A := \{[x] : x \in A\}$): $(U_{(0,1)}, \phi_1)$ con $\phi_1([x]) = x - \lfloor x \rfloor$ e

$(U_{[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)}, \phi_2)$ *con* $\phi_2([x]) = x - \lfloor x \rfloor$ *se* $0 \leq x < \frac{1}{2}$ *e* $\phi_2([x]) = x - \lfloor x \rfloor - 1$ *se* $\frac{1}{2} < x < 1$. [R]

2.3.C Diffeomorfismi locali.

Definizione 2.9 *Sia $f : M \to N$ una mappa fra due varietà di uguale dimensione.*

i. f è un diffeomorfismo locale in un punto $p \in M$ *se esistono un intorno U di p ed un intorno V di $f(p)$ tali che $f|_U : U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

ii. f è un diffeomorfismo locale *se è un diffeomorfismo locale in ogni punto.*

Proposizione 2.10 *Una mappa $f : M \to N$ è un diffeomorfismo locale in $p \in M$ se e solo se una (e quindi ogni) sua rappresentativa locale*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

relativa ad una coppia di carte (U, ϕ) in M con $p \in U$ e (V, ψ) in N con $f(p) \in V$ è un diffeomorfismo locale in $\phi(p)$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia un diffeomorfismo fra due aperti $U_0 \ni p$ e $V_0 \ni f(p)$ e consideriamo due carte $(U \ni p, \phi)$ e $(V \ni f(p), \psi)$. Poniamo $W := U_0 \cap U \cap f^{-1}(V)$. La restrizione della rappresentativa locale $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ a $\phi(W)$ è la composizione di tre diffeomorfismi (come si vede scrivendo esplicitamente domini e codomini) e dunque un diffeomorfismo fra $\phi(W)$ e $\psi(f(W))$. Per il viceversa si assuma che esistano aperti $\widehat{U}_0 \ni \phi(p)$ e $\widehat{V}_0 \ni \psi(f(p))$ tali che $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \widehat{U}_0 \to \widehat{V}_0$ sia un diffeomorfismo e si osservi che, opportunamente ristretta, $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ è composizione di diffeomorfismi. (Si ricordi che le carte sono diffeomorfismi).

Il fatto che questa condizione non dipende dalle carte scelte segue, ovviamente, dal fatto che le funzioni di transizione sono diffeomorfismi. ■

Per il teorema della funzione inversa[6] questo è equivalente al fatto che la matrice Jacobiana $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(p))$ di una (e quindi ogni) rappre-

[6]Una mappa differenziabile $f : A \to B$ fra due aperti A, B di $\mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo locale in $x \in A$ se e solo se la sua matrice Jacobiana $f'(x)$ in x è invertibile, ovvero $\det(f'(x)) \neq 0$.

sentativa locale $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è invertibile. Dunque, stabilire se una mappa è un diffeomorfismo locale è molto facile.

Proposizione 2.11 *Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo locale fra due varietà. Allora*

i. f manda aperti in aperti.

ii. $f : M \to f(M)$ è un diffeomorfismo se e solo se f è iniettiva.

Dimostrazione. (i.) Sia $A \subseteq M$ un aperto. Siccome f è un diffeomorfismo locale in ogni punto di A, esiste un ricoprimento di A con aperti A_λ tale che ciascun $f|_{A_\lambda} : A_\lambda \to f(A_\lambda)$ è un diffeomorfismo (se $f : U \to V$ è diffeomorfismo, lo è anche $f : (U \cap A) \to f(U \cap A) \subseteq V$). Dunque ciascun $f(A_\lambda)$ è aperto e così è $f(A) = \cup_\lambda f(A_\lambda)$.

(ii.) Intanto, per i., $f(M)$ è aperto e dunque una varietà. La mappa $f : M \to f(M)$ è differenziabile e suriettiva. Se è un diffeomorfismo, allora è iniettiva. Supponiamo che sia iniettiva. Allora è biettiva e dunque esiste $f^{-1} : f(M) \to M$, che è continua (perché f manda aperti in aperti). La sua differenziabilità segue dal fatto che essa, localmente, coincide con le inverse locali di f, che sono differenziabili. ■

Esempio Nell'identificazione di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con S^1 dell'esempio 3 della Sezione 2.1.B, la proiezione canonica è la mappa

$$\pi_2 : \mathbb{R} \to S^1\,, \qquad \pi_2(t) = \Big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\Big)\,.$$

Mostriamo che essa è un diffeomorfismo locale. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo, per definitezza, che $\sin(2\pi t_0) > 0$, cosicché $\pi_2(t_0)$ appartenga al dominio della carta $(S^1_{V,+}, \phi_{V,+})$ dell'esempio 2 della Sezione 2.1.A, con $\phi_{V,+}$ la proiezione sul primo fattore e $\phi_{V,+}(S^1_{V,+}) = (-1, 1)$. Determinando, con la (2.1.4), la rappresentativa locale di π_2 relativa alla carta standard $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ su $\mathbb{R}$ e a questa carta su S^1, si trova

$$\phi_{V,+} \circ \pi_2 \circ \mathrm{id}^{-1} : I \to (-1, 1)\,, \qquad t \mapsto \cos(2\pi t)\,, \tag{2.3.3}$$

ove $I := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k, k + \frac{1}{2}\right)$ (si veda l'esercizio 2.3.3.i). Se restringiamo questa mappa all'intervallo $\left(k, k + \frac{1}{2}\right)$ che contiene t_0 otteniamo un diffeomorfismo fra quell'intervallo e $(-1, 1)$, cosicché la rappresentativa locale è un diffeomorfismo locale in $\mathrm{id}(t_0) = t_0$. Per la Proposizione 2.10, π_2 è allora un diffeomorfismo locale in t_0. Si arriva alla stessa conclusione anche utilizzando il teorema della funzione inversa: la derivata della rappresentativa locale in t_0 è $-2\pi \sin(2\pi t_0) \neq 0$ (per una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ il determinante della matrice Jacobiana è la derivata).

I casi in cui $\pi_2(t_0)$ appartiene al dominio di un'altra carta, ma non a questo, sono del tutto analoghi.

Esercizi 2.3.3 *(i) Verificare la (2.3.3) particolareggiando la (2.1.4) al caso in considerazione.* [R]

2.4 Suggerimenti e soluzioni per gli esercizi

Esercizi 2.1.3

(ii) $f \circ \tilde{\phi}^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})^{-1}$.

(iii) Per ogni λ, definiamo la funzione continua $f_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}$ come $f_\lambda := \widehat{f}_\lambda \circ \phi_\lambda$. Se $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ allora in ciascun punto p di tale insieme è $f_\lambda(p) = f_\mu(p)$. Allora esiste una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ la cui restrizione $f|_{U_\lambda}$ a ciascun U_λ è f_λ. La sua rappresentativa locale relativa alla carta $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ è $f \circ \phi_\lambda^{-1}|_{\widehat{U}_\lambda} = f_\lambda \circ \phi_\lambda^{-1}|_{\widehat{U}_\lambda} = \widehat{f}_\lambda$. La continuità di f segue da quella delle sue restrizioni agli U_λ.

Esercizi 2.2.1

(i) No, perché $\phi_\lambda \circ (\phi_\mu)^{-1} = (\phi_\mu \circ (\phi_\lambda)^{-1})^{-1}$.

Esercizi 2.2.2

(i) $(M, \mathcal{T})$ è Hausdorff e a base numerabile perché tali proprietà sono invarianti topologici e ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ le eredita da $\mathbb{R}^n$. Se $\phi : M \to \widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo, allora la carta (M, ϕ) forma un atlante per M, ed ogni atlante formato da una sola carta è automaticamente C^∞.

(iii) Siccome $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo, se F è continua allora anche $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ lo è, e viceversa.

Esercizi 2.2.3

(i) U_1, U_2 e U_3 coprono $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Che $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ sia iniettiva è stato già osservato, ed è ovvio. Poi $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^2$ è aperto. Come osservato nell'esempio, se $i \neq j$, $\phi_i(U_i \cap U_j)$ è $\mathbb{R}^2$ privato di un asse coordinato, ed è un aperto.

(ii) La proiezione canonica $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ è continua e suriettiva, S^n è compatta, e l'immagine continua di un compatto è compatta.

Esercizi 2.3.1

(i) Siano $f : M \to N$ e $g : N \to P$ differenziabili e (U, ϕ), (V, ψ) e (W, ξ) carte attorno a p, $f(p)$ e $g(f(p))$. Allora la rappresentativa locale di $g \circ f$ è .... ed è = ... ed è differenziabile perché ....

(ii) Sia A un aperto di M. Se $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$ è un atlante di M allora $\{(A \cap U_\lambda, \phi_\lambda|_{A \cap U_\lambda})\}$ è un atlante di A. Quindi le rappresentative locali di $f|_A$ sono .... e soddisfano ....

(iv) No.

Esercizi 2.3.2

(i) Sì: l'inversa è la rotazione di angolo $-\alpha$ ed è differenziabile.

(iii) Siano (U, ϕ) e (V, ψ) carte di M ed N tali che $f(U) \cap V \neq \emptyset$. Allora $U \cap f^{-1}(V)$ e $f(U \cap f^{-1}(V)) = f(U) \cap V$ sono aperti e (la restrizione a $U \cap f^{-1}(V)$ di) f è una biezione fra di essi, e quindi un omeomorfismo fra di essi perché f ed f^{-1} sono continue per ipotesi. La rappresentativa locale di f rispetto a queste due carte è $\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_{\phi(U \cap f^{-1}(V))}$ e quella di f^{-1} rispetto alle due carte in ordine scambiato è $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}|_{\psi(V \cap f(U))}$, e sono l'una l'inversa dell'altra. Essendo entrambe differenziabili, sono diffeomorfismi.

(iv) Segue dall'esercizio (iii): le rappresentative locali di un diffeomorfismo sono diffeomorfismi fra aperti di $\mathbb{R}^{\dim M}$ e di $\mathbb{R}^{\dim N}$, che quindi (come è noto dai corsi di analisi) hanno la stessa dimensione.

(viii) Le due carte si ottengono trasportando su $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, mediante l'inversa della biezione b_2, le due carte angolari dell'esempio 2 della Sezione 2.1.A, $(S^1_{0,2\pi}, \phi_{0,2\pi})$ e $(S^1_{-\pi,\pi}, \phi_{-\pi,\pi})$, e riscalando le coordinate di un fattore $1/(2\pi)$.

Esercizi 2.3.3

(i) Nella (2.1.4) si deve porre $f = \pi_2$, $\phi = \mathrm{id}$, $U = \mathbb{R}$, $\psi = \phi_{V,+}$, $V = S^1_{V,+}$ e poi, calcolando, $f^{-1}(V) \cap U = \pi_2^{-1}(S^1_{V,+}) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+\frac{1}{2})$, $\phi(f^{-1}(V)\cap U) = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+\frac{1}{2})$, $\psi(V \cap f(U)) = \phi_{V,+}(S^1_{V,+}) = (-1, 1)$ e $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(t) = \phi_{V,+} \circ \pi_2(t) = \cos(2\pi t)$. Dunque la rappresentativa locale è la mappa $t \mapsto \cos(2\pi t)$ da $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k + \frac{1}{2})$ a $(-1, 1)$.